

卒業論文題目

天体衝突のシミュレーションとその考察

宮城教育大学 学校教育教員養成課程 理科教育専攻

D8161 相田知輝

平成 22 年 2 月 8 日

要旨

天文学において、天体衝突を考えることは大きな意味がある。例えば、月のクレーターは小惑星の衝突によって形成されたものであるが、衝突によって起こる変形のメカニズムが分かれば、衝突天体の大きさや速度を知ることができる。しかしながら、天体という巨大なスケールを対象としたシミュレーションを室内実験で行なうことは難しい。そのため、数値計算を用いたコンピュータによるシミュレーションは天文分野では非常に重要な領域である。

本研究は天体を弾塑性体とみなし、SPH法を用いて考えていく。3次元に対応しているプログラムを用いることから、出力結果を3次元で表現できるソフトを探した。衝突過程での内部エネルギーの変化にも着目し、圧力をグラデーションで表現することで、衝突中の物体の内部がどのようなエネルギー分布であるかを調べる。また、衝突速度や物性の違い（特に弾塑性体と流体の違い）による変形の変形の比較を行なうことが本研究のテーマである。

目次

第1章 はじめに

- 1.1 天体衝突現象
- 1.2 本研究の目的

第2章 流体運動の記述

- 2.1 流体とは
- 2.2 流体運動の基礎方程式
 - 2.2.1 質量保存則
 - 2.2.2 運動量保存則
 - 2.2.3 エネルギー保存則

第3章 弾塑性体運動の記述

- 3.1 弾塑性体とは
- 3.2 塑性体の運動
 - 3.2.1 応力
 - 3.2.2 ひずみ
 - 3.2.3 フックの法則
 - 3.2.4 偏差応力
 - 3.2.5 降伏条件
 - 3.2.6 回転
- 3.3 弾塑性体運動の基礎方程式の適用
 - 3.3.1 運動量保存則
 - 3.3.2 エネルギー保存則

第4章 SPH法

- 4.1 SPH法
- 4.2 流体のSPH表記法
 - 4.2.1 運動量保存則
 - 4.2.2 エネルギー保存則
- 4.3 弾塑性体のSPH表記法
 - 4.3.1 運動量保存則
 - 4.3.2 ひずみ
 - 4.3.3 回転
 - 4.3.4 偏差応力
 - 4.3.5 エネルギー保存則

第5章 ユゴニオ方程式

- 5.1 ユゴニオ方程式とは
- 5.2 衝撃波面が動く場合のユゴニオ方程式 方程式の導出

- 5.2.1 質量保存
- 5.2.2 運動量保存
- 5.2.3 エネルギー保存
- 5.3 衝撃波面を固定した場合のユゴニオ方程式方程式の導出
 - 5.3.1 質量保存
 - 5.3.2 運動量保存
 - 5.3.3 エネルギー保存
- 5.4 平面衝突の近似モデル
- 5.5 状態方程式

第6章 数値計算法

- 6.1 Runge-Kutta 法
- 6.2 系の中でのエネルギー保存

第7章 テストシミュレーション

- 7.1 プログラムコードの評価
- 7.2 テストシミュレーションモデル
- 7.3 条件
- 7.4 物質特性
- 7.5 状態方程式
- 7.6 粒子の配列
- 7.7 数値の無次元化
- 7.8 実行結果

第8章 変形過程

- 8.1 速度の違いによる変形過程
- 8.2 各速度における変形率の変化
- 8.3 物性の違いによる変形過程

第9章 圧力分布

- 9.1 圧力分布
- 9.2 圧力と各パラメータ

第10章 結論

- 10.1 本研究の成果
- 10.2 今後の課題

謝辞

参考文献

資料

第1章 はじめに

1.1 天体衝突

天体衝突の身近な例の一つとして月のクレーターが挙げられる。月には大気が存在せず風化作用がないため、衝突当時の跡がそのまま残っている。その直径や形から衝突した小惑星の大きさや衝突速度を知ることができ、天体の構造などを解明される重要な要素として衝突現象が重視されている。

一般に太陽系における天体間の衝突速度のオーダーは1~10kmである【藤原 1997】。また、衝突する小惑星の形状や大きさも様々であり、大きいものは直径 100km、小さいものでは直径 1km 以下である。これらの多様な衝突現象を解明することは、衝突当時の環境などを知る上で必要不可欠なことである。

1.2 本研究の目的

室内実験において実際にkmスケールの衝突実験を行なうのは不可能である。そのため、天体衝突を考える上でコンピュータを使用した数値シミュレーションは必要不可欠である。本研究では、SPH法を用いた衝突実験のプログラムを、圧力という観点からも評価し、三次元の表現方法によって議論を行なう。数値シミュレーションに用いる物体である鉄を弾塑性体とみて、衝突速度によって異なる変形を比較する。さらに鉄を弾塑性体として取り扱った場合と流体として取り扱った場合に、変形の様子にどのような違いがみられるか比較する。

第2章 流体運動の記述

2.1 流体とは

気体や液体は力を加えると自由に流れるため、これらを合わせて流体と呼ぶ。多数の分子からなる流体をそれぞれの分子について力学的に扱うことは不可能である。分子的な構造を考えず、巨視的な立場で流体を連続体として扱うのが流体力学である【戸田 1994】。

2.2 流体運動の基礎方程式

流体を記述するため、3つの保存則（質量、運動量、エネルギー）を導出していく。

2.2.1 質量保存則（連続の式）

流体が一部に集まる流れがあると、その部分の密度が増加する。そこで、この現象で成り立つ関係についての方程式を考える。

一般に流体の密度を ρ 、流速を $\vec{u}(u, v, w)$ とする。空間内に不動の座標系 $O-xyz$ をとり、範囲が $x \sim \Delta x, y \sim \Delta y, z \sim \Delta z$ の直方体 $ABCD-EFGH$ を考え、この直方体に流体が集まるとする（図 2.1）。

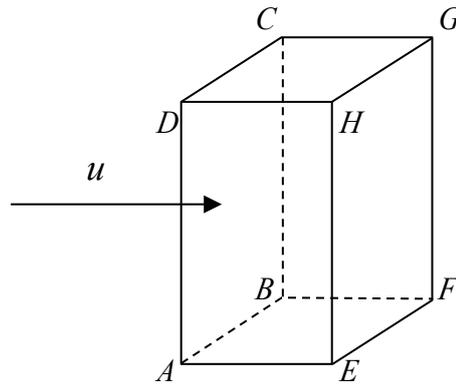


図 2.1

まず、面 $ABCD$ から直方体へ流れる流体に着目すると、流速は $\vec{u}(u, v, w)$ の x 成分である u であり、面 $ABCD$ の面積は $\Delta y \Delta z$ なので、この面を通る流体の単位時間あたりの質量は

$$\rho u \Delta y \Delta z \tag{2.1}$$

で与えられる。次に面 $EFGH$ についても同様に

$$(\rho u)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \tag{2.2}$$

で流体の単位時間あたりの質量が与えられる。ここで $(\rho u)_{x+\Delta x}$ は面 $ABCD$ から Δx だけ離れた面 $EFGH$ での ρu である。 Δx が充分小さければ ρu の変化は一定と近似できるので

$$(\rho u)_{x+\Delta x} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \quad (2.3)$$

としてよい。(2.3)式を(2.2)式に代入すると、面 $EFGH$ から直方体の外へ流れる流体の単位時間あたりの質量が以下のように与えられる。

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \quad (2.4)$$

(2.4)式を(2.1)式から引けば、 x 方向において単位時間あたりの直方体内の質量の変化は

$$\rho u \Delta y \Delta z - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.5)$$

となり、 y, z 方向においても同様に考えると

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.7)$$

となり、これらより単位時間あたりの直方体内の質量の変化を求めると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = - \left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.8)$$

と表せる。したがって両辺を直方体の体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ で割れば

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right\} \quad (2.9)$$

が導かれ、これを連続の方程式と呼ぶ。また、この方程式を次のように表記する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \quad (2.10)$$

$\operatorname{div}(\rho \vec{u})$ を $\rho \vec{u}$ のダイバージェンス(発散)という【戸田 1994】。

2.2.2 運動量保存則（オイラーの方程式）

粘性のない理想化された流体を完全流体という。完全流体では流体どうしの摩擦を考えなくてよい。つまり流体どうしが及ぼしあう力は接する面に垂直な成分の圧力のみである。主に用いられている流体の方程式にラグランジュ法とオイラー法というものがあるが、ここでは方程式の扱いが簡単なオイラー法について述べる。

オイラー法とは対象となる座標系に格子をつくり、不動の座標系 $O-xyz$ に固定された各交点 (x, y, z) を通過する流体について観測する記述法である。流速 \vec{u} の x, y, z 成分をそれぞれ u, v, w とし、時間 t における場の物理量 $f(x, y, z, t)$ を考える（図 2.2）。場所と時間が少し異なる点における物理量 $f + \Delta f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$ との差は以下のように与えられる。

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \quad (2.11)$$

各成分の流速 u, v, w はそれぞれ以下のように表せる。

$$u = \Delta x / \Delta t, v = \Delta y / \Delta t, w = \Delta z / \Delta t \quad (2.12)$$

(2.11) 式の両辺を t で微分すると

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.13)$$

(2.13) 式に (2.12) 式を代入することで f の時間的変化の割合は

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.14)$$

で与えられる。ここで、物理量 f を流速 u, v, w に置き換えることによって、速度 u, v, w の時間的変化の割合、すなわち加速度の記述ができる。

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.15)$$

重力のように流体の質量と比例する外力を単位質量あたりの成分で X, Y, Z とする。 x 方向の場合であれば、流体の微小部分 $x \sim x + \Delta x$ には両側からの圧力差 $p(x) - p(x + \Delta x) = -(\partial p / \partial x) \Delta x$ がはたらくから、運動方程式に代入し、流体の密度 ρ を用いて両辺の次元を調節すると

$$\begin{aligned} \rho \frac{\Delta u}{\Delta t} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{\Delta v}{\Delta t} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{\Delta w}{\Delta t} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.16)$$

と書ける。これに(2.15)式を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。これを完全流体に対するオイラーの方程式と呼ぶ【戸田 1994】。

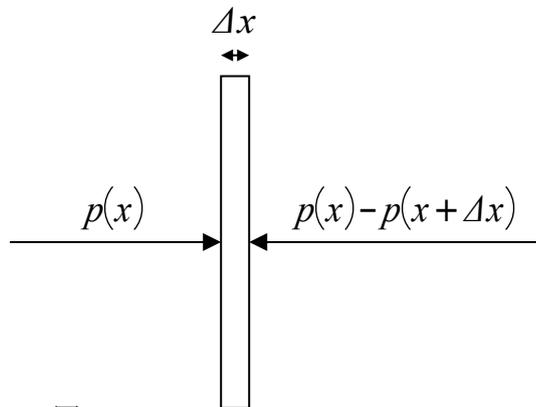


図 2.2

2.2.3 エネルギー保存則（ベルヌーイの定理）

完全流体では流体どうしの摩擦はないものとして考えていたから、これによるエネルギーの損失はなく、力学的エネルギーが保存される。簡単のために時間的に流れが変化せず（定常流）かつ縮まない（非圧縮）流体についてエネルギー保存則について述べる。

まず、細い流管の2点 A, B を考える。非圧縮流体のため流体の密度 ρ は一定である。次に流管の点 A において、断面積を S_A とし、流速を q_A とする。また点 B において、断面積を S_B とし、流速を q_B とする。さらに各点においてのポテンシャルエネルギーをそれぞれ U_A, U_B とする（図 2.3）。

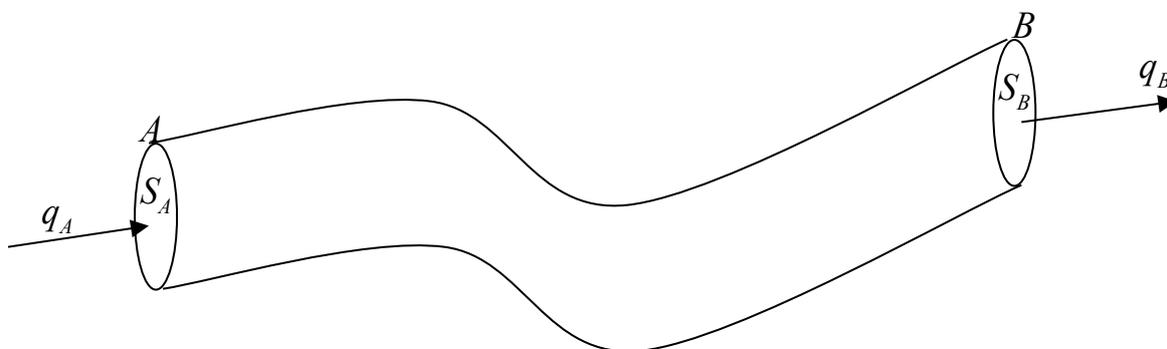


図 2.3

微小時間 Δt の間に断面 A を通るエネルギーは

$$\rho \left(\frac{1}{2} q_A^2 + U_A \right) q_A \Delta t S_A \quad (2.18)$$

で表され、断面 B についても同様に

$$\rho \left(\frac{1}{2} q_B^2 + U_B \right) q_B \Delta t S_B \quad (2.19)$$

と表される。運動エネルギーと位置エネルギーによる流管内のエネルギー流入と流出の差は、各断面に及ぼされる仕事による流管内のエネルギーの流入と流出の差と一致する必要がある。完全流体の場合、流体どうしの摩擦は考えなくてよいが、流体どうしが及ぼしあう力は接する面に垂直な成分の圧力を考える必要があった。つまり今回の場合、及ぼされる仕事とは各断面に垂直な成分の圧力である。

ここで、各点においての圧力をそれぞれ p_A, p_B とすると、断面 A に成される仕事 W_A は

$$W_A = p_A q_A \Delta t S_A \quad (2.20)$$

同様に断面 B に成される仕事 W_B は

$$W_B = p_B q_B \Delta t S_B \quad (2.21)$$

であるから、エネルギーの流入と流出の関係は(2.18) (2.19) (2.20) (2.21)式より

$$\rho \left(\frac{1}{2} q_B^2 + U_B \right) q_B \Delta t S_B - \rho \left(\frac{1}{2} q_A^2 + U_A \right) q_A \Delta t S_A = p_A q_A \Delta t S_A - p_B q_B \Delta t S_B \quad (2.22)$$

また、流管内に流入する質量と流出する質量は同じはずであるから

$$\rho q_A \Delta t S_A = \rho q_B \Delta t S_B \quad (2.23)$$

(2.23)式より(2.22)式は

$$\rho \left(\frac{1}{2} q_A^2 + U_A \right) + p_A = \rho \left(\frac{1}{2} q_B^2 + U_B \right) + p_B \quad (2.24)$$

よって(2.24)式より

$$\frac{1}{2} \rho q^2 + \rho U + p = (\text{一定}) \quad (2.25)$$

を導くことができ、これをベルヌーイの定理と呼ぶ。左辺の第1項は運動エネルギー、第2項は位置エネルギー、第3項は圧力に対する仕事を意味し、式はこれらの和が流れに沿って保存されることを意味する【戸田 1994】。

第3章 弾塑性体運動の記述

3.1 弾塑性体とは

力を加えると変形し、除荷すると元の寸法に戻る性質を弾性 (elasticity) という。原則的には固体に見られる性質である。弾性の性質を持つ物質を弾性体という。弾性体にはひずみが応力に比例するフックの法則が成り立つ。また、力を加えて変形させたとき、永久変形を生じる性質を塑性 (plasticity) といい、塑性の性質を持つ物質を塑性体という。

3.2 弾塑性体の運動

3.2.1 応力

(1) 応力の定義

応力とは物体 (連続体) の内部に生じる力の大きさや方向を現す物理量であり、連続体内部の微小面積に作用する単位面積あたりの力として定義される。この力の方向が面に垂直なとき垂直応力といい、面に平行なときせん断応力という。

連続体内部に直線 OP と、 OP に垂直で点 O を含む面積が ΔS の微小な平面を考える。

平面に関して点 P がある方向の面を正、反対側の面を負とする。平面の各点において面の一方側の物質はもう一方の物質に一定の力を及ぼしており、負の側の物質が正の側の物質に及ぼしている力の合力を ΔF とすると、応力 σ_{OP} は次の式で定義される (図 3.1) 【ジェーガー 1980】。

$$\sigma_{OP} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (3.2.1)$$

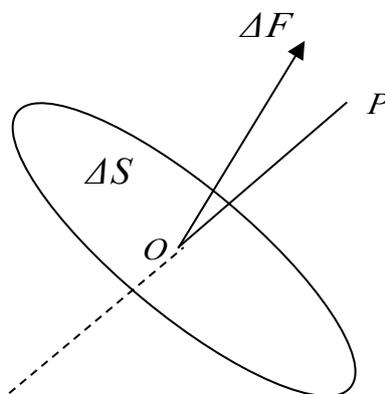


図 3.1

(2) 応力の成分表示

直交座標 $O-xyz$ を考える。 OP を x 方向にとると、平面 ΔS は yz 平面内にある。この面を通して及ぼす応力をベクトル P_x とすると、 P_x は x, y, z 成分

$$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz} \quad (3.2.2)$$

に分解できる。したがって、 σ_{xx} は垂直応力、 σ_{xy}, σ_{xz} はせん断応力と呼ばれる。

同様にして、平面 ΔS を xz 平面、 xy 平面に定義してできるベクトル σ_y, σ_z についても

$$\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz} \quad (3.2.3)$$

$$\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz} \quad (3.2.4)$$

に分解できる。また、力のモーメントが成り立つとすると

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \quad (3.2.5)$$

が成り立つため、応力は以下の6個の成分で考えることができる。

$$\left(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \right) \quad (3.2.6)$$

【ジェーガー 1980】

(3) 応力成分の直交座標

直交座標 $O-xyz$ に関して、点 O 近傍で任意の方向に傾く面積が ΔS である $\triangle ABC$ を考える。ここで、頂点 A は x 軸上、頂点 B は y 軸上、頂点 C は z 軸上に定義する。この $\triangle ABC$ 上のある点における力成分 (P_x, P_y, P_z) と直交座標 $O-xyz$ に関する応力成分 $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz})$ の関係を調べる (図 3.2)。

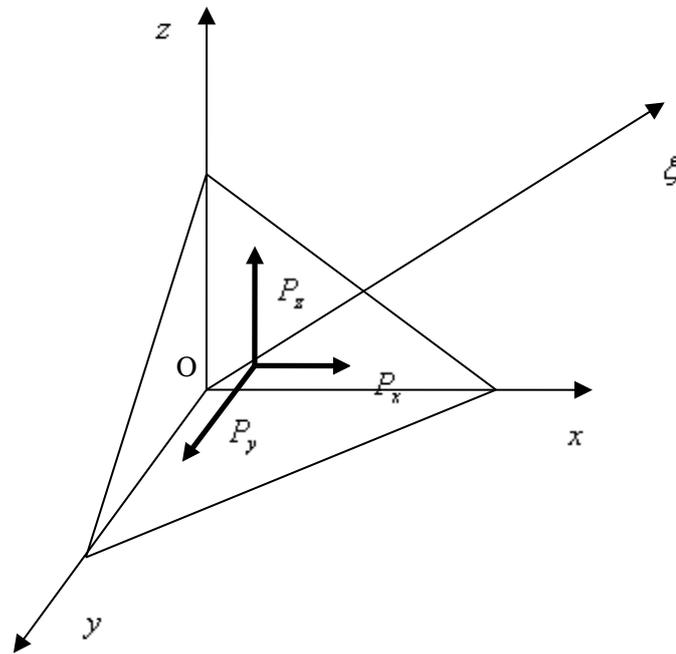


図 3.2

点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線を ζ 軸とし、 ζ 軸の x, y, z 軸に対する方向余弦を l_1, m_1, n_1 とすると、 $\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$ の面積は次のように表せる。

$$\triangle OBC = l_1 \Delta S$$

$$\triangle OCA = m_1 \Delta S$$

$$\triangle OAB = n_1 \Delta S \tag{3.2.7}$$

立体 $O-ABC$ の各面にはたらく x 方向の力はそれぞれ

$$\triangle ABC: P_x \Delta S$$

$$\triangle OBC: \sigma_{xx} l_1 \Delta S$$

$$\triangle OCA: \sigma_{xy} m_1 \Delta S$$

$$\triangle OAB: \sigma_{zx} n_1 \Delta S = \sigma_{zx} n_1 \Delta S \tag{3.2.8}$$

と書けるので、 x 方向の力のつりあいの式を立てると

$$P_x \Delta S = \sigma_{xx} l_1 \Delta S + \sigma_{xy} m_1 \Delta S + \sigma_{zx} n_1 \Delta S$$

$$P_x = \sigma_{xx} l_1 + \sigma_{xy} m_1 + \sigma_{zx} n_1$$

となる。 y, z 方向についても同様に考えると次式が得られる。

$$P_y = \sigma_{xy} l_1 + \sigma_{yy} m_1 + \sigma_{yz} n_1$$

$$P_z = \sigma_{zx} l_1 + \sigma_{yz} m_1 + \sigma_{zz} n_1 \quad (3.2.9)$$

上式は点 O を通る任意方向 l_1, m_1, n_1 の面上の応力成分が、6個の成分 $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$ のみで表されていることを示している。これらの成分を1点 O での応力成分という。

次に、 $\triangle ABC$ 上に任意の直交軸 η, ζ を考え、 $O' - \xi\eta\zeta$ に関する応力成分の表示式を求める。ここで、 η, ζ 軸はともに ξ 軸と直交している。 η 軸の x, y, z 軸に対する方向余弦を l_2, m_2, n_2 とし、 ζ 軸の x, y, z 軸に対する方向余弦を l_3, m_3, n_3 とする (表 3.1)。

表 3.1 座標系 $O - xyz$ と $O' - \xi\eta\zeta$ に関する方向余弦

	x	y	z
ξ	l_1	m_1	n_1
η	l_2	m_2	n_2
ζ	l_3	m_3	n_3

まず ξ 軸について考える。 x, y, z 軸方向の応力 (P_x, P_y, P_z) と ξ 軸方向の応力 $(\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\xi\eta}, \sigma_{\xi\zeta})$ の関係は

$$\sigma_{\xi\xi} = P_x l_1 + P_y m_1 + P_z n_1$$

$$\sigma_{\xi\eta} = P_x l_2 + P_y m_2 + P_z n_2$$

$$\sigma_{\xi\zeta} = P_x l_3 + P_y m_3 + P_z n_3 \quad (3.2.10)$$

となる。(3.2.10)式に(3.2.9)式を代入すると

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi\xi} &= \sigma_{xx} l_1^2 + \sigma_{yy} m_1^2 + \sigma_{zz} n_1^2 + 2\sigma_{xy} l_1 m_1 + 2\sigma_{yz} m_1 n_1 + 2\sigma_{zx} n_1 l_1 \\
\sigma_{\xi\eta} &= \sigma_{xx} l_1 l_2 + \sigma_{yy} m_1 m_2 + \sigma_{zz} n_1 n_2 \\
&\quad + \sigma_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \sigma_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \sigma_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1) \\
\sigma_{\xi\zeta} &= \sigma_{xx} l_1 l_3 + \sigma_{yy} m_1 m_3 + \sigma_{zz} n_1 n_3 \\
&\quad + \sigma_{xy} (l_1 m_3 + l_3 m_1) + \sigma_{yz} (m_1 n_3 + m_3 n_1) + \sigma_{zx} (n_1 l_3 + n_3 l_1)
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

が得られる。 η, ζ 軸についても同様に考えると

$$\begin{aligned}
\sigma_{\eta\xi} &= \sigma_{xx} l_2 l_1 + \sigma_{yy} m_2 m_1 + \sigma_{zz} n_2 n_1 \\
&\quad + \sigma_{xy} (l_2 m_1 + l_1 m_2) + \sigma_{yz} (m_2 n_1 + m_1 n_2) + \sigma_{zx} (n_2 l_1 + n_1 l_2) \\
\sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{xx} l_2^2 + \sigma_{yy} m_2^2 + \sigma_{zz} n_2^2 + 2\sigma_{xy} l_2 m_2 + 2\sigma_{yz} m_2 n_2 + 2\sigma_{zx} n_2 l_2 \\
\sigma_{\eta\zeta} &= \sigma_{xx} l_2 l_3 + \sigma_{yy} m_2 m_3 + \sigma_{zz} n_2 n_3 \\
&\quad + \sigma_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \sigma_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2) + \sigma_{zx} (n_2 l_3 + n_3 l_2) \\
\sigma_{\zeta\xi} &= \sigma_{xx} l_3 l_1 + \sigma_{yy} m_3 m_1 + \sigma_{zz} n_3 n_1 \\
&\quad + \sigma_{xy} (l_3 m_1 + l_1 m_3) + \sigma_{yz} (m_3 n_1 + m_1 n_3) + \sigma_{zx} (n_3 l_1 + n_1 l_3) \\
\sigma_{\zeta\eta} &= \sigma_{xx} l_3 l_2 + \sigma_{yy} m_3 m_2 + \sigma_{zz} n_3 n_2 \\
&\quad + \sigma_{xy} (l_3 m_2 + l_2 m_3) + \sigma_{yz} (m_3 n_2 + m_2 n_3) + \sigma_{zx} (n_3 l_2 + n_2 l_3) \\
\sigma_{\zeta\zeta} &= \sigma_{xx} l_3^2 + \sigma_{yy} m_3^2 + \sigma_{zz} n_3^2 + 2\sigma_{xy} l_3 m_3 + 2\sigma_{yz} m_3 n_3 + 2\sigma_{zx} n_3 l_3
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

が得られる。これらより

$$\sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\xi}, \sigma_{\eta\zeta} = \sigma_{\zeta\eta}, \sigma_{\zeta\xi} = \sigma_{\xi\zeta} \tag{3.2.14}$$

がいえる。よって $O' - \xi\eta\zeta$ についても6個の成分 $(\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\zeta\zeta}, \sigma_{\xi\eta}, \sigma_{\eta\zeta}, \sigma_{\zeta\xi})$ で応力が表される。直交座標に対してこのような式で規定される量をテンソルという【山口1975】。

3.2.2 ひずみ

(1) 変位

空間内の直交座標系 $O-xyz$ に固定された物体内の任意の一点 $A(x, y, z)$ を考える。

この物体が外力の作用によって、点 $A(x, y, z)$ が点 $A'(x', y', z')$ に移ったとき、次の式で与えられる u, v, w を点 A の A から A' への変位という。

$$u = x' - x, v = y' - y, w = z' - z \quad (3.2.15)$$

一般に変位は剛体変位と変形変位に分類することができる。また、剛体変位はさらに並進変位と回転変位に分けられ、それぞれ次のような意味がある【国尾 1977】。

剛体変位・・・物体の各点が相対位置を変えないことなく（変形することなく）移動することに対応する変位。

並進変位・・・平行移動に対応する変位（図 3.3）。

回転変位・・・回転移動に対応する変位（図 3.4）。

変形変位・・・大きさや形状の変化によってもたらされる変位（図 3.5）。

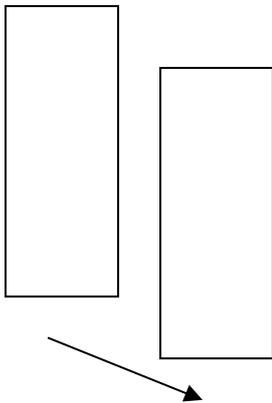


図 3.3

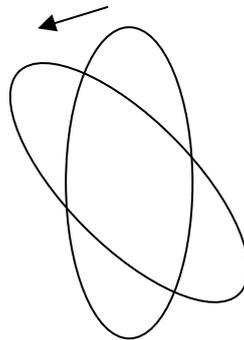


図 3.4

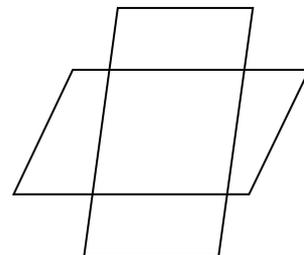


図 3.5

(2) 垂直ひずみの定義

断面積が一樣で長さ l の棒 AB と原点 O を x 軸に固定する。ここで A, B の位置をそれぞれ x_A, x_B と表すことにする（図 3.6）。このとき $l = x_B - x_A$ である。次にこの棒に x 軸方向の力 P を与えて A が A' に、 B が B' に移動したとすれば、移動後の棒の長さは $l' = x_{B'} - x_{A'}$ になる。ここで A, B の変位はそれぞれ $u_A = x_{A'} - x_A, u_B = x_{B'} - x_B$ であるから、棒の変形量 $\Delta l = l' - l$ は u_A, u_B を用いて次のように表される。

$$\Delta l = l' - l = (x_{B'} - x_{A'}) - (x_B - x_A) = (x_{B'} - x_B) - (x_{A'} - x_A) = u_B - u_A \quad (3.2.16)$$

伸び程度を表すためには Δl の大きさを単に比較するだけではなく、基準となる量に対する変形量、すなわち相対変位量を用いなければならない。これをひずみといい、 ε で表す。上の例では、ひずみは次のように表される。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{u_B - u_A}{x_B - x_A} \quad (3.2.17)$$

ε の右下の添字は、前が相対変位の方角で、後が基準量の方角を意味する。

$\varepsilon_{xx} > 0$ のときを引っ張りひずみといい、 $\varepsilon_{xx} < 0$ のときを圧縮ひずみという。これらを総称して垂直ひずみという【国尾 1977】。

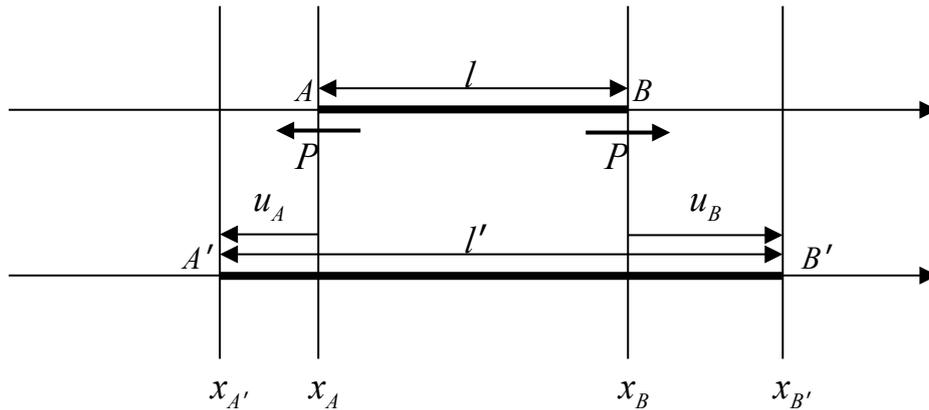


図 3.6

(3)せん断ひずみの定義

垂直ひずみとは異なるもうひとつのひずみを定義するため直交座標系 $O-xyz$ に直方体 $ABCD$ を考え、上下面にせん断力 F を作用させる。このときの変形状態を $A'B'C'D'$ とする。ここで二次座標系 $O-xy$ に視点を移し、点 A, B の座標をそれぞれ $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ とし、変形後の点 A', B' の座標をそれぞれ $A'(x_{A'}, y_{A'}), B'(x_{B'}, y_{B'})$ とすると (図 3.7)、点 A, B はそれぞれ

$u_A = x_{A'} - x_A, u_B = x_{B'} - x_B$ だけ x 方向に変位したことになるので、上下面のずれは

$$\Delta\lambda = (x_{B'} - x_B) - (x_{A'} - x_A) = u_B - u_A \quad (3.2.18)$$

となる。ひずみの定義に従えば

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\Delta\lambda}{l} = \frac{u_B - u_A}{y_B - y_A} \quad (3.2.19)$$

垂直ひずみ同様、 ε の右下の添字は前が相対変位の方で後が基準量の方を意味する。

このようなひずみをせん断ひずみという【国尾 1977】。

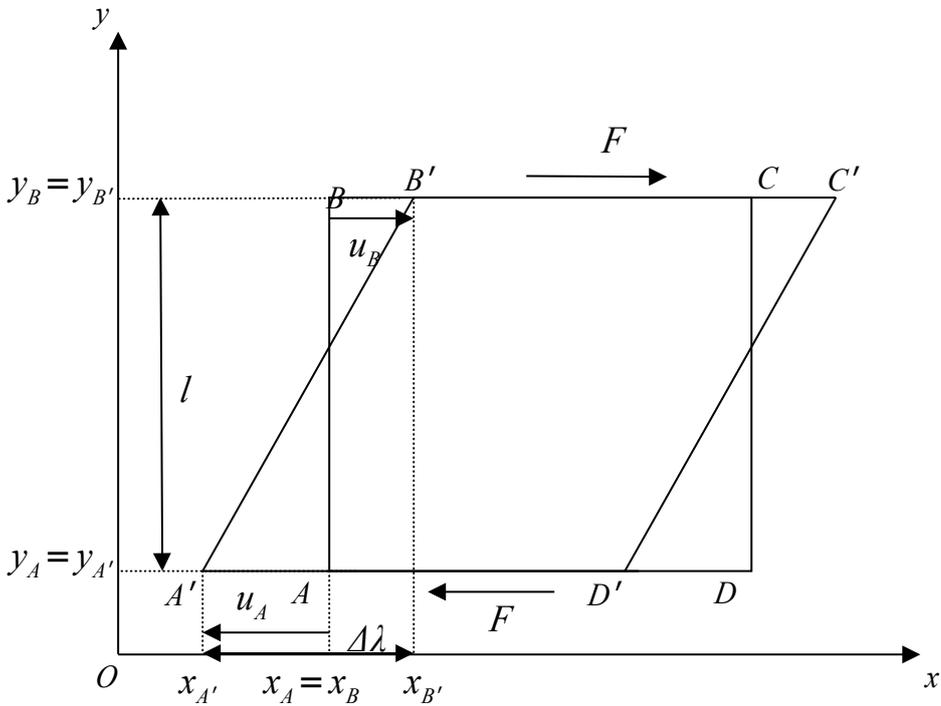


図 3.7

(4) ひずみ成分の直交座標

変形変位を考えるには変位の中から剛体変位（並進変位と回転変位）を取り除かなければならない。並進変位を取り除くには物体内に設定した一点の他にもう一点を設定し、二点の相対変位を考えればよい。回転変位は扱いが困難なため、後に述べることとし、ここでは無視して考える。また回転変位を無視するために微小な空間内で話を進める。

空間内の直交座標系 $O-xyz$ に物体内の 2 点

$A: \vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A), B: \vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$ を固定する。この二点の変位

$\vec{u}_A = (u_A, v_A, w_A), \vec{u}_B = (u_B, v_B, w_B)$ によって A', B' に移ったとする (図 3.8)。

これらを整理すると以下のようになる。

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A), \overrightarrow{OB} = \vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B) \quad (3.2.20)$$

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u}_A = (u_A, v_A, w_A), \overrightarrow{BB'} = \vec{u}_B = (u_B, v_B, w_B) \quad (3.2.21)$$

$$\overrightarrow{OA'} = \vec{r}_A + \vec{u}_A, \overrightarrow{OB'} = \vec{r}_B + \vec{u}_B \quad (3.2.22)$$

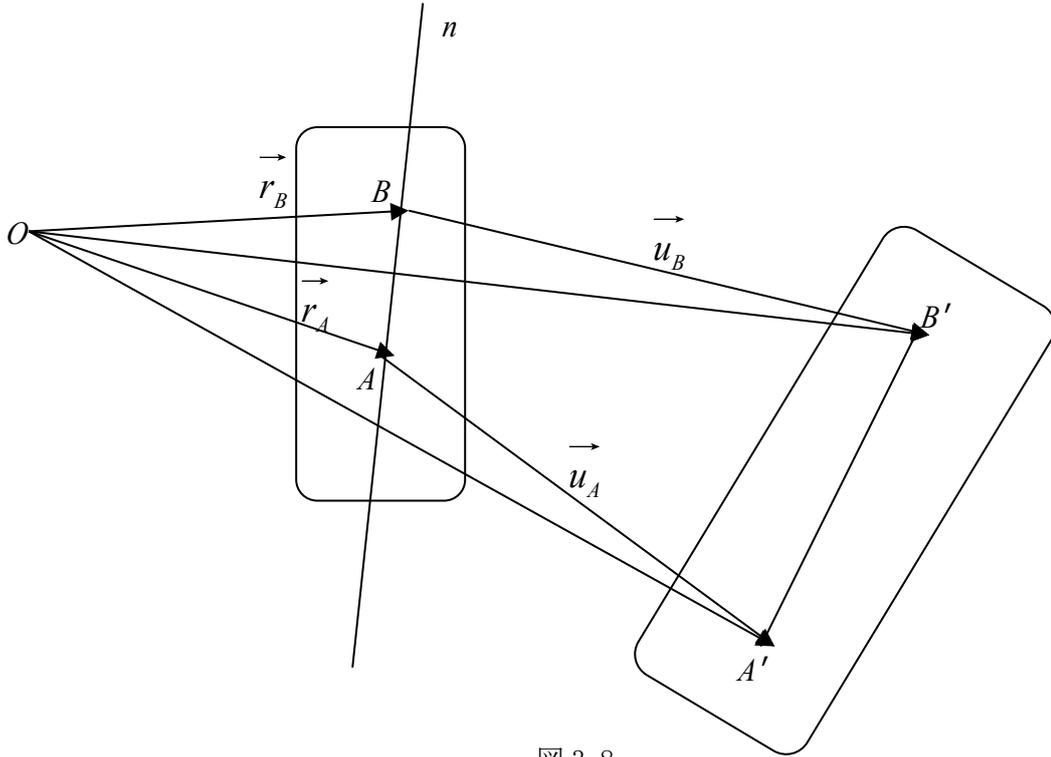


図 3.8

x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ とすると (3.2.20) (3.2.21) 式は

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A = x_A \vec{e}_x + y_A \vec{e}_y + z_A \vec{e}_z, \overrightarrow{OB} = \vec{r}_B = x_B \vec{e}_x + y_B \vec{e}_y + z_B \vec{e}_z \quad (3.2.23)$$

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u}_A = u_A \vec{e}_x + v_A \vec{e}_y + w_A \vec{e}_z, \overrightarrow{BB'} = \vec{u}_B = u_B \vec{e}_x + v_B \vec{e}_y + w_B \vec{e}_z \quad (3.2.24)$$

と書ける。ここで以下のように $\Delta \vec{r}$ を定義する。

$$\overrightarrow{AB} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

(3.2.20) 式より

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \quad (3.2.25)$$

となる。ここで

$$\Delta x = x_B - x_A, \Delta y = y_B - y_A, \Delta z = z_B - z_A \quad (3.2.26)$$

とおくと (3.2.25) 式は

$$\vec{\Delta r} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z \quad (3.2.27)$$

と書ける。 AB 方向を n 方向と定めると、 n 方向の単位ベクトル \vec{e}_n は

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{\Delta r}}{|\vec{\Delta r}|} = \frac{\Delta x \vec{e}_x}{|\vec{\Delta r}|} + \frac{\Delta y \vec{e}_y}{|\vec{\Delta r}|} + \frac{\Delta z \vec{e}_z}{|\vec{\Delta r}|} = v_{nx} \vec{e}_x + v_{ny} \vec{e}_y + v_{nz} \vec{e}_z \quad (3.2.28)$$

となり、以下のように v を定義する。

$$v_{nx} = \frac{\Delta x}{|\vec{\Delta r}|}, v_{ny} = \frac{\Delta y}{|\vec{\Delta r}|}, v_{nz} = \frac{\Delta z}{|\vec{\Delta r}|} \quad (3.2.29)$$

$$v_{mi} = \frac{\Delta x_i}{|\vec{\Delta r}|} \quad (i = x, y, z) \quad (3.2.30)$$

(3.2.30) 式は (3.2.29) 式を簡略化したもので

$$x_x = x, x_y = y, x_z = z \quad (3.2.31)$$

である。同様に

$$u_x = u, u_y = v, u_z = w \quad (3.2.32)$$

とする。

次に BB' を平行移動し、点 B を点 A に重ね、 $\vec{\Delta u}$ を次式で定義する。

$$\vec{\Delta u} = \vec{u}_B - \vec{u}_A \quad (3.2.33)$$

$\vec{\Delta u}$ は x, y, z の関数であるから

$$\vec{\Delta u} = \vec{u}_B - \vec{u}_A = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \Delta z + (\text{二次以上の項}) \quad (3.2.34)$$

と書ける。ここでは微小な範囲で議論しているため (二次以上の項) は無視できるから

$$\vec{\Delta u} = \vec{u}_B - \vec{u}_A = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \Delta z \quad (3.2.35)$$

である。(3.2.35) 式を各成分に分解して書けば

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial v}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (i=x,y,z)\end{aligned}\tag{3.2.36}$$

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial w}{\partial x_i} \Delta x_i$$

これらをさらに簡略化すると

$$\Delta u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (i,j=x,y,z)\tag{3.2.37}$$

と書ける。また、 $\partial u_j / \partial x_i$ を変位こう配という。

(3.2.35)式の両辺を $|\Delta \vec{r}|$ で割ると

$$\frac{\Delta \vec{u}}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{\Delta x}{|\Delta \vec{r}|} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{\Delta y}{|\Delta \vec{r}|} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{\Delta z}{|\Delta \vec{r}|}\tag{3.2.38}$$

となるから、(3.2.29)式より

$$\frac{\Delta \vec{u}}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} v_{nx} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} v_{ny} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} v_{nz} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} v_{ni} \quad (i=x,y,z)\tag{3.2.39}$$

となり、(3.2.36)式を用いて分解すると

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \vec{u}}{|\Delta \vec{r}|} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} v_{nx} + \frac{\partial u}{\partial y} v_{ny} + \frac{\partial u}{\partial z} v_{nz} \right) \vec{e}_x \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} v_{nx} + \frac{\partial v}{\partial y} v_{ny} + \frac{\partial v}{\partial z} v_{nz} \right) \vec{e}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} v_{nx} + \frac{\partial w}{\partial y} v_{ny} + \frac{\partial w}{\partial z} v_{nz} \right) \vec{e}_z \\ &\equiv \frac{\partial u}{\partial x_i} v_{ni} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial x_i} v_{ni} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial x_i} v_{ni} \vec{e}_z \quad (i=x,y,z)\end{aligned}\tag{3.2.40}$$

また、さらに簡略化して以下のような記述も出来る。

$$\frac{\Delta \vec{u}_j}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_{ni} \quad (i, j = x, y, z) \quad (3.2.41)$$

次に $\overrightarrow{AB'}$ を平行移動し、点 A' を点 A に重ね (3.2.22) 式より $\Delta \vec{r}'$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} &= \Delta \vec{r}' = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} \\ &= (\vec{r}_B + \vec{u}_B) - (\vec{r}_A + \vec{u}_A) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) + (\vec{u}_B - \vec{u}_A) = \Delta \vec{r} + \Delta \vec{u} \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

(3.2.42) 式より以下が成り立つ。

$$|\Delta \vec{r}'|^2 = \Delta \vec{r}' \cdot \Delta \vec{r}' = (\Delta \vec{r} + \Delta \vec{u}) \cdot (\Delta \vec{r} + \Delta \vec{u}) \quad (3.2.43)$$

これより、次の2式を考える。

$$|\Delta \vec{r}'|^2 - |\Delta \vec{r}|^2 = (\Delta \vec{r}' + \Delta \vec{r}) \cdot (\Delta \vec{r}' - \Delta \vec{r}) \quad (3.2.44)$$

$$\begin{aligned} |\Delta \vec{r}'|^2 - |\Delta \vec{r}|^2 &= (\Delta \vec{r} + \Delta \vec{u}) \cdot (\Delta \vec{r} + \Delta \vec{u}) - \Delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{r} \\ &= 2\Delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{u} + \Delta \vec{u} \cdot \Delta \vec{u} \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

となる。ここで $\Delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{u}$ に比べて $\Delta \vec{u} \cdot \Delta \vec{u}$ は極めて小さく、 $|\Delta \vec{r}'| \approx |\Delta \vec{r}|$ とみてよいから (3.2.44) (3.2.45) 式は

$$\begin{aligned} 2|\Delta \vec{r}| \cdot (|\Delta \vec{r}'| - |\Delta \vec{r}|) &= 2\Delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{u} \\ &= 2(|\Delta \vec{r}| \vec{e}_n) \cdot \Delta \vec{u} \\ &= 2|\Delta \vec{r}| (\vec{e}_n \cdot \Delta \vec{u}) \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

すなわち

$$|\Delta \vec{r}'| - |\Delta \vec{r}| = \vec{e}_n \cdot \Delta \vec{u} \quad (3.2.47)$$

ひずみの定義より

$$\epsilon_{nn} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{|\Delta \vec{r}'| - |\Delta \vec{r}|}{|\Delta \vec{r}|} \quad (3.2.48)$$

(3.2.47) (3.2.28) (3.2.40) 式より (3.2.48) 式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{nn} &= \frac{|\Delta \vec{r}'| - |\Delta \vec{r}|}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{\vec{e}_n \cdot \Delta \vec{u}}{|\Delta \vec{r}|} \\ &= \left(v_{nx} \vec{e}_x + v_{ny} \vec{e}_y + v_{nz} \vec{e}_z \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v_{ni} \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial x_i} v_{ni} \vec{e}_y + \frac{\partial w}{\partial x_i} v_{ni} \vec{e}_z \right) \quad (i=x,y,z)\end{aligned}\quad (3.2.49)$$

ここで

$$|\vec{e}_x|^2 = 1, |\vec{e}_y|^2 = 1, |\vec{e}_z|^2 = 1 \quad (3.2.50)$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0, \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0, \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0 \quad (3.2.51)$$

であることに注意して、(3.2.49)式を展開すると

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v_{nx} v_{ni} + \frac{\partial v}{\partial x_i} v_{ny} v_{ni} + \frac{\partial w}{\partial x_i} v_{nz} v_{ni} \equiv \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_{nj} v_{ni} \quad (i,j=x,y,z) \quad (3.2.52)$$

となり、簡略化せず書けば

$$\begin{aligned}\varepsilon_{nn} &= \frac{\partial u}{\partial x} v_{nx}^2 + \frac{\partial v}{\partial y} v_{ny}^2 + \frac{\partial w}{\partial z} v_{nz}^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) v_{nx} v_{ny} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) v_{ny} v_{nz} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) v_{nz} v_{nx}\end{aligned}\quad (3.2.52)$$

である。

ここで変位勾配 $\partial u_j / \partial x_i$ を次のように定義する。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (i,j=x,y,z) \quad (3.2.53)$$

これを x, y, z, u, v, w を用いて書き表せば

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.2.54)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.2.55)$$

となり、ひずみは応力同様の6つの成分 $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx})$ で記述できることがわ

かる。これらの成分 ε_{ij} をひずみ成分といい、 $i=j$ のひずみ成分 ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$) を垂直ひずみ成分、 $i \neq j$ のひずみ成分 ($\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$) をせん断ひずみ成分という。

(3.2.54) (3.2.55)式を用いれば(3.2.52)式は

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{nn} &= \varepsilon_{xx} v_{nx}^2 + \varepsilon_{yy} v_{ny}^2 + \varepsilon_{zz} v_{nz}^2 + 2\varepsilon_{xy} v_{nx} v_{ny} + 2\varepsilon_{yz} v_{ny} v_{nz} + 2\varepsilon_{zx} v_{nz} v_{nx} \\
&= \varepsilon_{xx} v_{nx}^2 + \varepsilon_{yy} v_{ny}^2 + \varepsilon_{zz} v_{nz}^2 \\
&\quad + (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) v_{nx} v_{ny} + (\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy}) v_{ny} v_{nz} + (\varepsilon_{zx} + \varepsilon_{xz}) v_{nz} v_{nx} \\
&= \varepsilon_{ij} v_{ni} v_{nj} \quad (i, j = x, y, z)
\end{aligned} \tag{3.2.56}$$

以下応力と同様の議論により $O' - \xi\eta\zeta$ に関するひずみ成分の表示式が導出される【国尾1977】。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\xi\xi} &= \varepsilon_{xx} l_1^2 + \varepsilon_{yy} m_1^2 + \varepsilon_{zz} n_1^2 + 2\varepsilon_{xy} l_1 m_1 + 2\varepsilon_{yz} m_1 n_1 + 2\varepsilon_{zx} n_1 l_1 \\
\varepsilon_{\xi\eta} &= \varepsilon_{xx} l_1 l_2 + \varepsilon_{yy} m_1 m_2 + \varepsilon_{zz} n_1 n_2 \\
&\quad + \varepsilon_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \varepsilon_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \varepsilon_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1) \\
\varepsilon_{\xi\eta} &= \varepsilon_{xx} l_1 l_3 + \varepsilon_{yy} m_1 m_3 + \varepsilon_{zz} n_1 n_3 \\
&\quad + \varepsilon_{xy} (l_1 m_3 + l_3 m_1) + \varepsilon_{yz} (m_1 n_3 + m_3 n_1) + \varepsilon_{zx} (n_1 l_3 + n_3 l_1)
\end{aligned} \tag{3.2.57}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\eta\xi} &= \varepsilon_{xx} l_2 l_1 + \varepsilon_{yy} m_2 m_1 + \varepsilon_{zz} n_2 n_1 \\
&\quad + \varepsilon_{xy} (l_2 m_1 + l_1 m_2) + \varepsilon_{yz} (m_2 n_1 + m_1 n_2) + \varepsilon_{zx} (n_2 l_1 + n_1 l_2) \\
\varepsilon_{\eta\eta} &= \varepsilon_{xx} l_2^2 + \varepsilon_{yy} m_2^2 + \varepsilon_{zz} n_2^2 + 2\varepsilon_{xy} l_2 m_2 + 2\varepsilon_{yz} m_2 n_2 + 2\varepsilon_{zx} n_2 l_2 \\
\varepsilon_{\eta\xi} &= \varepsilon_{xx} l_2 l_3 + \varepsilon_{yy} m_2 m_3 + \varepsilon_{zz} n_2 n_3 \\
&\quad + \varepsilon_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \varepsilon_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2) + \varepsilon_{zx} (n_2 l_3 + n_3 l_2)
\end{aligned} \tag{3.2.58}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\xi\xi} &= \varepsilon_{xx} l_3 l_1 + \varepsilon_{yy} m_3 m_1 + \varepsilon_{zz} n_3 n_1 \\
&\quad + \varepsilon_{xy} (l_3 m_1 + l_1 m_3) + \varepsilon_{yz} (m_3 n_1 + m_1 n_3) + \varepsilon_{zx} (n_3 l_1 + n_1 l_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\xi\xi} &= \varepsilon_{xx} l_3 l_2 + \varepsilon_{yy} m_3 m_2 + \varepsilon_{zz} n_3 n_2 \\
&\quad + \varepsilon_{xy} (l_3 m_2 + l_2 m_3) + \varepsilon_{yz} (m_3 n_2 + m_2 n_3) + \varepsilon_{zx} (n_3 l_2 + n_2 l_3) \\
\varepsilon_{\zeta\zeta} &= \varepsilon_{xx} l_3^2 + \varepsilon_{yy} m_3^2 + \varepsilon_{zz} n_3^2 + 2\varepsilon_{xy} l_3 m_3 + 2\varepsilon_{yz} m_3 n_3 + 2\varepsilon_{zx} n_3 l_3
\end{aligned} \tag{3.2.59}$$

3.2.3 フックの法則

材料にかかる応力があまり大きくない場合、応力に比例してひずみが生じ、応力を $\mathbf{0}$ に戻せばひずみも消失する。フック(Hooke)は実験により軸応力に比例して軸方向にひずみが生じ、直角方向にも応力に比例した逆方向のひずみが生じることを発見した。つまり主応力成分を $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 、主ひずみ成分を $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ とする。

主応力とは軸をせん断応力が $\mathbf{0}$ となるように定義したときの垂直応力 3 成分である。せん断応力が $\mathbf{0}$ となるから、このときの垂直応力を

$$\sigma_{xx} = \sigma_1, \sigma_{yy} = \sigma_2, \sigma_{zz} = \sigma_3 \tag{3.2.60}$$

とおけば応力成分は

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{3.2.61}$$

と書け、一般には簡略化して

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \tag{3.2.62}$$

と表す。次に応力成分 $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$ が与えられたとき、これらを用いた主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ の記述を考える。座標系 $O' - \xi\eta\zeta$ をせん断応力が $\mathbf{0}$ となるようにとると、主応力成分のうちひとつは $\sigma_{\xi\xi}$ である。3.2 節で定義された P_x, P_y, P_z と $\sigma_{\xi\xi}$ の関係を表(3.1)の方向余弦を用いて表せば

$$P_x = \sigma_{\xi\xi} l_1$$

$$P_y = \sigma_{\xi\xi} m_1$$

$$P_z = \sigma_{\zeta\zeta} n_1 \quad (3.2.63)$$

であり、式(3.2.9)とあわせて恒等的にとらえると、

$$\sigma_{\zeta\zeta} l_1 = \sigma_{xx} l_1 + \sigma_{xy} m_1 + \sigma_{zx} n_1$$

$$\sigma_{\zeta\zeta} m_1 = \sigma_{xy} l_1 + \sigma_{yy} m_1 + \sigma_{yz} n_1$$

$$\sigma_{\zeta\zeta} n_1 = \sigma_{zx} l_1 + \sigma_{yz} m_1 + \sigma_{zz} n_1$$

(3.2.64)

すなわち

$$P_x = (\sigma_{xx} - \sigma_{\zeta\zeta}) l_1 + \sigma_{xy} m_1 + \sigma_{zx} n_1$$

$$P_y = \sigma_{xy} l_1 + (\sigma_{yy} - \sigma_{\zeta\zeta}) m_1 + \sigma_{yz} n_1$$

$$P_z = \sigma_{zx} l_1 + \sigma_{yz} m_1 + (\sigma_{zz} - \sigma_{\zeta\zeta}) n_1$$

(3.2.65)

(3.2.65)式を (l_1, m_1, n_1) の連立方程式とみれば、方向余弦の性質より (l_1, m_1, n_1) はこ

とごとく 0 とならないから、行列式の理論より

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{\zeta\zeta} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{\zeta\zeta} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_{\zeta\zeta} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2.66)$$

これを展開すれば

$$\sigma_{\zeta\zeta}^3 - I_1 \sigma_{\zeta\zeta}^2 + I_2 \sigma_{\zeta\zeta} - I_3 = 0 \quad (3.2.67)$$

ただし

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \equiv \sigma_{ii} \quad (i = x, y, z)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 \\ &\equiv \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) \quad (i, j = x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} \\
&= \det \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \equiv \det(\sigma_{ij}) \quad (i, j = x, y, z)
\end{aligned} \tag{3.2.68}$$

また、3次方程式(3.2.67)の解は $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ であるから

$$(\sigma_{\xi\xi} - \sigma_1)(\sigma_{\xi\xi} - \sigma_2)(\sigma_{\xi\xi} - \sigma_3) = 0 \tag{3.2.69}$$

の形になるはずである。式(3.2.69)を展開すると

$$\sigma_{\xi\xi}^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma_{\xi\xi}^2 + (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)\sigma_{\xi\xi} - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0 \tag{3.2.70}$$

となるから係数を比較すると

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
I_2 &= \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \\
I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3
\end{aligned} \tag{3.2.71}$$

ここで、主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ は軸の取り方によらない固有値なので I_1, I_2, I_3 も軸の取り方によらない不変量となる。この I_1, I_2, I_3 をそれぞれ一次不変量、二次不変量、三次不変量という。

主ひずみ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ も応力と同様に導くことができる。一次不変量、二次不変量、三次不変量 J_1, J_2, J_3 についてもそれぞれ

$$\begin{aligned}
J_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\
J_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1 \\
J_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3
\end{aligned} \tag{3.2.72}$$

となる【国尾 1977】。

フックの実験結果は σ_1 方向を軸方向とすれば

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (3.2.73)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 = -\nu\frac{\sigma_1}{E} \quad (3.2.74)$$

が成り立つことを意味する。ここで $1/E, \nu$ は比例定数であるが、 E をヤング(Young)

率、 ν をポアゾン(Poisson)比という

σ_2, σ_3 についても同様にして考えると

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} \quad (3.2.75)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 = -\nu\varepsilon_2 = -\nu\frac{\sigma_2}{E} \quad (3.2.76)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} \quad (3.2.77)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_3 = -\nu\frac{\sigma_3}{E} \quad (3.2.78)$$

(3.2.73)~(3.2.78)式より主ひずみ成分 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ は次のように表される。

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3}{E} \dots \textcircled{1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu\sigma_3 - \nu\sigma_1}{E} \dots \textcircled{2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2}{E} \dots \textcircled{3} \quad (3.2.79)$$

(3.2.79)式を解いて主応力成分 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を求めることを考える。

①②③の両辺に E を掛けて

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 \cdots \textcircled{4}$$

$$E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu\sigma_3 - \nu\sigma_1 \cdots \textcircled{5}$$

$$E\varepsilon_3 = \sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2 \cdots \textcircled{6}$$

④と⑤の差をとって σ_3 を消去すると

$$E(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (1 + \nu)\sigma_1 - (1 + \nu)\sigma_2 \cdots \textcircled{7}$$

⑥の両辺に ν を掛けて④に加えて σ_3 を消去すると

$$E(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3) = (1 - \nu^2)\sigma_1 - \nu(1 + \nu)\sigma_2 \cdots \textcircled{8}$$

⑦の両辺に ν を掛けて⑧との差をとることにより σ_2 を消去すると

$$E\{- (1 - \nu)\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_2 - \nu\varepsilon_3\} = (1 + \nu)(1 - 2\nu)\sigma_1 \cdots \textcircled{9}$$

⑨の左辺と右辺を交換し整理すると

$$(1 + \nu)(1 - 2\nu)\sigma_1 = \nu E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + E(1 - 2\nu)\varepsilon_1 \cdots \textcircled{10}$$

⑩の両辺を $(1 + \nu)(1 - 2\nu)$ で割って

$$\sigma_1 = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \frac{E}{(1 + \nu)}\varepsilon_1 \cdots \textcircled{11}$$

σ_2, σ_3 についても同様の演算を行えば

$$\sigma_2 = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \frac{E}{(1 + \nu)}\varepsilon_2 \cdots \textcircled{12}$$

$$\sigma_3 = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \frac{E}{(1 + \nu)}\varepsilon_3 \cdots \textcircled{13}$$

が得られる。ここで $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ とおき (ε を体積ひずみという)、⑪~⑬を1つの式にまとめると

$$\sigma_i = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\varepsilon + \frac{E}{(1 + \nu)}\varepsilon_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.2.80)$$

となる。

ここで新たに座標系 $O' - \xi\eta\zeta$ を考え、各軸においての方向余弦を表 3.1 のように設定すると、応力成分について (3.2.11) (3.2.12) (3.2.13) 式が成り立っていた。(3.2.11) (3.2.12) (3.2.13) 式のうち垂直応力成分について記述した3式で主応力成分 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ をそれぞれ x, y, z 方向に合わせれば

$$\sigma_{xx} = \sigma_1, \sigma_{yy} = \sigma_2, \sigma_{zz} = \sigma_3 \quad (3.2.81)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (3.2.82)$$

となるので(3.2.11)式の $\sigma_{\xi\xi}$ は

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 \quad (3.2.83)$$

と書ける。

(3.2.80) 式を(3.2.83)式に代入すると次の式が成り立つ。

$$\sigma_{\xi\xi} = (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon + \frac{E}{(1+\nu)} (\varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2) \quad (3.2.84)$$

方向余弦の性質である $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$ ($i=1,2,3$) より、 $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ であるから

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon + \frac{E}{(1+\nu)} (\varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2) \quad (3.2.85)$$

ひずみ成分について (3.2.56) (3.2.57) (3.2.58) 式が成り立っていた。主応力成分 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ をそれぞれ x, y, z 方向に合わせていたので、主ひずみ成分 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ もそれぞれ x, y, z 方向である。したがって (3.2.56) (3.2.57) (3.2.58) 式のうち垂直ひずみ成分について記述した3式において

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1, \varepsilon_{yy} = \varepsilon_2, \varepsilon_{zz} = \varepsilon_3 \quad (3.2.86)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (3.2.87)$$

となるから(3.2.56)式の $\varepsilon_{\xi\xi}$ は

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2 \quad (3.2.88)$$

である。体積ひずみ $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ は垂直ひずみの和で表せ

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (3.2.89)$$

または

$$\varepsilon = \varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} + \varepsilon_{\zeta\zeta} \quad (3.2.88)$$

と書ける。(3.2.80)式を(3.2.88)式に代入すれば

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} + \varepsilon_{\zeta\zeta}) + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\xi\xi}$$

同様に $\sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\zeta\zeta}$ も求めると

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} + \varepsilon_{\zeta\zeta}) + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\eta\eta} \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} + \varepsilon_{\zeta\zeta}) + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{aligned} \quad (3.2.89)$$

となる。

(3.2.89)式を $(\varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\eta\eta}, \varepsilon_{\zeta\zeta})$ について解くことを考えるが、これらの式は(3.2.80)式と同じ形であるため、その解は(3.2.79)式の形に求まる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{\sigma_{\xi\xi} - \nu\sigma_{\eta\eta} - \nu\sigma_{\zeta\zeta}}{E} \\ \varepsilon_{\eta\eta} &= \frac{\sigma_{\eta\eta} - \nu\sigma_{\xi\xi} - \nu\sigma_{\zeta\zeta}}{E} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{\sigma_{\zeta\zeta} - \nu\sigma_{\xi\xi} - \nu\sigma_{\eta\eta}}{E} \end{aligned} \quad (3.2.90)$$

(ξ, η, ζ) を (x, y, z) とおいて

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx}}{E} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} \end{aligned} \quad (3.2.91)$$

これによりフックの法則による垂直応力成分と垂直ひずみ成分の関係式が導かれた。

次にせん断応力成分とせん断ひずみ成分の関係式を導く。

式より式(3.2.11) (3.2.56)の $\sigma_{\xi\eta}$ と $\varepsilon_{\xi\eta}$ は

$$\sigma_{\xi\eta} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \quad (3.2.92)$$

$$\varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2 \quad (3.2.93)$$

となり、(3.2.92)式を(3.2.80)式に代入すると次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\eta} &= (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon \\ &+ \frac{E}{(1+\nu)} (\varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2) \end{aligned} \quad (3.2.94)$$

方向余弦の性質である方向余弦の性質である $l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$ よ

り、 $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ であるから

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{E}{(1+\nu)} (\varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2) \quad (3.2.95)$$

(3.2.93)式より

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{\xi\eta} \quad (3.2.96)$$

(ξ, η) を (x, y) とおいて

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy}$$

σ_{yz}, σ_{zx} も同様に求めると

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{zx} \quad (3.2.97)$$

よって $\mu = E/2(1+\nu)$ とおいてひずみ成分について解けば

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{2\mu} \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{\sigma_{zx}}{2\mu}\end{aligned}\tag{3.2.98}$$

となりフックの法則によるせん断応力成分とせん断ひずみ成分の関係式が導かれた。

$\lambda = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$ とおくと、(3.2.91) (3.2.98) 式はそれぞれ

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= \varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz}\end{aligned}\tag{3.2.99}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 2\mu\varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= 2\mu\varepsilon_{zx}\end{aligned}\tag{3.2.100}$$

となり、応力について解いた式が表される。 μ を剛性率、 λ をラメ定数と呼ぶ。これにより任意直交座標における応力成分とひずみ成分の関係を表すことができた【Turcotte and Schubert 2002】。

3.2.4 偏差応力

弾塑性体に応力を加えると、フックの法則に従いひずみが生じる。しかし、応力がある値を超えると弾塑性体は不可逆な変形を始め、フックの法則に従わなくなる。応力がこの値に到達する点を降伏点といい、この状態で応力成分が満たす条件を降伏条件という。降伏条件は物質によって異なる。弾塑性体にかかる応力のうち不変的にかかる力を静水圧といい、次のように定義される【吉田 1997】。

$$\begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}\tag{3.2.101}$$

ただし

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(\sigma_{\zeta\zeta} + \sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.2.102)$$

一般に静水圧は降伏に無関係であるから、応力から静水圧を取り除く。この物理量を偏差応力と定義する。つまり、偏差応力 S は

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.103)$$

と書ける。ここでクロネッカーのデルタ記号

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 (\alpha = \beta) \\ 0 (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (\alpha, \beta = x, y, z)$$

を用いると (3.2.103) 式は

$$S_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_m \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (3.2.104)$$

と表せ、(3.2.99) (3.2.100) 式は

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\lambda\varepsilon_{\gamma\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = x, y, z) \quad (3.2.105)$$

(3.2.102) 式は (3.2.99) 式より

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ &= \frac{1}{3}(3\lambda\varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu\varepsilon_{\gamma\gamma}) \quad (\gamma = x, y, z) \end{aligned} \quad (3.2.106)$$

(3.2.106) 式の両辺に $\delta_{\alpha\beta}$ を掛けて整理すると

$$\delta_{\alpha\beta} \sigma_m = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_{\gamma\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = x, y, z) \quad (3.2.107)$$

(3.2.105) 式から (3.2.107) 式を引けば

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\sigma_m &= 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\lambda\varepsilon_{\gamma\gamma} - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{\gamma\gamma} \\ &= 2\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) \quad (\alpha, \beta, \gamma = x, y, z)\end{aligned}\tag{3.2.108}$$

よって(3.2.104)式より

$$S_{\alpha\beta} = 2\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) \quad (\alpha, \beta, \gamma = x, y, z)\tag{3.2.109}$$

となり、偏差応力をひずみ成分で表すことができた。

3.2.5 降伏条件

3.2.4節で述べた降伏条件として主に使われるものが2つ知られている。

I トレスカ(Tresca)の降伏条件

降伏は最大せん断応力がある値に達したときに起こるという仮説。

II ミーゼス(Mises)の降伏条件

降伏は単位堆積あたりのせん断エネルギーがある値に達したときに起こるという仮説。

この研究ではミーゼス(Mises)の降伏条件を用いる。降伏関数は偏差応力と式(3.2.71)(3.2.72)および偏差応力の議論から導かれる不変量 K_1, K_2, K_3 の関数で表わさ

れる。ここで、 K_1, K_2, K_3 はそれぞれ次のように定義される【山口 1975】。

$$\begin{aligned}K_1 &= S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} \\ K_2 &= \frac{1}{2}S_{\alpha\beta}S_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}(S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2) + S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2 \\ K_3 &= \frac{1}{3}S_{\alpha\beta}S_{\beta\gamma}S_{\gamma\alpha} \quad (\alpha, \beta, \gamma = x, y, z)\end{aligned}\tag{3.2.110}$$

$K_1 = 0$ となるので、結果的に降伏関数は K_2, K_3 の関数となり

$$f(K_2, K_3) = 0\tag{3.2.111}$$

と表される。また、降伏応力を Y_S とすると、ミーゼス(Mises)の降伏条件は

$$K_2 > \frac{Ys}{\sqrt{3}} \quad (3.2.112)$$

となる。よって、降伏関数 f は

$$f = \min\left(\sqrt{\frac{Ys^2}{3K_2}}, 1\right) \quad (3.2.113)$$

と表される【Libersky and Petschek 1993】。したがって弾塑性体における偏差応力は

$$S_{\alpha\beta}' = fS_{\alpha\beta} \quad (3.2.114)$$

となる (図 3.9) 【Wingate and Fisher 1991】。

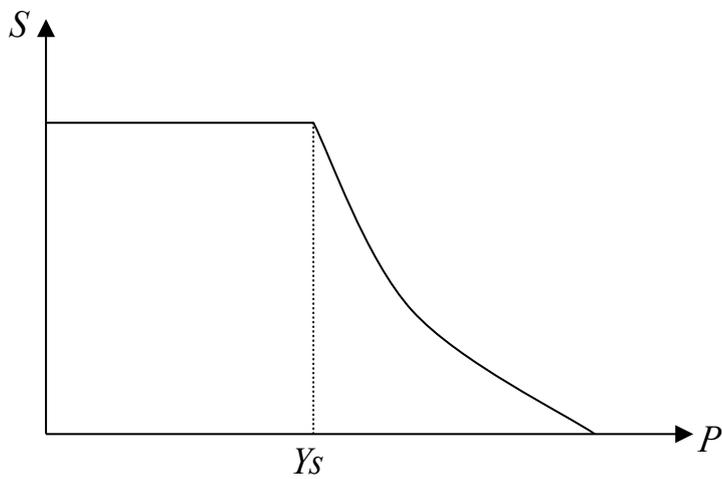


図 3.9

3.2.6 回転

時計まわりの物体要素の剛体変位を回転という。四角形 $OABC$ が $OA'B'C'$ の位置まで時計まわりに回転したとする。このときの回転変位成分 R は変位ベクトル

$\vec{u}=(u, v, w)$ の勾配 $\partial u_i / \partial x_j$ ($i, j=x, y, z$) を用いて次のように表される【吉田1997】。

$$R_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$R_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$R_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

簡略化して記述すると

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (i, j=x, y, z)$$

3.3 弾塑性体の運動方程式の適用

これまで述べてきた弾塑性体の運動についての関係式を第2章で述べた流体力学の保存則に適用することを考える。

3.3.1 運動量保存則

流体運動の基礎方程式を弾塑性体に適用させることを考える。まず、運動量保存則を記述した(2.17)式の圧力 P を応力 σ に置き換える。

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (3.3.1)$$

ここで、(3.2.105)式の応力を偏差応力 $S_{\alpha\beta}$ を用いて表すと

$$\sigma_{\alpha\beta} = -(P\delta_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta = x, y, z)$$

(3.3.2)式の $\sigma_{\alpha\beta}$ を(3.3.1)式に代入すると、弾塑性体運動における運動量保存の方程式が得られる【Wingate and Fisher 1991】。

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P\delta_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (3.3.3)$$

3次元直交座標系において、簡略化せずに記述すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial S_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

となる。これが弾塑性体力学の運動量保存の方程式である。

3.3.2 エネルギー保存則

運動量保存則と同様にして、流体のエネルギー保存則を記述した(2.25)式を弾塑性体に書きかえると

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} u_\beta \\
 &= \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \\
 &= -(P - S_{xx}) \frac{\partial u}{\partial x} - (P - S_{yy}) \frac{\partial v}{\partial y} - (P - S_{zz}) \frac{\partial w}{\partial z} \\
 &\quad + S_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + S_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + S_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 &= -P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + S_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + S_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + S_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \\
 &\quad + S_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + S_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + S_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

となる。これが弾塑性体のエネルギー保存の方程式である【Wingate and Fisher 1991】。

第4章 三次元流体力学的計算法 (SPH法)

4.1 SPH法

天文学において流体計算は必須である。流体計算には固定された点から流体を眺めるオイラー法と呼ばれるものと、流体と共に動きながら眺める（座標系そのものが動く）ラグランジュ法があり、三次元流体力学的計算法（SPH法：Smoothed Particle Hydrodynamics）は後者である。ラグランジュ法は流体を空間的に分割して観測するため、次元までの問題を考える場合には大変精度が良い。しかし、三次元空間で回転流体を記述する場合、格子点がねじれて計算が続行できなくなるという問題が生じる。SPH法では各素片が重なり合って、その集合体として流体を記述する【矢部 2000】。具体的には、物理量 $f(\mathbf{x})$ があるとして、そのものを利用するのではなく、平均化関数を用いて平均化してから利用する。平均化関数としては以下のようなガウス関数 W （正規分布）を用いることが多い。

$$W(\mathbf{x}, h) = \left(\frac{1}{\pi h^2} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{h^2} \right) \quad (4.1.1)$$

ガウス関数 W により平均化した関数を $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ とおくと

$$\text{離散的な場合} \quad \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{i=1}^n W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) f(\mathbf{x}_i) \quad (4.1.2)$$

$$\text{連続的な場合} \quad \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) f(\mathbf{x}') d\mathbf{x} \quad (4.1.3)$$

を用いる。ここで \mathbf{x}_i は i 番目の粒子の位置、 h_i は i 番目の粒子に対する平均化関数の広がりを表す。平均化関数 W は規格化のために次の条件を満たさなければならない。

$$\text{離散的な場合} \quad \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{i=1}^n W = 1 \quad (4.1.4)$$

$$\text{連続的な場合} \quad \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int W d\mathbf{x} = 1 \quad (4.1.5)$$

流体を N 個の流体素片に分割して物理量として密度 $\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle$ を表現すると

$$\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{i=1}^N W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) m \quad (4.1.6)$$

となる。ここで m は流体の質量であり、 \mathbf{x}_i は i 番目の流体の重心を表す。

一般の物理量の表現は、密度の場合と同様に重心の位置での物質質量でのみ記述される。よ

って粒子の個数密度だけの重みを持ってサンプルすることになるため、これを考慮すると

$$\langle \rho(x) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho(x_i)} W(x - x_i, h_i) f(x_i) \quad (4.1.7)$$

となる。 W は解析関数であるから、両辺を微分すると

$$\nabla \langle \rho(x) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho(x_i)} \nabla W(x - x_i, h_i) f(x_i) \quad (4.1.8)$$

となる【木村 2000】。

4.2 流体のSPH表記法

この節ではSPH法を第2章で述べた流体力学の基礎方程式に導入する。SPH法では運動を記述したい物体を分割するため、しばしば分割された各粒子に粒子番号をつけていくことになる。

4.2.1 運動量保存則のSPH表記法

外力がはたらかない場合、運動量保存の方程式である(2.17)式は次のようにまとめることができる。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.2.1)$$

と表せ、(4.2.1)式の右辺について次のように考える

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) &= \frac{(\nabla p)\rho - p(\nabla \rho)}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

これより

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{p}{\rho^2} \nabla \rho - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (4.2.3)$$

となる。(4.2.3)式を(4.2.1)式に代入して

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{p}{\rho^2} \nabla \rho - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (4.2.4)$$

となり、 j 番目の粒子に対して考えると

$$\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial t} = -\frac{p_j}{\rho_j^2} \nabla \rho_j - \nabla \left(\frac{p_j}{\rho_j} \right) \quad (4.2.5)$$

ここで、(4.1.8)式より、(4.2.5)式の右辺の各項はSPH法で次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{p_j}{\rho_j^2} \nabla \rho_j &= \frac{p_j}{\rho_j^2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i} \nabla W(x-x_i, h_i) \rho_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{p_j}{\rho_j^2} \nabla W(x-x_i, h_i) \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{p_j}{\rho_j} \right) &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i} \nabla W(x-x_i, h_i) \frac{p_i}{\rho_i} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{p_i}{\rho_i^2} \nabla W(x-x_i, h_i) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

(4.2.6)(4.2.7)式を(4.2.5)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^N m_i \frac{p_j}{\rho_j^2} \nabla W(x-x_i, h_i) - \sum_{i=1}^N m_i \frac{p_i}{\rho_i^2} \nabla W(x-x_i, h_i) \\ &= -\sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla W(x-x_i, h_i) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

となり、運動量保存の方程式がSPH法によって記述できた【Monaghan 1992】。

4.2.2 エネルギー保存則のSPH表記法

(2.25)式について、 U を u 、 q を \vec{v} となおして微分するとエネルギー保存の方程式は

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -p \nabla \vec{v} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{p}{\rho} \nabla \vec{v} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

と表せ、(4.2.9)式の右辺について次のように考える

$$\nabla(\rho \vec{v}) = (\nabla \rho) \vec{v} + \rho (\nabla \vec{v}) \quad (4.2.10)$$

これより

$$\rho (\nabla \vec{v}) = \nabla(\rho \vec{v}) - (\nabla \rho) \vec{v} \quad (4.2.11)$$

となる。(4.2.11)式を(4.2.9)式に代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{p}{\rho^2} \left\{ \nabla(\rho \vec{v}) - (\nabla \rho) \vec{v} \right\} \quad (4.2.12)$$

となり、 j 番目の粒子に対して考えると

$$\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} = -\frac{p_j}{\rho_j^2} \left\{ \nabla(\rho_j \vec{v}_j) - (\nabla \rho_j) \vec{v}_j \right\} \quad (4.2.13)$$

ここで、(4.1.8)式より、(4.2.13)式の右辺の各項はSPH法で次のように表される。

$$\begin{aligned} \nabla(\rho_j \vec{v}_j) &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i} \nabla W(x-x_i, h_i) \rho_i \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \nabla W(x-x_i, h_i) \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \rho_j) \vec{v}_j &= \vec{v}_j \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i} \nabla W(x-x_i, h_i) \rho_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_j \nabla W(x-x_i, h_i) \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

(4.2.14)(4.2.15)式を(4.2.13)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} &= -\frac{p_j}{\rho_j^2} \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \nabla W(x-x_i, h_i) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_j \nabla W(x-x_i, h_i) \right\} \\ &= -\frac{p_j}{\rho_j^2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \nabla W(x-x_i, h_i) \\ &= \frac{p_j}{\rho_j^2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \nabla W(x-x_i, h_i) \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

また、あらためて(4.2.9)式の右辺について考えると

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} \vec{v} \right) = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \vec{v} + \frac{p}{\rho} (\nabla \vec{v}) \quad (4.2.20)$$

これより

$$-\frac{p}{\rho} (\nabla \vec{v}) = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \vec{v} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \vec{v} \right) \quad (4.2.21)$$

となる。(4.2.21)式を(4.2.9)式に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\mathbf{p}}{\rho} \right)_{\mathbf{v}} - \nabla \left(\frac{\mathbf{p}}{\rho} \mathbf{v} \right) \quad (4.2.22)$$

となり、 j 番目の粒子に対して考えると

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\mathbf{p}_j}{\rho_j} \right)_{\mathbf{v}_j} - \nabla \left(\frac{\mathbf{p}_j}{\rho_j} \mathbf{v}_j \right) \quad (4.2.23)$$

ここで、(4.1.8)式より、(4.2.23)式の右辺の各項はSPH法で次のように表される。

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\mathbf{p}_j}{\rho_j} \right)_{\mathbf{v}_j} &= \mathbf{v}_j \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) \frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i^2} \mathbf{v}_j \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\mathbf{p}_j}{\rho_j} \mathbf{v}_j \right) &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) \frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i} \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i^2} \mathbf{v}_i \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

(4.2.24) (4.2.25)式を(4.2.23)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i^2} \mathbf{v}_j \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) - \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i^2} \mathbf{v}_i \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i^2} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

ここで(4.2.16)式と(4.2.26)式の平均をとると次式が得られる。

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\mathbf{p}_j}{\rho_j^2} + \frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i^2} \right) (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h_i) \quad (4.2.27)$$

となり、エネルギー保存の方程式がSPH法によって記述できた【Monaghan 1992】。

4.3 弾塑性体のSPH表記法

前節で流体力学にSPH法を適用したのと同様に、今度は第3章で述べた弾塑性体の方程式にもSPH法を導入する。運動量保存則とエネルギー保存則については第2章で述べたものではなく、第3章で弾塑性体に適応したものをを用いて再度導入し直すことにする。

4.3.1 運動量保存則のSPH表記法

(3.3.4)式より、弾塑性体力学の運動量保存の方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

である。これらをSPHの基本式(4.1.6)に代入すると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_j}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N m_i \left\{ - \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} + Q_{ij} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{S_{xyj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{xji}}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} + \left(\frac{S_{xyj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{xyi}}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} + \left(\frac{S_{zxy}}{\rho_j^2} + \frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i W' \left\{ - \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} + Q_{ij} \right) (x_j - x_i) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{S_{xyj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{xji}}{\rho_i^2} \right) (x_j - x_i) + \left(\frac{S_{xyj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{xyi}}{\rho_i^2} \right) (y_j - y_i) + \left(\frac{S_{zxy}}{\rho_j^2} + \frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} \right) (z_j - z_i) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_j}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N m_i \left\{ - \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} + Q_{ij} \right) \frac{\partial W}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{S_{yyj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{yyi}}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} + \left(\frac{S_{yzj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{yzi}}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial z} + \left(\frac{S_{xyj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{xyi}}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N m_i W' \left\{ - \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} + Q_{ij} \right) (y_j - y_i) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{S_{yyj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{yyi}}{\rho_i^2} \right) (y_j - y_i) + \left(\frac{S_{yzj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{yzi}}{\rho_i^2} \right) (z_j - z_i) + \left(\frac{S_{xyj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{xyi}}{\rho_i^2} \right) (x_j - x_i) \right\} \\
\frac{\partial w_j}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N m_i \left\{ - \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} + Q_{ij} \right) \frac{\partial W}{\partial z} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{S_{zzj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{zzi}}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial z} + \left(\frac{S_{zxy}}{\rho_j^2} + \frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} + \left(\frac{S_{yzj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{yzi}}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N m_i W' \left\{ - \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} + Q_{ij} \right) (z_j - z_i) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{S_{zzj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{zzi}}{\rho_i^2} \right) (z_j - z_i) + \left(\frac{S_{zxy}}{\rho_j^2} + \frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} \right) (x_j - x_i) + \left(\frac{S_{yzj}}{\rho_j^2} + \frac{S_{yzi}}{\rho_i^2} \right) (y_j - y_i) \right\}
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

平均化関数としては先に述べたようなガウス関数を用い、 W' を次のように定義した。

$$W' = -\frac{2}{h^2} W \tag{4.3.3}$$

これが弾塑性体の運動量保存の方程式のSPH表記法である。 Q は人口粘性項であり、次のように表される【Wingate and Fisher 1991】。

$$Q_{ij} = \frac{2}{\rho_j + \rho_i} \left(2\omega^2 - \frac{C_i + C_j}{2} \omega \right) \tag{4.3.4}$$

ただし

$$\omega = \frac{h(u_{ij}x_{ij} + v_{ij}y_{ij} + w_{ij}z_{ij})}{x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} + 0.01h^2} \quad C : \text{音速} \tag{4.3.5}$$

4.3.2 ひずみ

(3.2.54) (3.2.55)式よりひずみは次のように表せた。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.3.6)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.3.7)$$

これらを(4.1.6)式に代入してSPH法で表すと

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_j} (u_j - u_i) \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i W'}{\rho_j} (u_j - u_i) (x_j - x_i) \\ \dot{\varepsilon}_{yy} &= \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_j} (v_j - v_i) \frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i W'}{\rho_j} (v_j - v_i) (y_j - y_i) \\ \dot{\varepsilon}_{zz} &= \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_j} (w_j - w_i) \frac{\partial W}{\partial z} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i W'}{\rho_j} (w_j - w_i) (z_j - z_i) \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_j} \left\{ (u_j - u_i) \frac{\partial W}{\partial y} + (v_j - v_i) \frac{\partial W}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i W'}{\rho_j} \left\{ (u_j - u_i) (y_j - y_i) + (v_j - v_i) (x_j - x_i) \right\} \\ \dot{\varepsilon}_{yz} &= \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_j} \left\{ (v_j - v_i) \frac{\partial W}{\partial z} + (w_j - w_i) \frac{\partial W}{\partial y} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i W'}{\rho_j} \left\{ (v_j - v_i) (z_j - z_i) + (w_j - w_i) (y_j - y_i) \right\} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} &= \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_j} \left\{ (w_j - w_i) \frac{\partial W}{\partial x} + (u_j - u_i) \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i W'}{\rho_j} \left\{ (w_j - w_i) (x_j - x_i) + (u_j - u_i) (z_j - z_i) \right\} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

となる。これがひずみのSPH表記である【Wingate and Fisher 1991】。

4.3.3 回転

(3.2.115)式より回転は

$$\begin{aligned}
 R_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 R_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 R_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

である。これらを(4.1.6)式に代入してSPH法で表すと

$$\begin{aligned}
 \dot{R}_{xy} &= \frac{\partial R_{xy}}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_j} \left\{ (u_j - u_i) \frac{\partial W}{\partial y} - (v_j - v_i) \frac{\partial W}{\partial x} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i W'}{\rho_j} \left\{ (u_j - u_i)(y_j - y_i) - (v_j - v_i)(x_j - x_i) \right\} \\
 \dot{R}_{yz} &= \frac{\partial R_{yz}}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_j} \left\{ (v_j - v_i) \frac{\partial W}{\partial z} - (w_j - w_i) \frac{\partial W}{\partial y} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i W'}{\rho_j} \left\{ (v_j - v_i)(z_j - z_i) - (w_j - w_i)(y_j - y_i) \right\} \\
 \dot{R}_{zx} &= \frac{\partial R_{zx}}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_j} \left\{ (w_j - w_i) \frac{\partial W}{\partial x} - (u_j - u_i) \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i W'}{\rho_j} \left\{ (w_j - w_i)(x_j - x_i) - (u_j - u_i)(z_j - z_i) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

となる。これが回転のSPH表記である【Wingate and Fisher 1991】。

4.3.4 偏差応力

偏差応力は(3.2.109)式で与えられるが、SPH表記をするため、この時間変化を考える。物体が大変形をとともなう場合の偏差応力の時間変化は次のように表される。

$$\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial t} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + S_{\alpha\gamma} \dot{R}_{\beta\gamma} + S_{\gamma\beta} \dot{R}_{\gamma\alpha} \quad (\alpha, \beta, \gamma = x, y, z) \tag{4.3.12}$$

3次元で考えると、それぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial t} = \frac{2}{3} \mu \left(2\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{zz} \right) + 2S_{xy} \dot{R}_{xy} - 2S_{zx} \dot{R}_{zx}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{yy}}{\partial t} &= \frac{2}{3}\mu\left(-\dot{\varepsilon}_{xx} + 2\dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{zz}\right) - 2S_{xy}\dot{R}_{xy} + 2S_{yz}\dot{R}_{yz} \\ \frac{\partial S_{zz}}{\partial t} &= \frac{2}{3}\mu\left(-\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy} + 2\dot{\varepsilon}_{zz}\right) - 2S_{xy}\dot{R}_{xy} + 2S_{zx}\dot{R}_{zx}\end{aligned}\quad (4.3.13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{xy}}{\partial t} &= 2\mu\dot{\varepsilon}_{xy} + (S_{yy} - S_{xx})\dot{R}_{xy} + S_{xz}\dot{R}_{yz} - S_{yz}\dot{R}_{zx} \\ \frac{\partial S_{yz}}{\partial t} &= 2\mu\dot{\varepsilon}_{yz} + (S_{zz} - S_{yy})\dot{R}_{yz} + S_{yx}\dot{R}_{zx} - S_{zx}\dot{R}_{xy}\end{aligned}\quad (4.3.14)$$

ここで $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}, \dot{R}_{\alpha\beta}$ には4.3.2節、4.3.3節で求めたものを用いる【Wingate and Fisher 1991】。

4.3.5 エネルギー保存

(3.3.5)式より、弾塑性体力学のエネルギー保存の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left\{ P \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} \right) + S_{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \right\} \quad (4.3.15)$$

である。(4.1.6)式を用いてSPH法で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_j}{\partial t} &= \left[\sum_{i=1}^N m_i - \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) (u_j - u_i) \frac{\partial W}{\partial x} + (v_j - v_i) \frac{\partial W}{\partial y} + (w_j - w_i) \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\rho_j} (S_{xx}\varepsilon_{xx} + S_{yy}\varepsilon_{yy} + S_{zz}\varepsilon_{zz} + S_{xy}\varepsilon_{xy} + S_{yz}\varepsilon_{yz} + S_{zx}\varepsilon_{zx}) \\ \frac{du_i}{dt} &= \sum_j M_j \left[- \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \left\{ (v_{xi} - v_{xj}) \frac{\partial W}{\partial x} + (v_{yi} - v_{yj}) \frac{\partial W}{\partial y} + (v_{zi} - v_{zj}) \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\rho_i} (S_{xx}\varepsilon_{xx} + S_{yy}\varepsilon_{yy} + S_{zz}\varepsilon_{zz} + S_{xy}\varepsilon_{xy} + S_{yz}\varepsilon_{yz} + S_{zx}\varepsilon_{zx})\end{aligned}\quad (4.3.16)$$

これが弾塑性体力学のエネルギー保存の方程式のSPH表記法である【Wingate and Fisher 1991】。

第5章 ランキン・ユゴニオ方程式

5.1 ランキン・ユゴニオ方程式

超音速物体が固体あるいは流体に衝突するとき、標的の媒体中には衝撃波が発生する。

ランキン・ユゴニオ方程式は、圧力 p 、内部エネルギー E 、密度 ρ の関係式であり、衝撃波の通過前後の状態を表す。

衝撃波はその面に垂直な方向に伝播する垂直衝撃波として考える。衝撃波面に平行な方向の物理量の変化は考えなくてよいため、理論的な扱いは容易になる。

一次元衝撃波面の前後で成立する単位面積当たりの質量、運動量、エネルギーの保存則を考える。物体中を衝撃波面が運動していく場合と、座標系に固定された衝撃波面の前後を物体が運動していく場合の2通りの方法で、ユゴニオ方程式を導出する。

5.2 衝撃波面が運動する場合のユゴニオ方程式の導出

図 5.1 は、衝撃波が伝わっている物体の時刻 t, t' における状態である。衝撃波の速度を

U 、衝撃を受けた部分の速度を u_p とし、物体の断面積 S は常に一定としている。

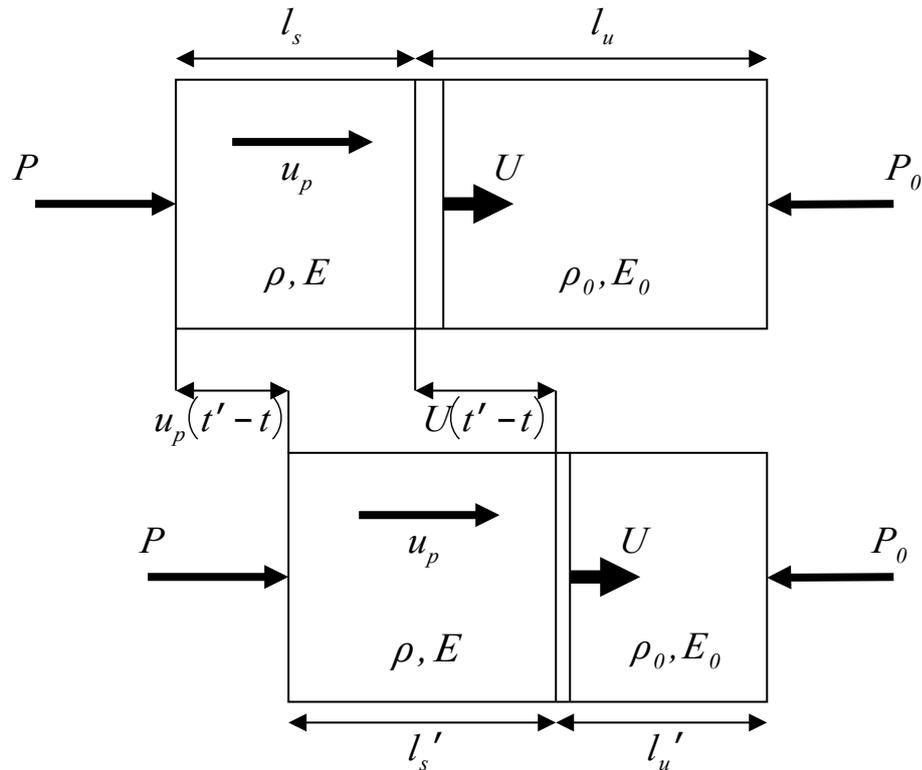


図 5.1 上時刻 t 、下時刻 t'

5.2.1 質量保存

時刻 t における衝撃を受けていない部分の長さを l_u 、受けた部分の長さを l_s とおき、時刻 t' における衝撃を受けていない部分の長さを l'_u 、受けた部分の長さを l'_s とおく。時刻 t と t' の間に衝撃波は $U(t' - t)$ だけ移動し、衝撃を受けた部分は $u_p(t' - t)$ だけ移動する。よって、 l'_u, l'_s はそれぞれ

$$l'_u = l_u - U(t' - t) \quad (5.2.1)$$

$$l'_s = l_s + U(t' - t) - u_p(t' - t) \quad (5.2.2)$$

と表される。質量保存則より

$$\rho l_s S + \rho_0 l_u S = \rho l'_s S + \rho_0 l'_u S \quad (5.2.3)$$

が成り立つ。(5.2.3)式に(5.2.1)(5.2.2)式を代入して整理すると

$$\rho(U - u_p) = \rho_0 U \quad (5.2.4)$$

が得られる。これが質量保存の方程式である【Melosh 1989】。

5.2.2 運動量保存

衝撃を受けた部分の端から受ける圧力 P は、受けていない部分の端から受ける圧力 P_0 よりも大きい。よって、物体が受ける力 $F = (P - P_0)S$ は右向きである。

時刻 t, t' における運動量は、それぞれ $\rho l_s u_p S, \rho l'_s u_p S$ である。運動量保存則より、運動量の変化は、その間に物体に与えられた力積 $F(t' - t)$ に等しいので

$$\rho l'_s u_p S - \rho l_s u_p S = (P - P_0)S(t' - t) \quad (5.2.5)$$

が成り立つ。(5.2.5)式に(5.2.2)式を代入して整理すると

$$\rho(U - u_p)u_p = (P - P_0) \quad (5.2.6)$$

となる。(5.2.4)式より

$$P - P_0 = \rho_0 U u_p \quad (5.2.7)$$

が得られる。これが運動量保存の方程式である【Melosh 1989】。

5.2.3 エネルギー保存

時刻 t における物体の全エネルギー $E_{total}(t)$ は、衝撃を受けた部分の内部エネルギー、運動エネルギー及び衝撃を受けていない部分の内部エネルギーの和であるから

$$E_{total}(t) = \rho_0 l_u E_0 S + \rho l_s E_0 S + \frac{1}{2} \rho l_s u_p^2 S \quad (5.2.8)$$

時刻 t' での物体の全エネルギー $E_{total}(t')$ についても同様に

$$E_{total}(t') = \rho_0 l'_u E_0 S + \rho l'_s E_0 S + \frac{1}{2} \rho l'_s u_p'^2 S \quad (5.2.9)$$

エネルギー保存則より、エネルギー変化は物体が時刻 t, t' 間にした仕事 $PSu_p(t' - t)$ に等しい。よって

$$E_{total}(t') - E_{total}(t) = PSu_p(t' - t) \quad (5.2.10)$$

が成り立つ。(5.2.7)式に (5.2.1) (5.2.2) (5.2.8) (5.2.9)式を代入すると

$$-\rho_0 E_0 U + \rho E(U - u_p) + \frac{1}{2} \rho u_p^2 (U - u_p) = Pu_p \quad (5.2.11)$$

となる。(5.2.4)式より

$$\rho_0 U(E - E_0) + \frac{1}{2} \rho_0 u_p^2 U = Pu_p \quad (5.2.12)$$

が得られる。

ここで、先に求めた2つのユゴニオ方程式(5.2.4)式と(5.2.7)式を用いて u_p を求める。

$$u_p = \sqrt{(P - P_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right)} = \sqrt{(P - P_0)(V_0 - V)} \quad (5.2.13)$$

が得られる。ただし、 $1/\rho = V, 1/\rho_0 = V_0$ とおいた。よって U は

$$U = \frac{1}{\rho_0} \sqrt{\frac{P - P_0}{V_0 - V}} \quad (5.2.14)$$

となり、(5.2.13)(5.2.14)式の(5.2.12)式に代入すると

$$E - E_0 = \frac{1}{2} (P - P_0)(V_0 - V) \quad (5.2.15)$$

となる。これがエネルギー保存の方程式である【Melosh 1989】。

5.3 衝撃波を固定した場合のユゴニオ方程式の導出

衝撃波面が座標軸に固定されている場合の流れを考える（図 5.2）。衝撃波面の前後はいずれも一様な状態であるとする。衝撃波面前後の流体の密度を ρ_1, ρ_2 、流速を u_1, u_2 とする。

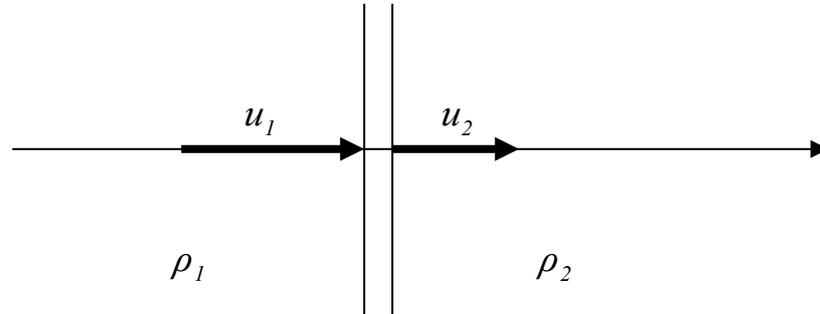


図 5.2

5.3.1 質量保存

衝撃を受ける前の物質が、 Δt 後に衝撃波を通過したとする。この Δt の間に衝撃波面に単位面積当たり流入した質量と流出した質量は等しいから質量保存則より

$$\rho_1 u_1 \Delta t = \rho_2 u_2 \Delta t$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (5.3.1)$$

よって、波面を単位面積、単位時間当たり通過する流体の質量は常に一定である。これが質量保存の方程式である。

5.3.2 運動量保存

物体が受ける単位面積当たりの力積は $(P_2 - P_1)\Delta t$ である。また、通過前後の単位面積当たりの運動量はそれぞれ $\rho_1 u_1^2 \Delta t, \rho_2 u_2^2 \Delta t$ である。よって運動量保存則より

$$\rho_1 u_1^2 \Delta t - \rho_2 u_2^2 \Delta t = (P_2 - P_1)\Delta t$$

$$\rho_1 u_1^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2 \quad (5.3.2)$$

が成り立つ。これが運動量保存の方程式である。

5.3.3 エネルギー保存

流入前後の単位面積・単位時間当たりの流体の全エネルギーは、

$$\begin{aligned} E_{1\ total} &= Q \left(E_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) \\ E_{2\ total} &= Q \left(E_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

である。ただし、 $Q = \rho u$ である。また、このときした仕事は $P_1 u_1 - P_2 u_2$ である。よって(5.3.3)式より

$$\begin{aligned} E_{2\ total} - E_{1\ total} &= P_1 u_1 - P_2 u_2 \\ Q \left(E_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) - Q \left(E_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) &= P_1 u_1 - P_2 u_2 \\ P_1 u_1 + Q \left(E_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) &= P_2 u_2 + Q \left(E_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

が成り立つ。流体が、一定比熱の理想気体であるとする $P = \rho RT$ が成り立つので、これを(5.3.4)式に代入すると左辺は

$$\rho_1 R T_1 u_1 + Q \left(E_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) = Q \left(R T_1 + E_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) \quad (5.3.5)$$

となる。ここで定圧比熱 c_p 、定積比熱 c_v を用いて次のように γ を定義する。

$$E = c_v T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (5.3.6)$$

$$R = c_p - c_v = c_v (\gamma - 1) \quad (5.3.7)$$

(5.3.6)(5.3.7)式を(5.3.5)式に代入して整理すると

$$Q \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 \right) \quad (5.3.8)$$

右辺も同様にして整理すると(5.3.4)式は

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (5.3.9)$$

となる。

(5.3.2)式に(5.3.1)を代入すると

$$\rho_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 u_2^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2$$

$$u_2^2 = \frac{\rho_1 (P_2 - P_1)}{\rho_2 (\rho_2 - \rho_1)} \quad (5.3.10)$$

(5.3.9)式に(5.3.1)を代入すると

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 u_2^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 + \rho_1)}{\rho_1^2} u_2^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho_1 P_2 - \rho_2 P_1}{\rho_1 \rho_2} \quad (5.3.11)$$

となる。(5.3.11)式に(5.3.10)式を代入して整理すると

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1} \quad (5.3.12)$$

が得られる。これがエネルギー保存の方程式である。

5.4 平面衝突の近似

ここではユゴニオ方程式を用いて、厚さ L の衝突体が速度 v_i で標的に衝突した場合の速度を求める。衝突体は水平方向に無限に続く平面であるとし、衝突したときを $t=0$ とする。また、物体の移動距離は、 $t=0$ のときの衝突体と標的との境界面を基準面として考える。

まず衝突後、強い衝撃が衝突体と標的の両方に伝わる。上下に伝った衝撃に挟まれた部分の速度は u_i 、圧力は P となり、衝突体と標的とで同じである。衝突体でまだ衝撃を受けていない部分は v_i で運動し続ける。よって、衝撃を受けたことによる減速を u_p とすると、衝撃を受けた部分は速度 $u_i = v_i - u_p$ で運動する。同様に、衝突体中を伝わる衝撃波の速度を U_p とすると、衝撃波は $v_i - U_p$ で伝わる。

衝突体の上端に衝撃波が到達したときを $t=t_c$ とする。このとき、衝突体と標的との境界面は、 $t=0$ のときの基準面から $u_i t_c$ だけ移動している。

衝撃波が衝突体の上端に達すると、そこから下方に向かって膨張波が発生する。この膨張波が衝突体と標的との境界面に達したときを $t=t_c + t_R$ とする。これをもって圧縮段階の終了とする。膨張波によって動かされる衝突体の物質の速度を u_R とすると、衝突体の運動速度は $u_i - u_R$ である。同様に、衝突体中を伝わる膨張波の速度を C_R とすると、膨張

波の速度は $C_R + u_t$ である。

衝撃波速度 U と衝撃により物質が動く速度 u は実験的に

$$U = C + Su \quad (5.4.1)$$

という線形関係があることが知られている。ただし、 S は定数である。よって

U_t, U_p, u_t, u_p の関係は、以下のように表すことができる。

$$U_t = C_t + S_t u_t \quad (5.4.2)$$

$$U_p = C_p + S_p u_p \quad (5.4.3)$$

(5.4.2)(5.4.3)より、 U_t, U_p を求めることができる。

(5.2.7)式に(5.2.4)式を代入すると

$$P_t = \rho_t (U_t - u_t) u_t \quad (5.4.4)$$

$$P_p = \rho_p (U_p - u_p) u_p \quad (5.4.5)$$

衝突体と標的の衝突を受けた後の圧力 P_t, P_p は等しいので、(5.4.4)(5.4.5)式より

$$\rho_t (U_t - u_t) u_t = \rho_p (U_p - u_p) u_p \quad (5.4.6)$$

また、(5.2.4)式より

$$\frac{\rho_p (U_p - u_p) u_p}{\rho_t (U_t - u_t) u_t} = \frac{\rho_{0p} U_p}{\rho_{0t} U_t} \quad (5.4.7)$$

(5.4.5)(5.4.6)式より ρ_p, ρ_t を消去して整理すると

$$\rho_{0t} u_t U_t = \rho_{0p} u_p U_p \quad (5.4.8)$$

(5.4.8)式に、(5.4.2)(5.4.3)式を代入すると

$$\rho_{0t} u_t (C_t + S_t u_t) = \rho_{0p} u_p (C_p + S_p u_p) \quad (5.4.9)$$

(5.4.9)式に $u_p = v_i - u_t$ を代入すると

$$\rho_{0t} u_t (C_t + S_t u_t) = \rho_{0p} C_p (v_i - u_t) + \rho_{0p} S_p (v_i - u_t)^2 \quad (5.4.10)$$

u_t について整理すると

$$\begin{aligned}
(\rho_{0_t} S_t - \rho_{0_p} S_p) u_t^2 + (\rho_{0_t} C_t + \rho_{0_p} C_p + 2\rho_{0_p} S_p v_i) u_t \\
- \rho_{0_p} v_i (C_p + S_p v_i) = 0
\end{aligned}
\tag{5.4.11}$$

よって

$$u_t = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}
\tag{5.4.12}$$

ただし

$$\begin{aligned}
A &= \rho_{0_t} S_t - \rho_{0_p} S_p \\
B &= \rho_{0_t} C_t + \rho_{0_p} C_p + 2\rho_{0_p} S_p v_i \\
C &= -\rho_{0_p} v_i (C_p + S_p v_i)
\end{aligned}
\tag{5.4.13}$$

より u_t を求めることができる（衝突体と標的の衝撃を受けていない部分の密度 ρ_{0_t}, ρ_{0_p} は既知である）。 u_t が求めれば、衝突圧力 P 、衝撃波速度 U 等全ての衝撃後の状態を示す物理量を見積もることができる【Melosh 1989】。

5.5 状態方程式

与えられている1つの閉じた系を考えたとき、その熱力学的な状態を完全に表すためには、物質の状態変数が必要である。この状態変数を他の状態変数の組の一価関数として表すことができるとき、この関数関係を状態方程式と呼ぶ【ファン 1970】。この研究では圧力 P の計算に先に求めたユゴニオ方程式を用いたRankine-Hugoniot状態方程式とTillotson状態方程式を用いる。

Rankine-Hugoniot 状態方程式

$$P = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma\eta\right)P_H + \gamma\rho(E - E_H) \quad \text{if } E \geq E_H \quad (5.5.1)$$

$$P = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma\eta\right)P_H \quad \text{if } E < E_H \quad (5.5.2)$$

ここで

γ : 定数 (Gruneisenパラメーター) 【Liversky 1991】

C, S : (5.4.1)式 【Liversky 1991】

E : 内部エネルギー

$$\eta = \rho/\rho_0 - 1$$

P_H, E_H は(5.4.1)式の C, S を用いて

$$P_H = \frac{\rho_0 C^2 (1 + \eta)}{\{1 - (S - 1)(1 + \eta)\}^2} \quad \text{if } \eta > 0 \quad (5.5.3)$$

$$P_H = 0 \quad \text{if } \eta \leq 0 \quad (5.5.4)$$

$$E_H = \frac{1}{2} \frac{P_H}{\rho_0} \frac{1 + \eta}{2 + \eta} \quad (5.5.5)$$

である【Melosh 1989】。

Tillotson 状態方程式

物質の状態によってそれぞれ近似される (図 5.3)。

$$P = \left\{ a + \frac{b}{\left(\frac{E}{E_0 \eta^2} + 1 \right)} \right\} \rho E + A(1 + \eta) + B(1 + \eta)^2 \quad \text{if } E < E_{iv} \quad (5.5.6)$$

$$P = a \rho E + \left\{ \frac{b}{\left(\frac{E}{E_0 \eta^2} + 1 \right)} + A(1 + \eta) e^{-\beta(\rho_0/\rho - 1)} \right\} e^{-\alpha(\rho_0/\rho - 1)^2} \quad \text{if } E > E_{cv} \quad (5.5.7)$$

$$P = \left\{ (E - E_{iv}) P_E + (E_{cv} - E) P_C \right\} / (E_{cv} - E_{iv}) \quad \text{if } E_{iv} \leq E \leq E_{cv} \quad (5.5.8)$$

ここで

$a, b, A, B, \alpha, \beta$: 定数

E_0 : 初期エネルギー

E_{iv}, E_{cv} : 状態変化するエネルギー

P_C : (5.5.6)式で与えられる P

P_E : (5.5.7)式で与えられる P

である【Melosh 1989】。

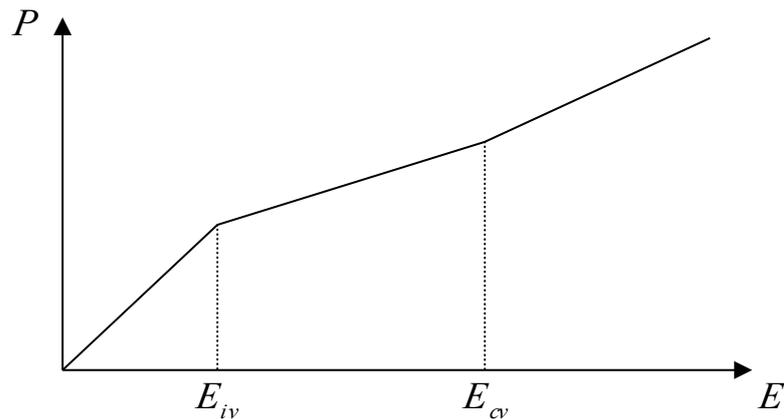


図 5.3

第6章 数値計算法

6.1 Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法は、数値解析において常微分方程式の近似解を求める代表的な方法である。モデル計算上で微小時間後の粒子の座標を推定することができる。

まず微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

に初期条件 (x_0, y_0) が与えられたとして考える。

上式の1階微分方程式について、 x が x_0 から h だけ増加した点 $x_1 = x_0 + h$ における値 y_1 の近似解を次のような手順で求める (図 6.1)。

① (x_0, y_0) における勾配 $f(x_0, y_0)$ に x の増加量 h を掛け、仮の y の増加量 k_1 を求める。

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

これより、 x_1 における仮の y_1 が

$$y_1 = y_0 + k_1 (= y_0 + hf(x_0, y_0))$$

によって定まる。

② (x_0, y_0) と①で仮に決まった $(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_0 + k_1)$ の中点をとる。

$$\frac{1}{2} \{ (x_0, y_0) + (x_1, y_1) \} = (x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

この点を始点として①と同じ肯定を k_3 まで繰り返す。

$$k_2 = h(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$

③ k_4 は $(x_0 + h, y_0 + k_3)$ を始点として求める。

$$k_4 = h(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

④ k_1, k_2, k_3, k_4 の平均荷重として y の増加量 k を決める。

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

⑤ k を用いて (x_1, y_1) の近似点が決まる。

$$(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_0 + k)$$

これをコンピュータにより解くことで、モデル上での微小時間後の各粒子の座標を求めることができる【杉江 1986】。

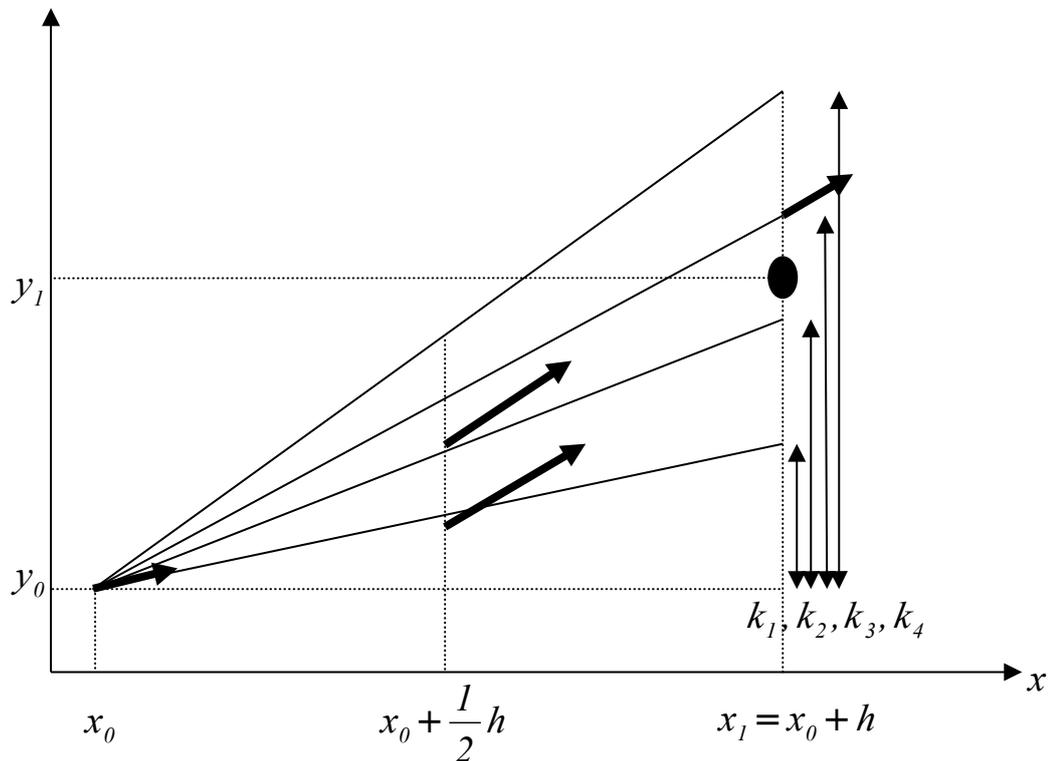


図 6.1

6.2 系の中でのエネルギー保存

数値計算は、Rung—Kutta 法の式を用いて時間間隔 Δt ごとに繰り返し行う。その際、系全体のエネルギーは時刻 t のときと、時刻 $t + \Delta t$ のときとで等しくなければならない。系全体のエネルギーを E_{total} とすると、次のように表される。

$$E_{total}(t) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} M_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + M_i U_i \right\}$$

エネルギー保存の法則より E_{total} は常に一定でなければならないが、コンピュータで桁の大きい数値を計算すると数値の誤差が出やすい。よって基準を設け、ここでの数値計算が妥当であるかどうかを判断する必要がある。そこで、 $t = 0$ のときの系全体のエネルギーを $E_{total}(0)$ とすると、 E_{total} の増減率 α は

$$\alpha = \left| \frac{E_{total}(t) - E_{total}(0)}{E_{total}(0)} \right|$$

となり、本研究では α が 3 % 以内であれば、エネルギーは保存されたものとみなして計算を続行する。

第7章 テストシミュレーション

7.1 プログラムコードの評価

本研究では惑星の衝突を3次元でシミュレーションするためのプログラムを用いる。プログラムコードの評価を行うため、内部エネルギーについてテストシミュレーションの結果と理論値を比較して検証する。

7.2 テストシミュレーションモデル

円柱状の鉄同士を片方は固定させ衝突させる（図 7.1）。座標系は衝突方向が z 軸になるようにとり、 xy 平面で衝突するものとする。

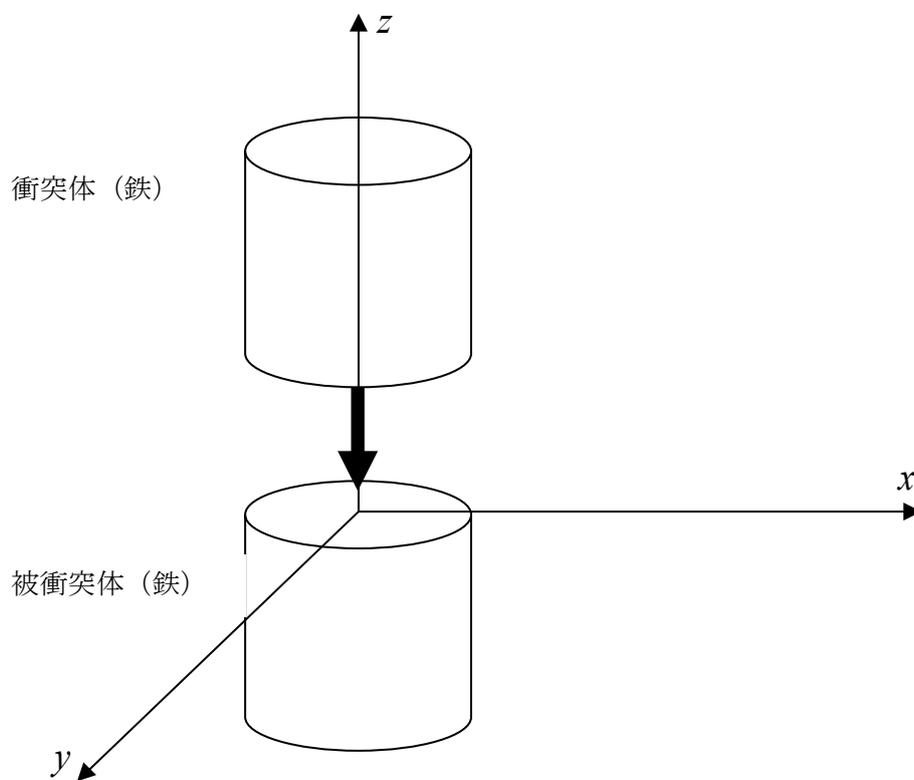


図 7.1

7.3 条件

使用する鉄は直径高さともに $h = 0.76\text{cm}$ の円柱、速度 $v = 221\text{m/s}$ で衝突させる (図 7.2)。

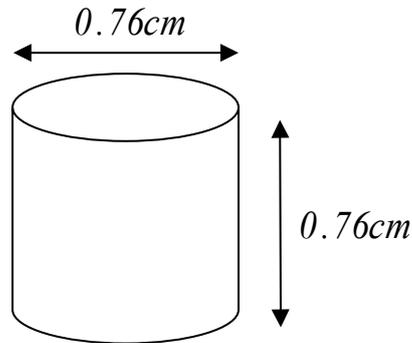


図 7.2

7.4 物質特性

テストシミュレーションに用いる鉄の特性は以下の通りである【Liversky 1991】。

$$\text{密度 } \rho = 7.89\text{g/cm}^3$$

$$\text{降伏強度 } Y_{S_0} = 5.0 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$\text{Gruneisenパラメータ } \gamma = 1.81$$

$$(5.4.1)\text{式 } C_0 = 3.6\text{km/s}$$

$$(5.4.1)\text{式 } S = 1.8$$

7.5 状態方程式

5.5 節より、Rankine-Hugoniot 状態方程式を用いる。

$$P = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma\eta\right)P_H + \gamma\rho(E - E_H) \quad \text{if } E \geq E_H$$

$$P = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma\eta\right)P_H \quad \text{if } E < E_H$$

7.6 粒子の配列

直径に10個の粒子が配列するように間隔を調整する。したがって、テストシミュレーションでは 0.076cm 間隔で粒子を配列する（図7.3）。

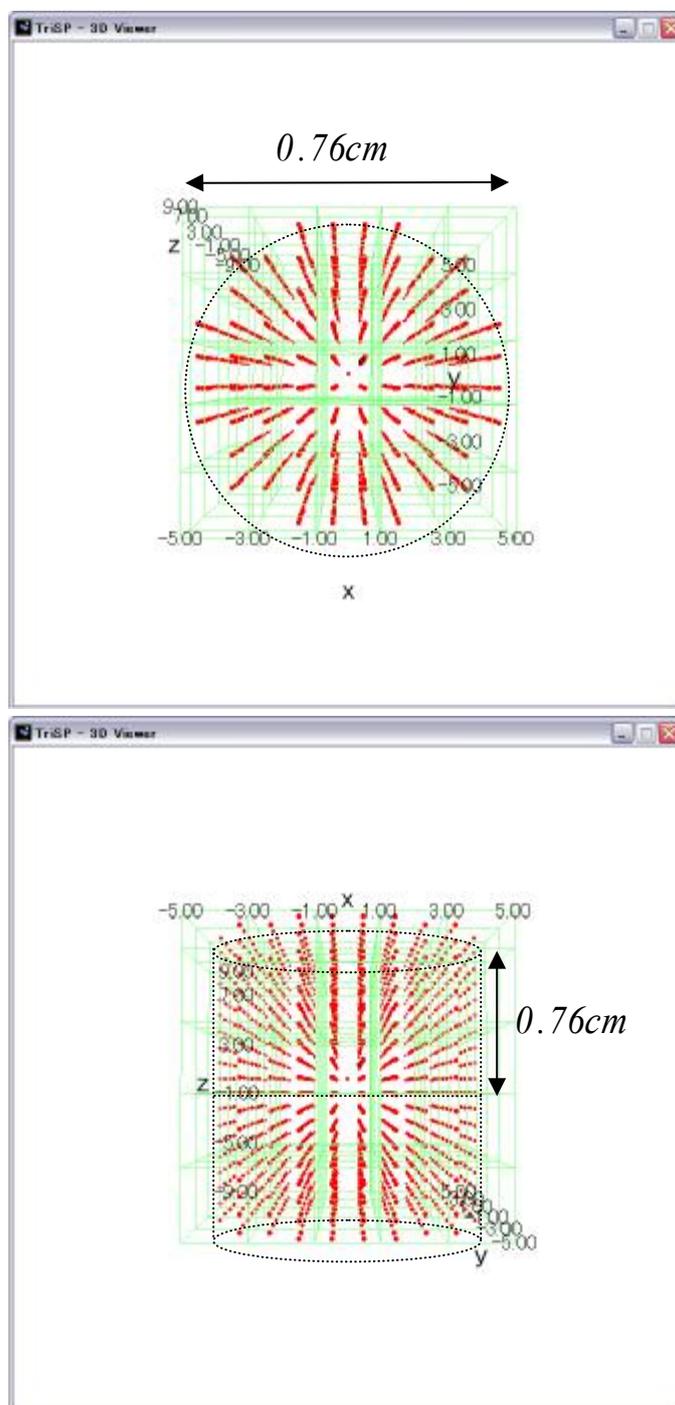


図7.3 衝突方向から見た図（上）
衝突方向に対して垂直な方向から見た図（下）

7.7 数値の無次元化

天体衝突のシミュレーションはしばしば桁数の多い数を扱う。特にSPH法は計算量が多いため、計算中に桁落ちする可能性がある。そこで、扱う数値を単位を含め無次元化して桁数が小さい数値をプログラムに代入してシミュレーションを行なう。物理量の基本単位は長さ $[L]=m$ 、重さ $[M]=kg$ 、時間 $[T]=s$ であるが、本研究では分割された粒子が最小単位であるから、粒子1個の重さと体積が単位となるように $\rho=1$ 、粒子1個分の長さを移動するのにかかる時間を単位となるように $v=1$ として無次元化を行なう。すなわち

$$[L] = \frac{h}{10} = \frac{0.0076m}{10} = 7.6 \times 10^{-4} m$$

$$[M] = \rho[L]^3 = 7890kg/m^3 \times (7.6 \times 10^{-4} m)^3 = 3.4 \times 10^{-6} kg$$

$$[T] = \frac{h}{v} = \frac{0.0076m}{221m/s} = 3.4 \times 10^{-6} s$$

これらより、降伏強度 Y_s 、音速 C を無次元化すると

$$Y_s = Y_{s_0} \times \frac{[L][T]^2}{[M]} = 5.0 \times 10^8 Pa \times \frac{7.6 \times 10^{-4} m \times (3.4 \times 10^{-6} s)^2}{3.4 \times 10^{-6} kg} = 1.3$$

$$C = C_0 \times \frac{[T]}{[L]} = 3.6km/s \times \frac{3.4 \times 10^{-6} s}{7.6 \times 10^{-4} m} = 16$$

となり、これらをプログラムの定義ファイルに入力してシミュレーションを行なう。

7.8 実行結果

テストシミュレーションで得られた結果を無次元化時間 $T=0, 1, 2, 3$ についてそれぞれプロットしたものが次項の図7.4~7.7である。変形している様子から、プログラムは正常に各粒子の座標を計算し、出力していることが分かる。また【伊藤 2009】は実際に弾丸を用いたシミュレーションと比較を行なっている。

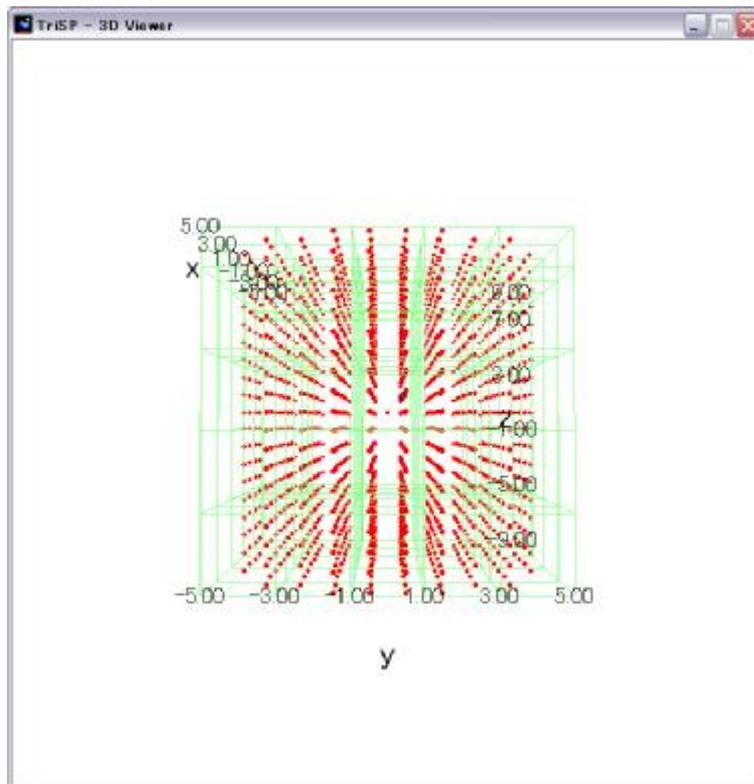


図 7.4 $T=0$ (物体を衝突方向に対して垂直な方向から見た図)

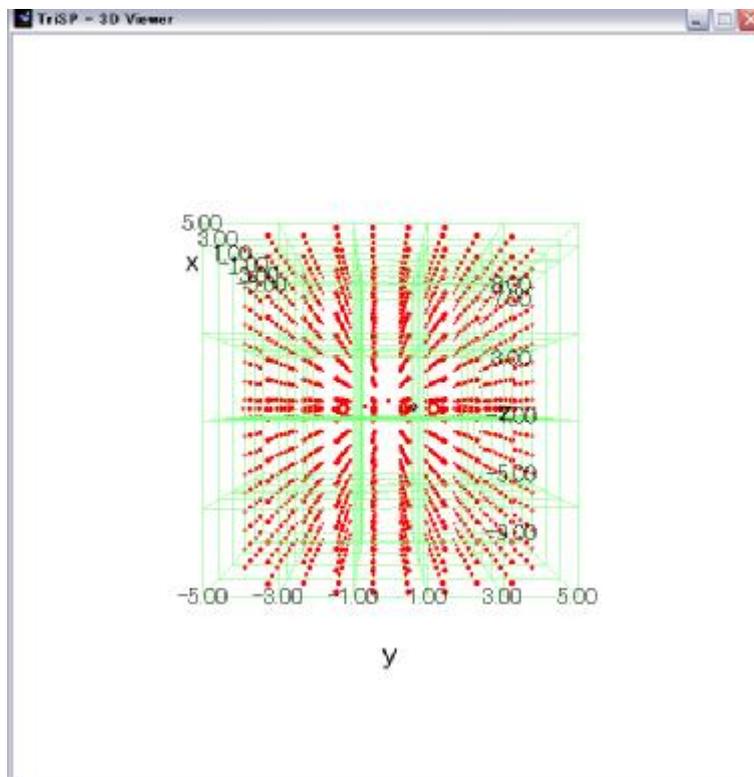


図 7.5 $T=1$

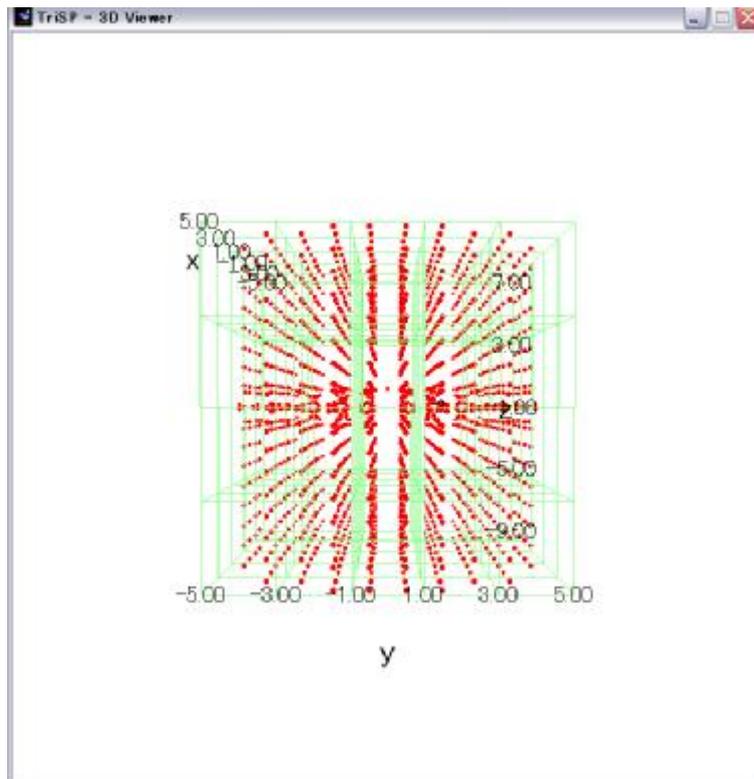


图 7.6 $T=2$

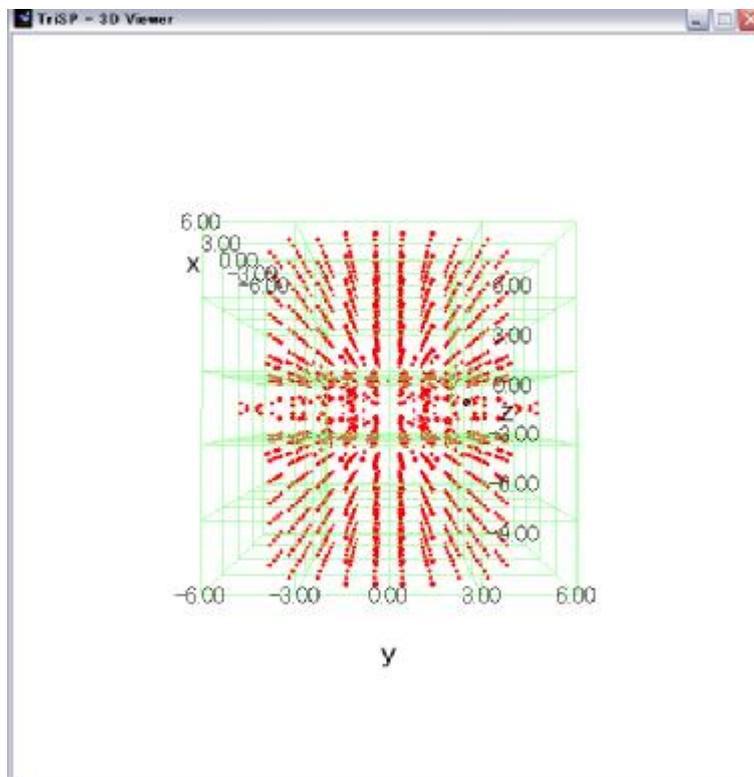


图 7.7 $T=3$

第8章 変形過程

8.1 速度の違いによる変形過程

衝突体と被衝突体の直径を $1km$ とし、天体衝突の速度スケールに近い $v = 1km/s, 10km/s$ についてそれぞれ無次元化してシミュレーションを行なった。また、テストシミュレーション同様、Rankine-Hugoniot 状態方程式を用い、各値も【Liversky 1991】より引用したものを用いた。プログラムから出力された各粒子の座標から、 $v = 1km/s, 10km/s$ おのおのについて $T = 0, 1, 2, 3$ の変形の様子を比較した（図 8.2~8.4）また、プロットするのは衝突体のみとし、初期状態と座標系のスケールは図 8.1 の通りである。

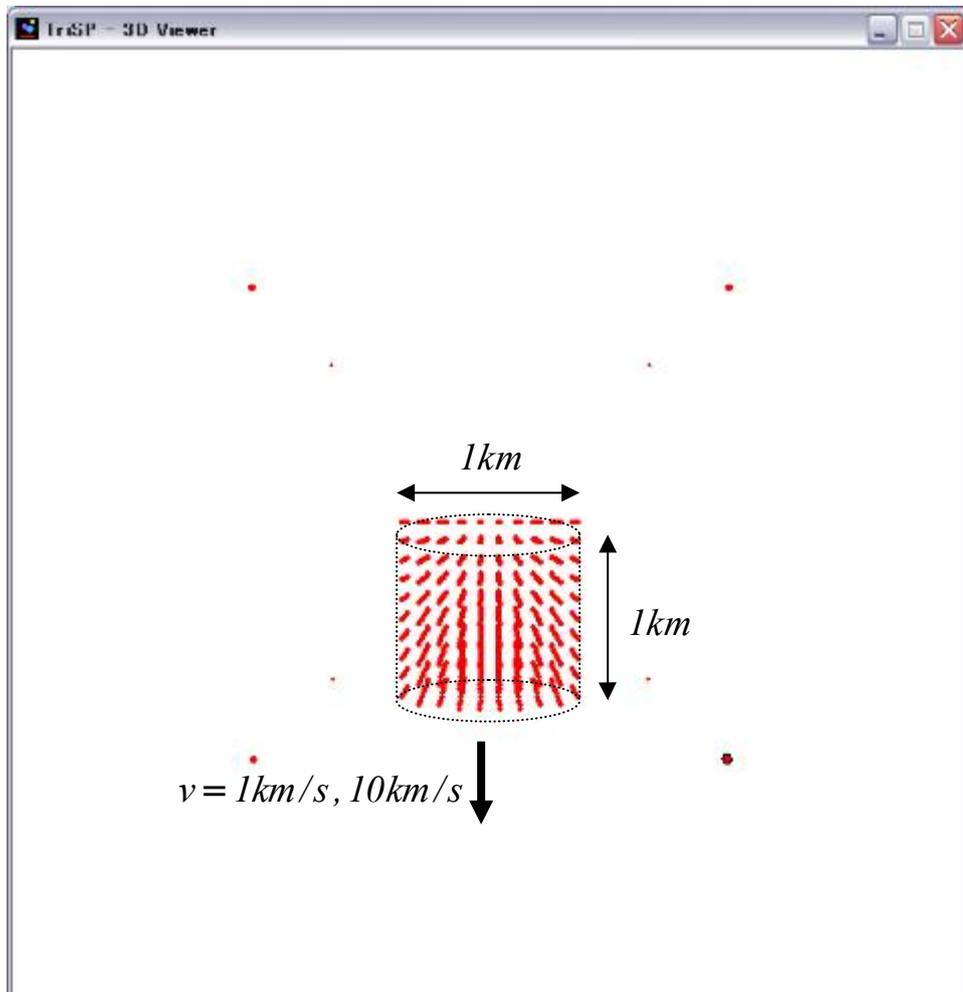
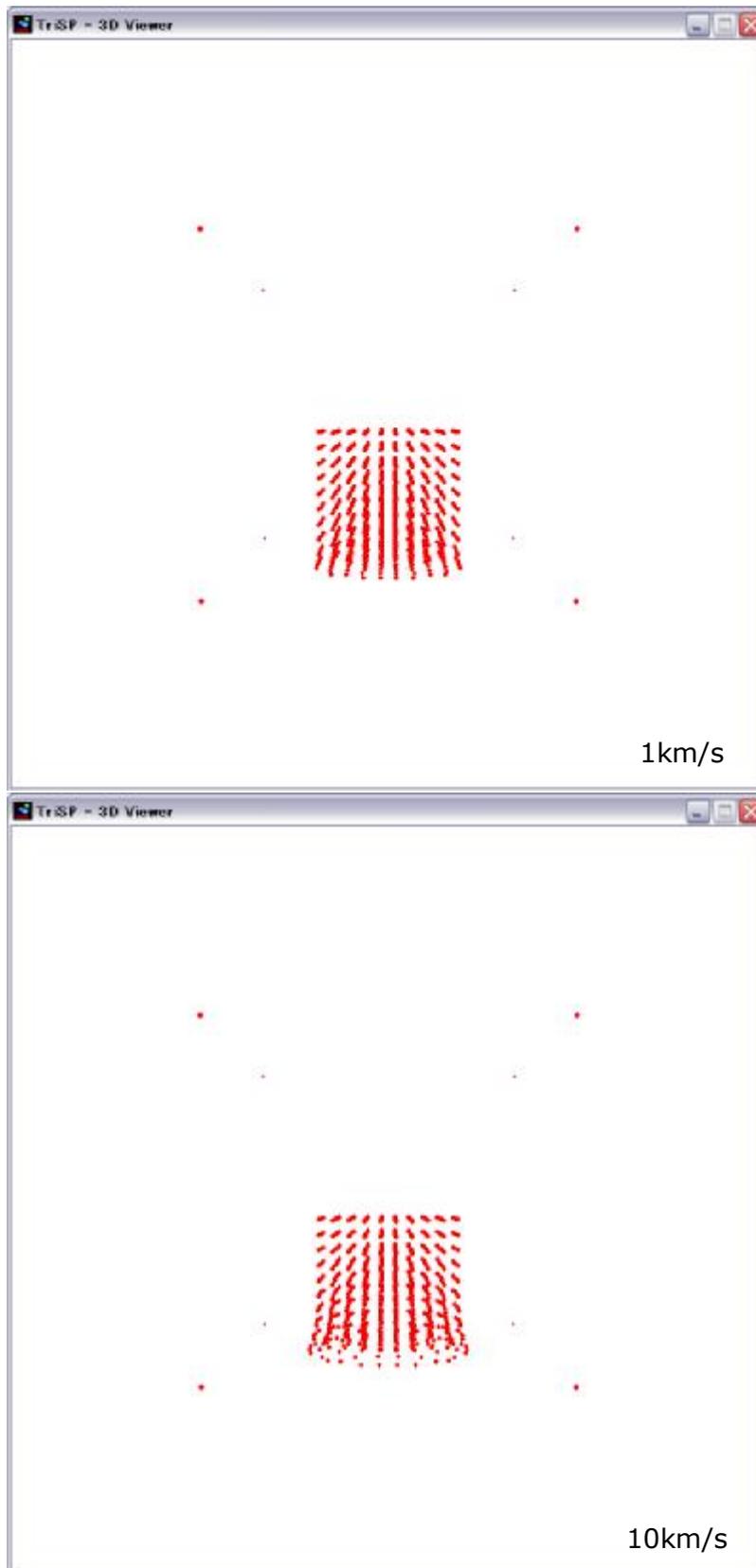
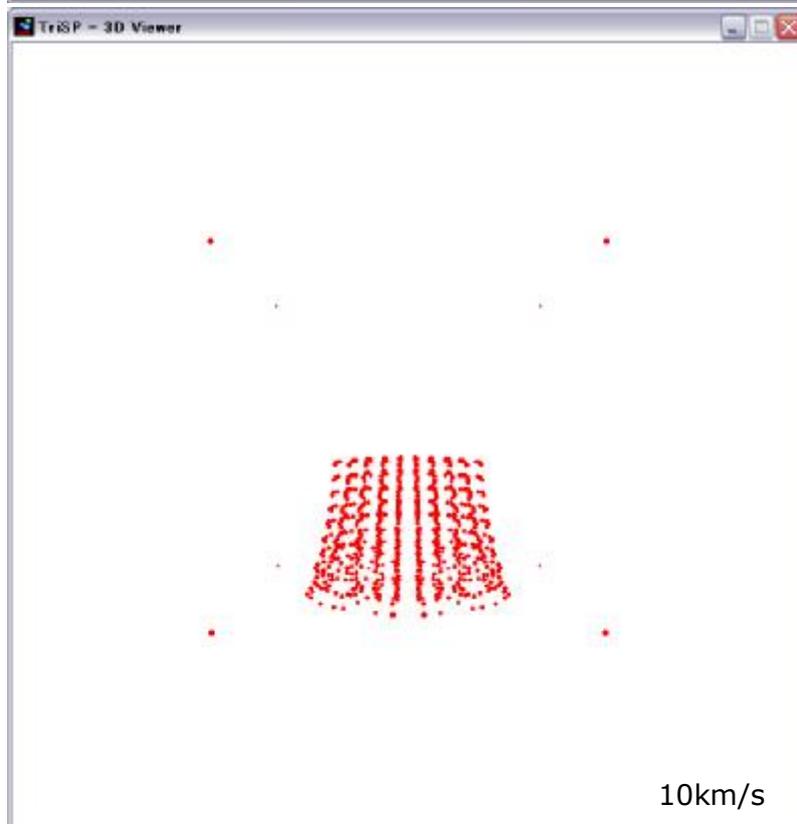
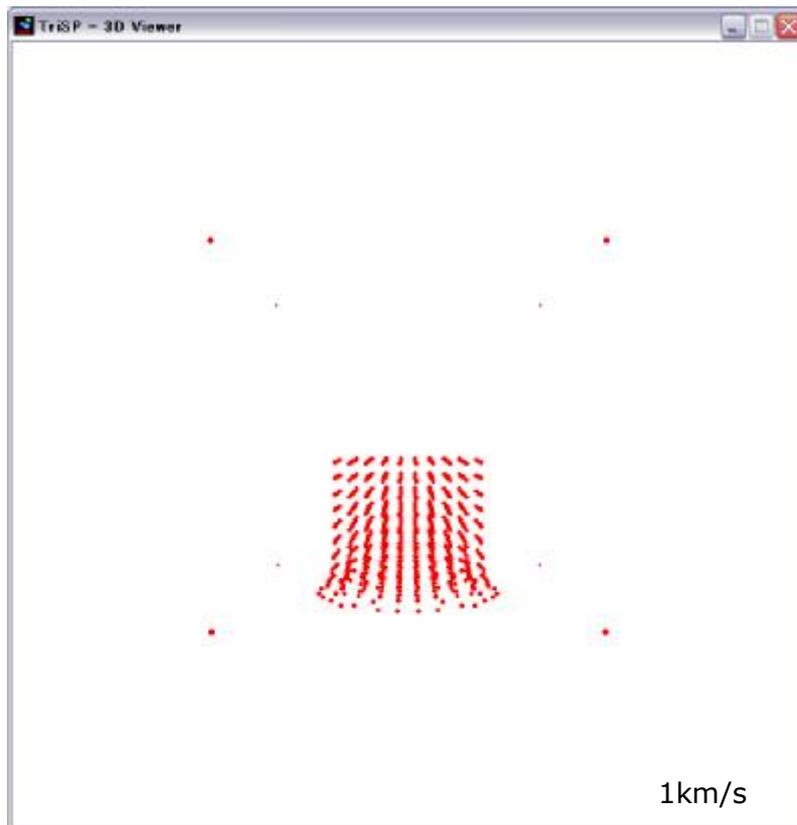


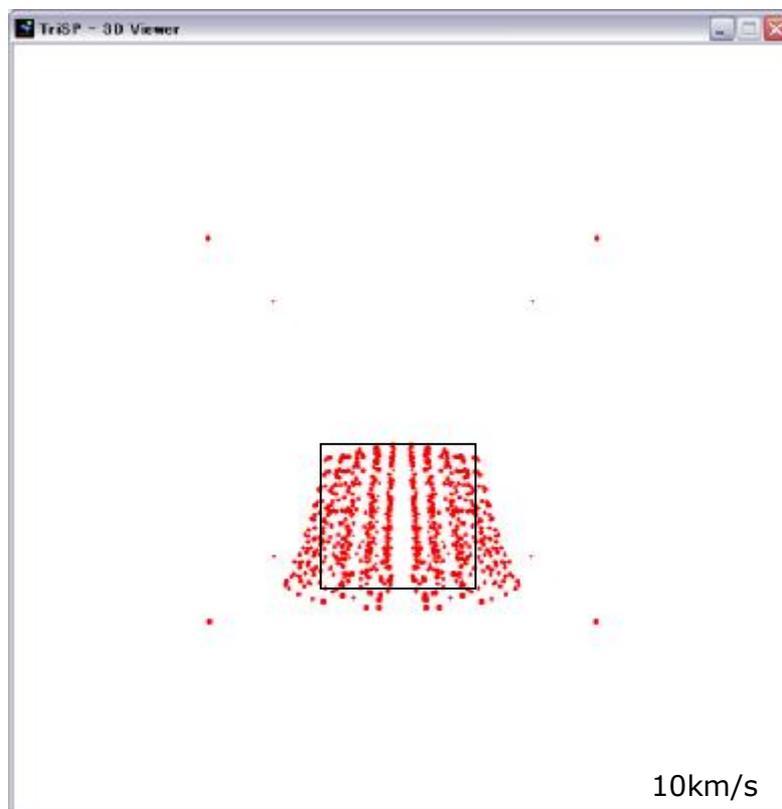
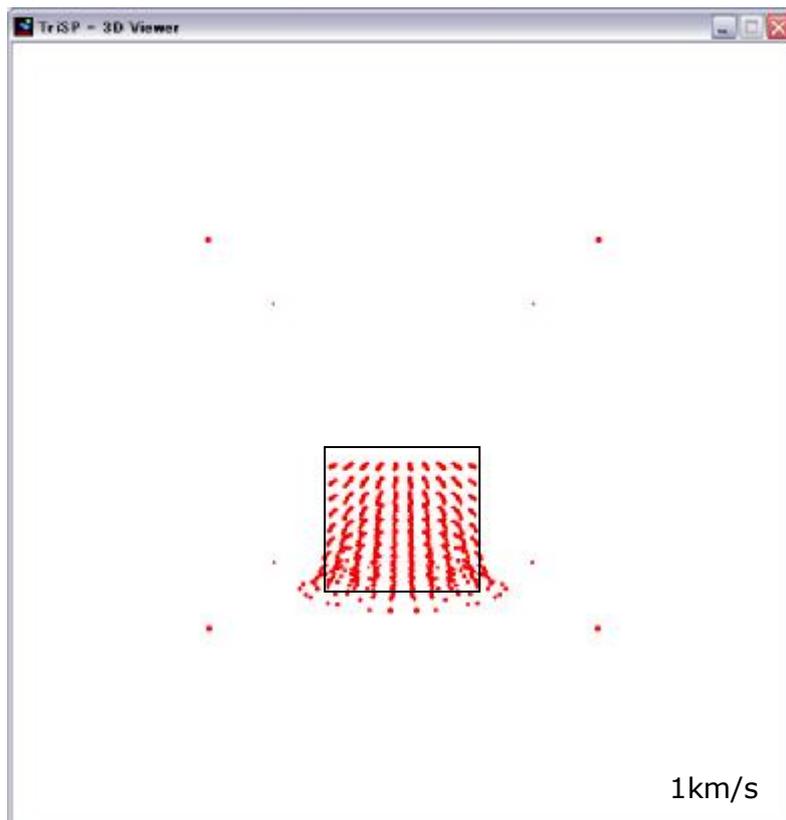
図 8.1 初期状態とスケール



☒ 8.2 $T=1$



☒ 8.3 $T=2$



☒ 8.4 $T=3$

衝突速度による変形をみると、速度が大きい方が変形も大きくなっていることがわかる。しかし、速度が10倍になっているのに対して、変形の大きさの変化は小さい。このことから、速度と変形の度合いの関係は指数関数的になっていることが予想される。

8.2 各速度における変形率の変化

8.1節で行なったシミュレーションに加え、 $T=10,20,30$ の結果から各速度 $v=1\text{km/s}, \sqrt{10}\text{km/s}, 10\text{km/s}$ 、各時間 $T=0,1,2,3,4,5,10,20,30$ について変形率を求め(表 8.1)、グラフにまとめた(図 8.5)。変形率とは変形後の粒子を表した図 8.6に示されている高さ b を衝突面直径 a で割った値 b/a で定義した。

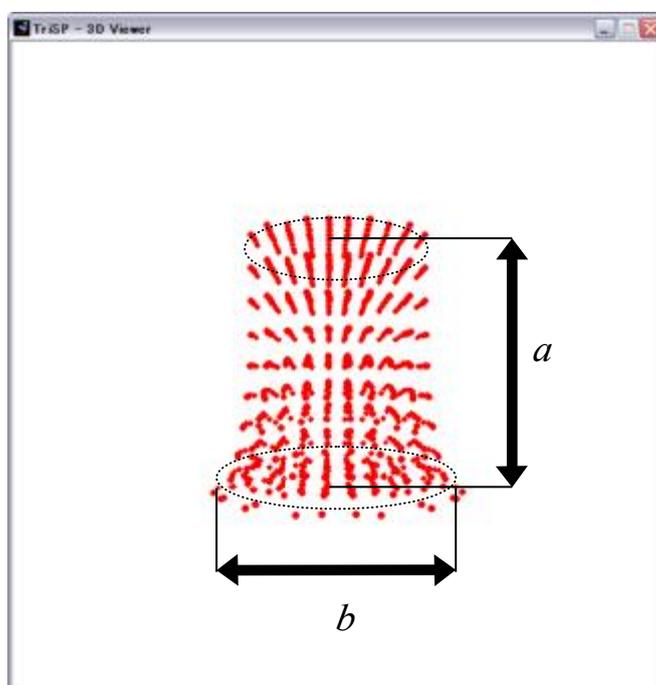


図 8.6 変形率の定義

表 8.1 各速度、時間においての変形率

v	$1km/s$			$\sqrt{10} km/s$			$10km/s$		
	a	b	b/a	a	b	b/a	a	b	b/a
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1	8.95	9.12	1.02	8.95	9.38	1.05	8.95	10.5	1.17
2	8.45	9.88	1.17	8.45	11.1	1.32	8.80	12.6	1.43
3	7.95	11.3	1.42	7.96	13.1	1.64	9.20	14.7	1.60
4	7.45	12.9	1.72	7.56	14.9	1.97	9.51	16.7	1.75
5	6.95	14.5	2.08	7.30	16.7	2.30	9.69	18.8	1.94
10	5.10	22.3	4.40	5.87	27.1	4.62	10.3	28.5	2.78
20	4.65	38.5	8.26	13.7	49.1	3.60	11.7	47.5	4.11
30	4.47	54.5	12.2	21.3	71.1	3.34	13.44	67.1	5.00

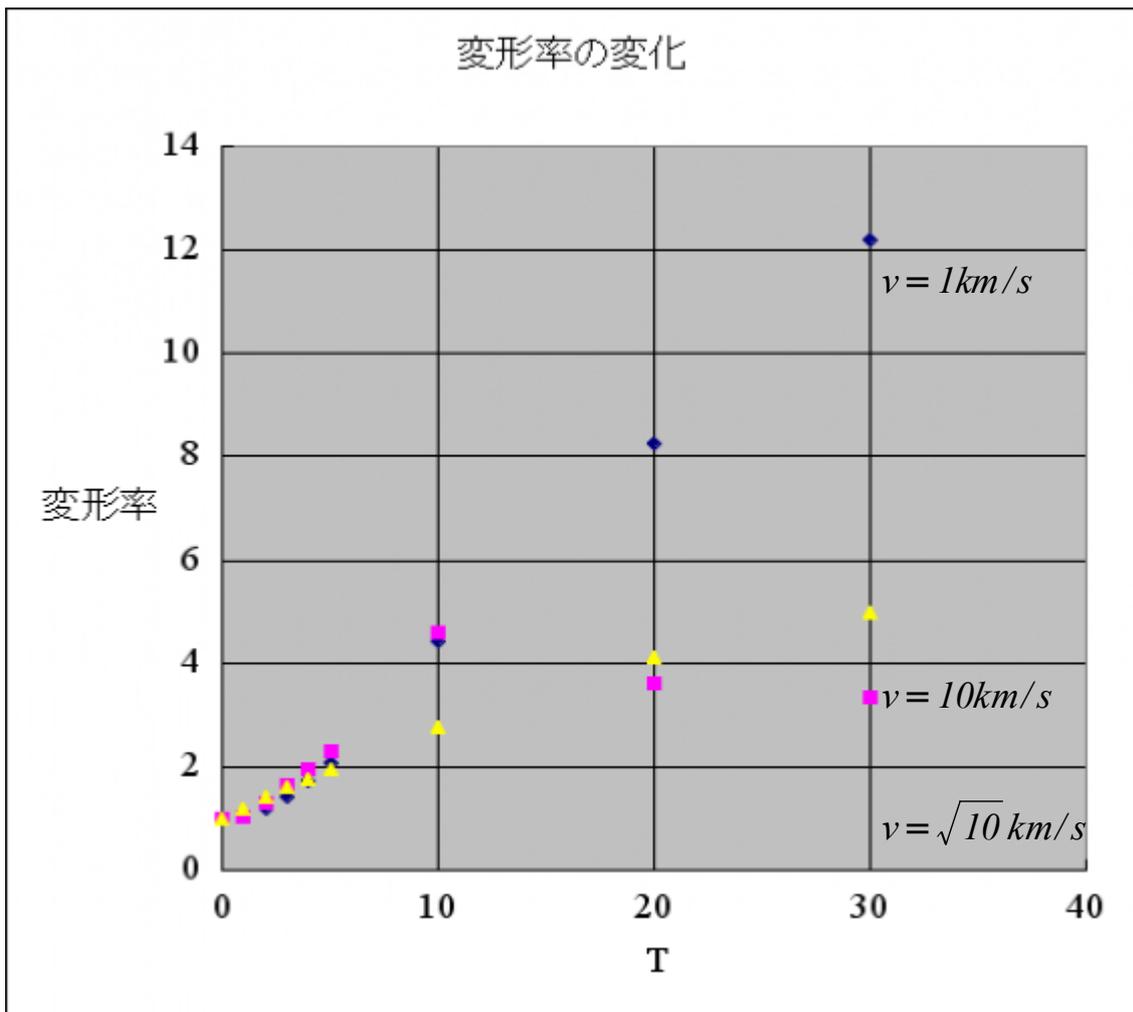


図 8.5

$v = 1\text{km/s}, \sqrt{10}\text{km/s}, 10\text{km/s}$ とそれぞれ異なった変形曲線が描かれた。

$v = 1\text{km/s}$ の曲線から、ある程度時間が経過しても変形の進行が止まらないことが分かる。一次関数的な増加が続いているため、このシミュレーションからは流体的な性質が見て取れた。 $v = \sqrt{10}\text{km/s}, 10\text{km/s}$ に関しては変形率の最大値が存在する可能性が非常に高い結果となった。 $v = 10\text{km/s}$ については $T = 30$ 以降に最大値を持つことが予想され、それ以上は変形しないという弾塑性体としての性質が見て取れる結果となった。

8.3 物性の違いによる変形過程

8.1節と同様の状態方程式と値を用いて、鉄を弾塑性体とみなした場合と流体とみなした場合の変形の様子を比較する。ただし、衝突速度は $v = 10\text{km/s}$ で統一し、鉄を流体とみなす場合はGruneisenパラメータを $\gamma = 0$ としてシミュレーションを行なった (図 8.7～8.9)。

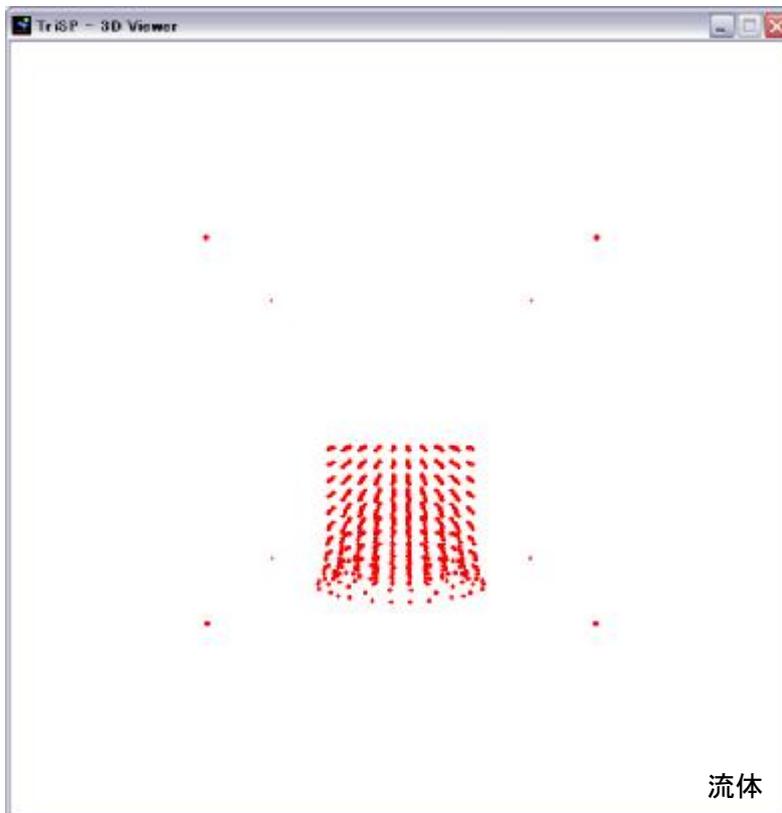
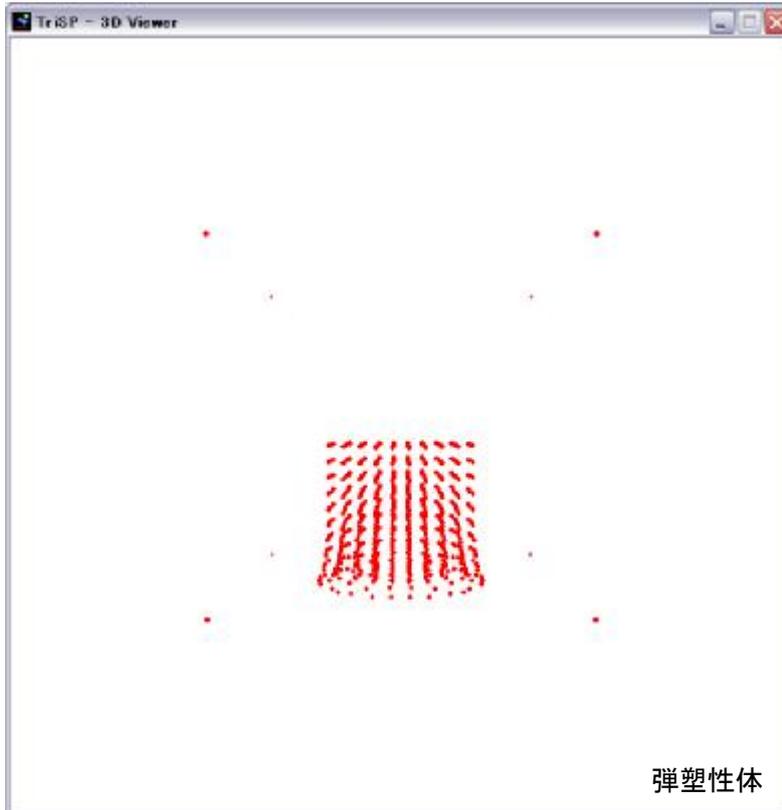


图 8.7 $T=1$

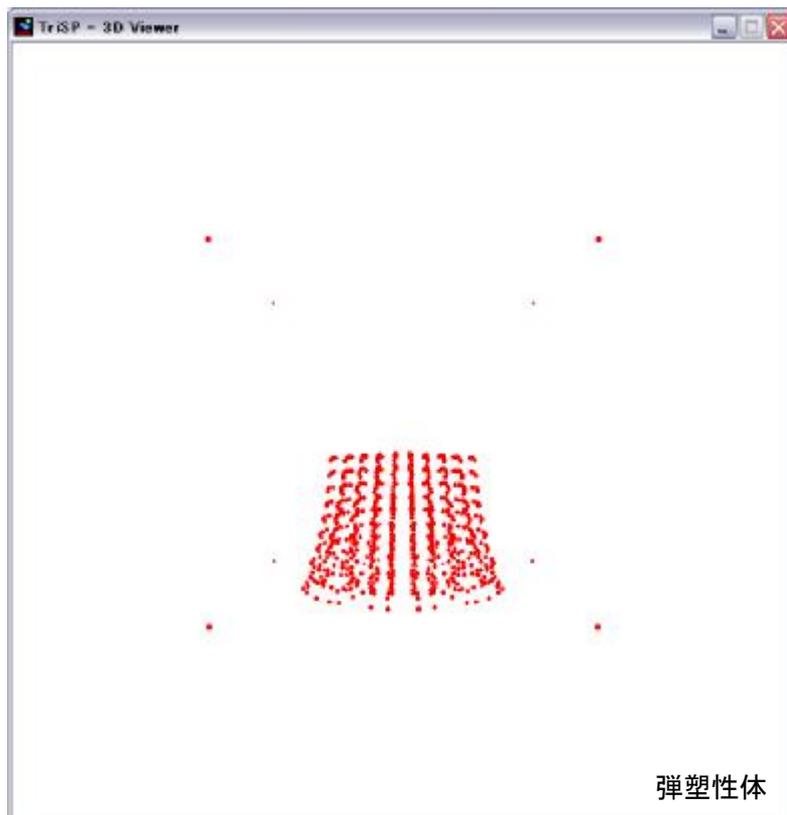


图 8.8 $T=2$

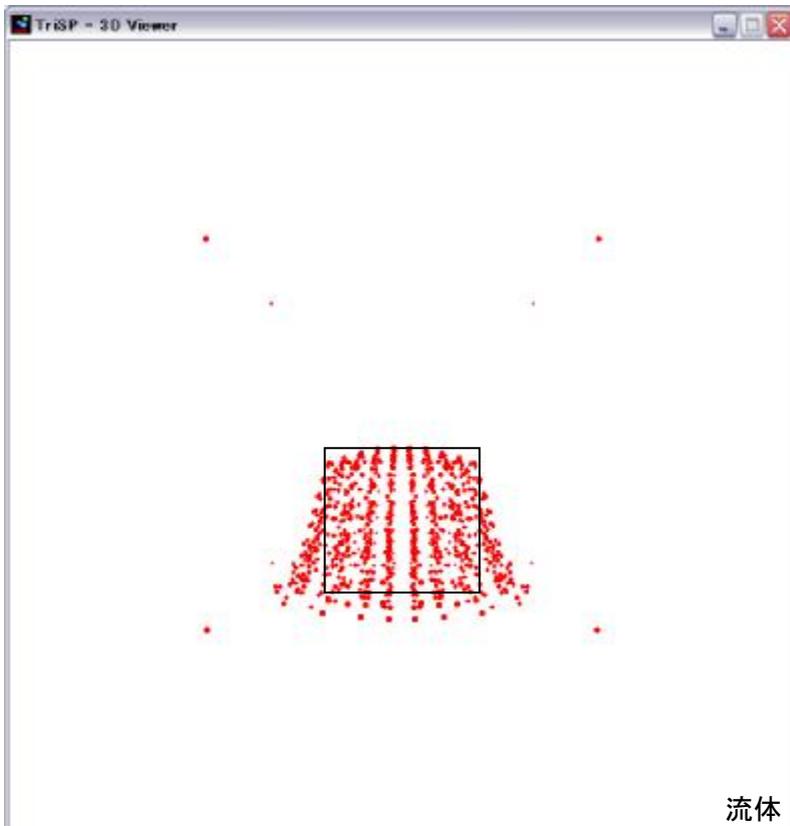
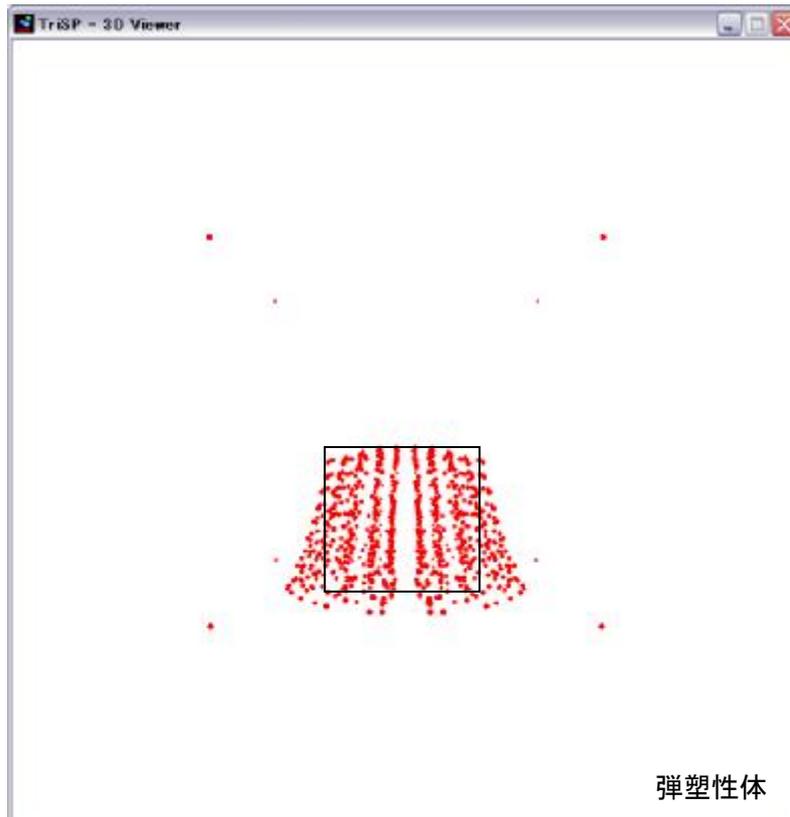


图 8.9 $T=3$

弾塑性体としての変形と流体としての変形を比べると、流体と見たときの方が変形の度合いが大きい。また、変形の度合いだけではなく、変形後の形からも違いが見られる。物性以外の条件は同じであるため、シミュレーションを行なう際には物性について十分な持論が必要であるといえる。

第9章 圧力分布

9.1 圧力分布

衝突の際に生じる圧力の分布を調べるため、プログラムから各粒子の圧力を出力してプロットした。弾塑性体は衝突後ある程度時間が進むと、単位時間あたりの変形が小さくなり、圧力は限りなく0に近づく。したがって、衝突直後の無次元化時間 $T=0$ から $T=1$ まで、0.2刻みで圧力分布を調べることにした。天体衝突に近いスケールでシミュレーションを行うため、速度を8章同様 Rankine-Hugoniot 状態方程式を用い、 $v=1\text{km/s}, \sqrt{10}\text{km/s}, 10\text{km/s}$ の3通りについて調べる。初期状態を図9.1に示す。なお、圧力の値によって色分けを行い、 $0\sim 2\text{GPa}$ の粒子を青、 $2\sim 8\text{GPa}$ を紫、 $8\sim 32\text{GPa}$ を橙、 $32\text{GPa}\sim$ を赤とした。

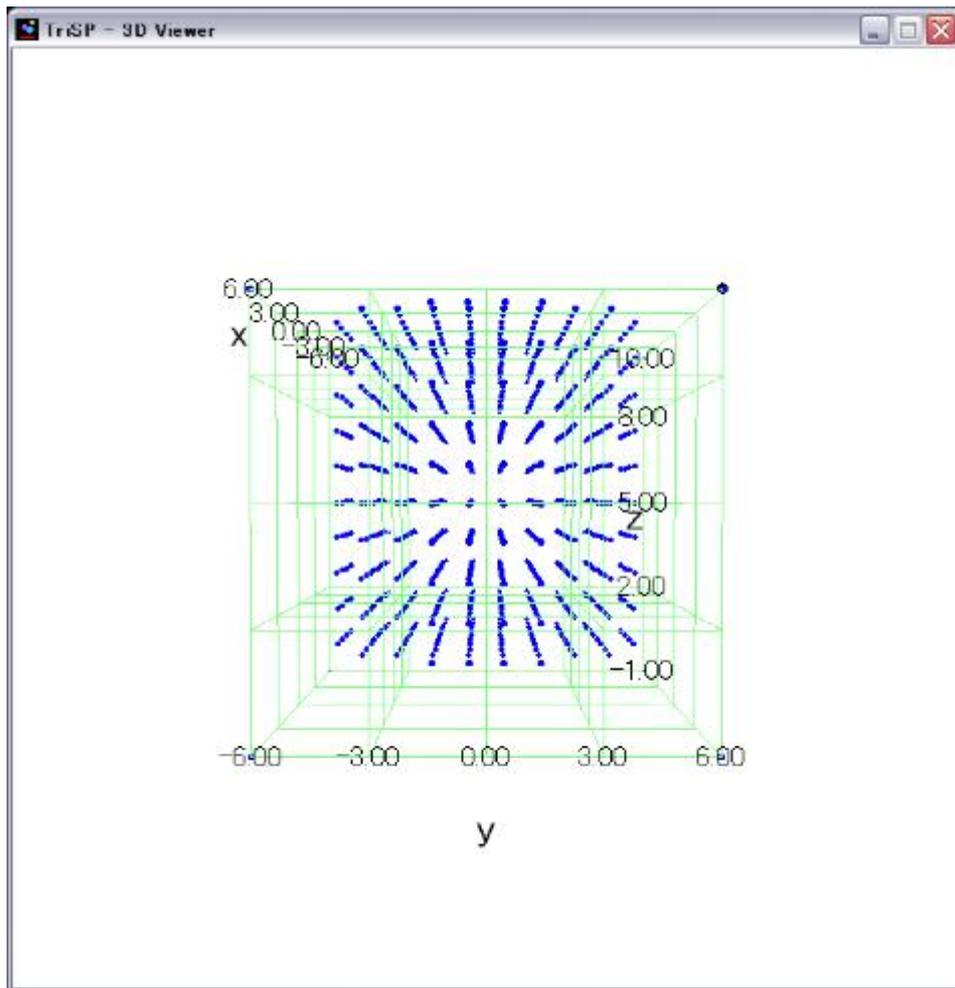


図9.1 初期状態 ($T=0$) の圧力分布 全粒子が圧力0である。

(1) $v = 1\text{km/s}$ の圧力分布 (図 9.2~9.6)

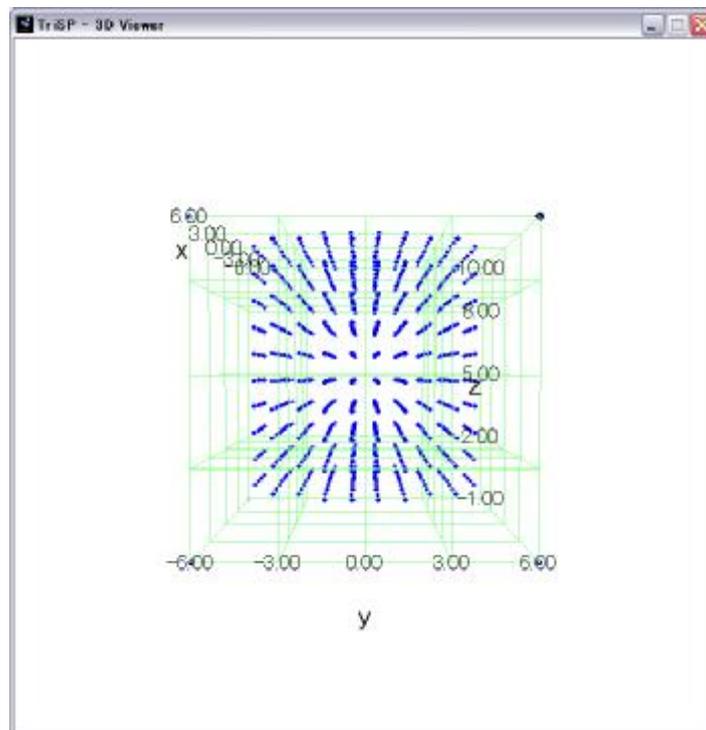


図 9.2 $T = 0.2$

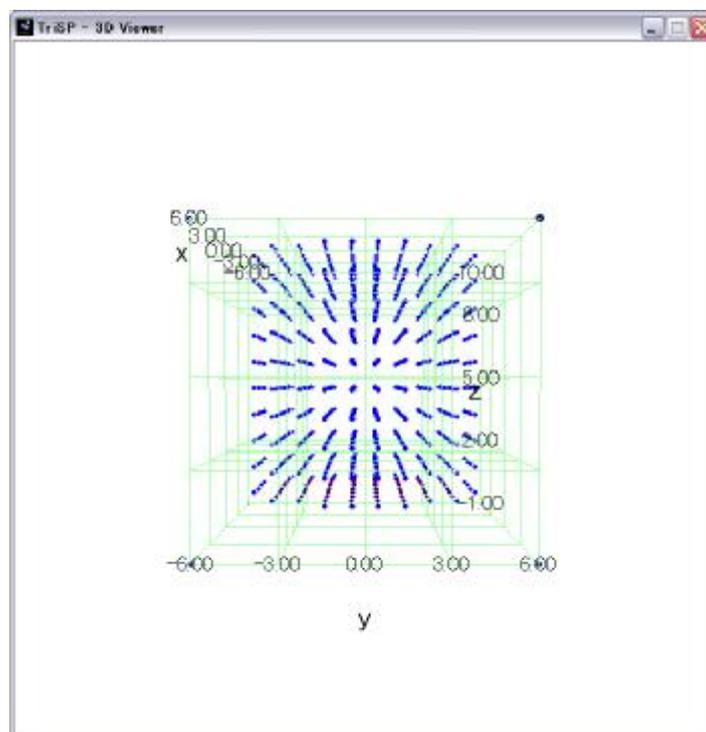


図 9.3 $T = 0.4$

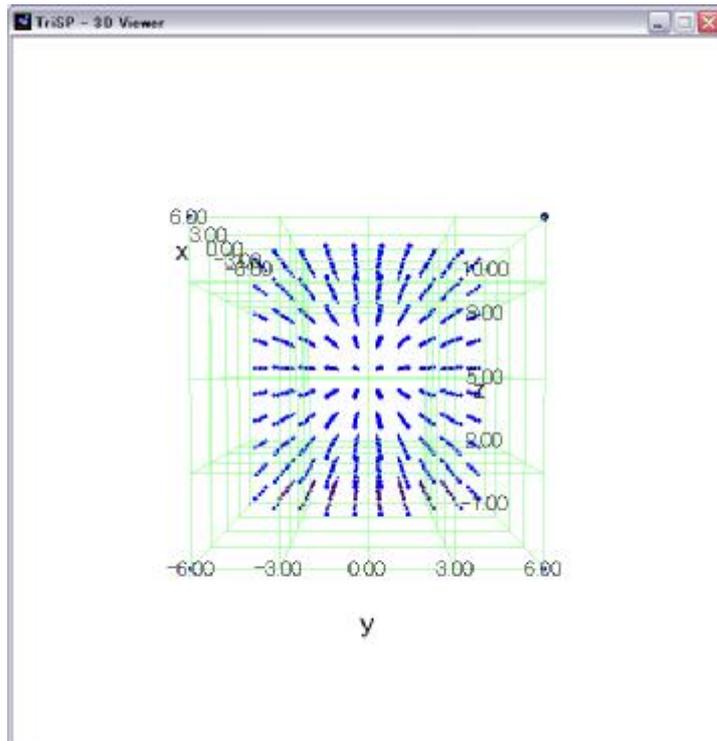


图 9.4 $T=0.6$

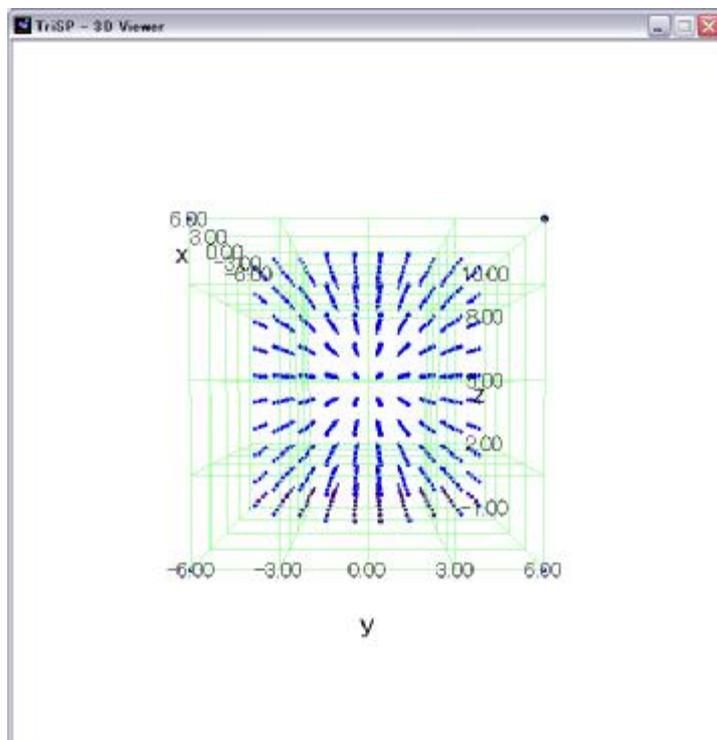


图 9.5 $T=0.8$

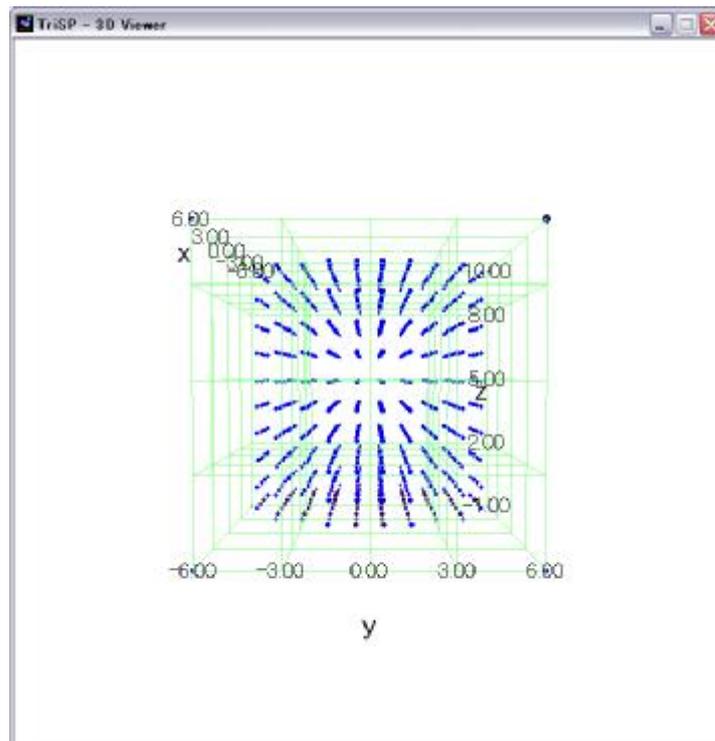


図 9.6 $T = 1.0$

$T = 0.4$ 付近から $2 \sim 8 GPa$ の圧力が出ていることが見て取れる。その後、図の中での変化は見られないが、次の節で更に詳しい圧力分布を調べる。

(2) $v = \sqrt{10} \text{ km/s}$ の圧力分布 (図 9.7~9.11)

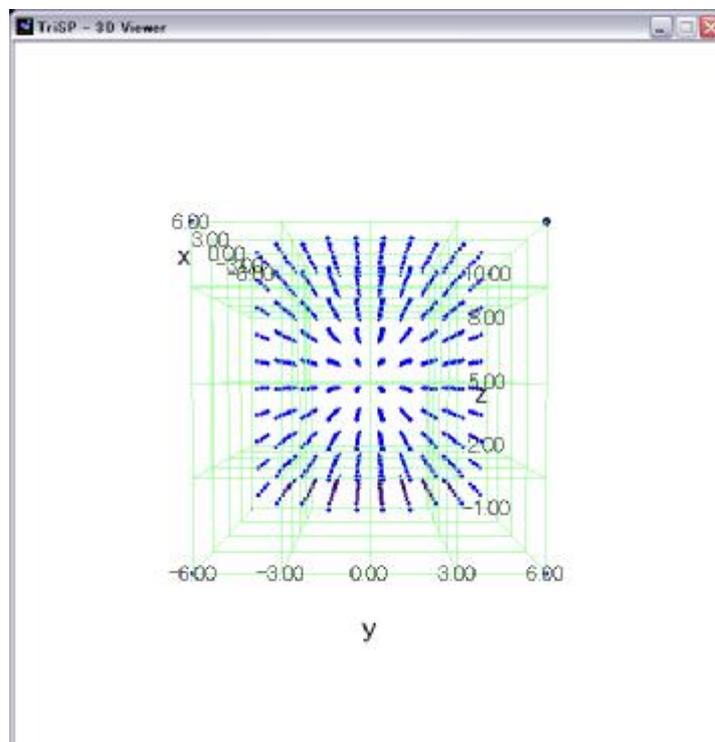


図 9.7 $T=0.2$

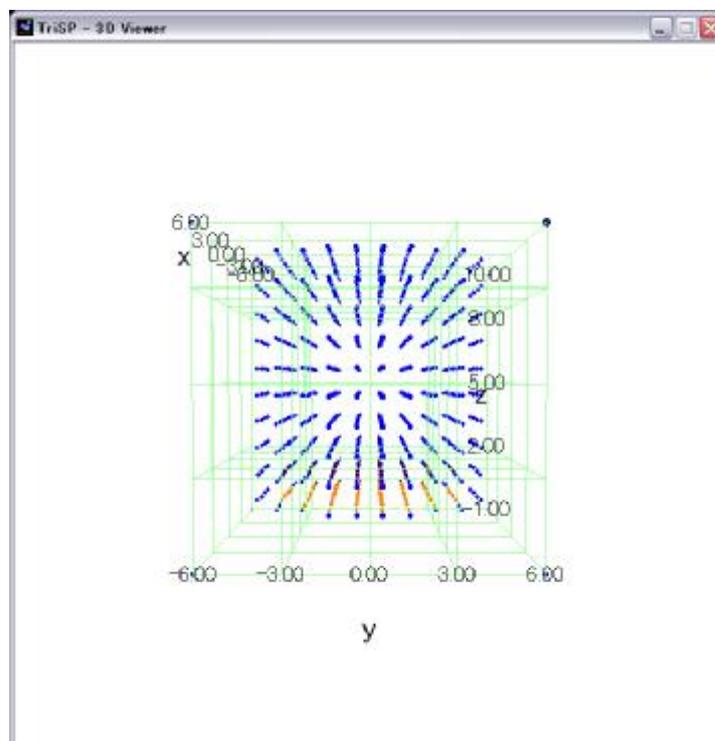


図 9.8 $T=0.4$

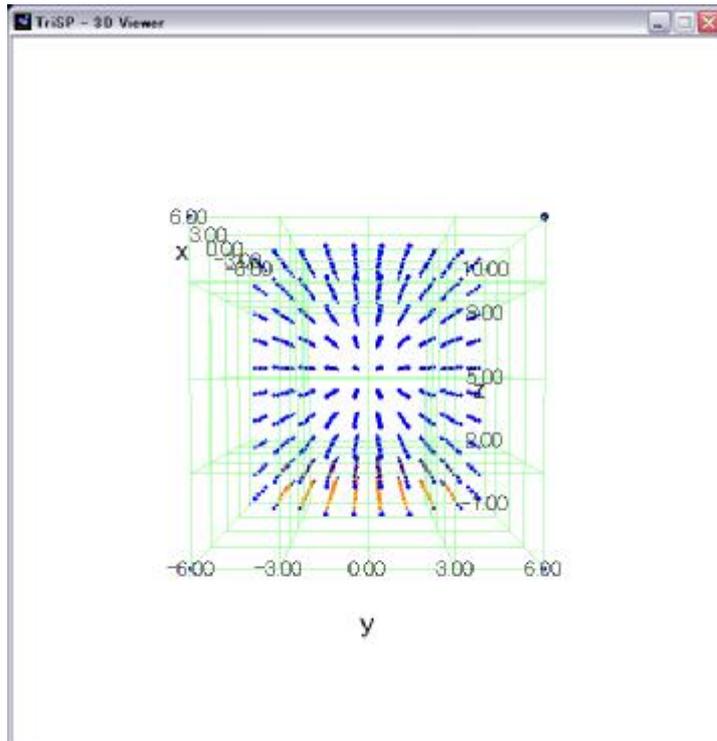


图 9.9 $T=0.6$

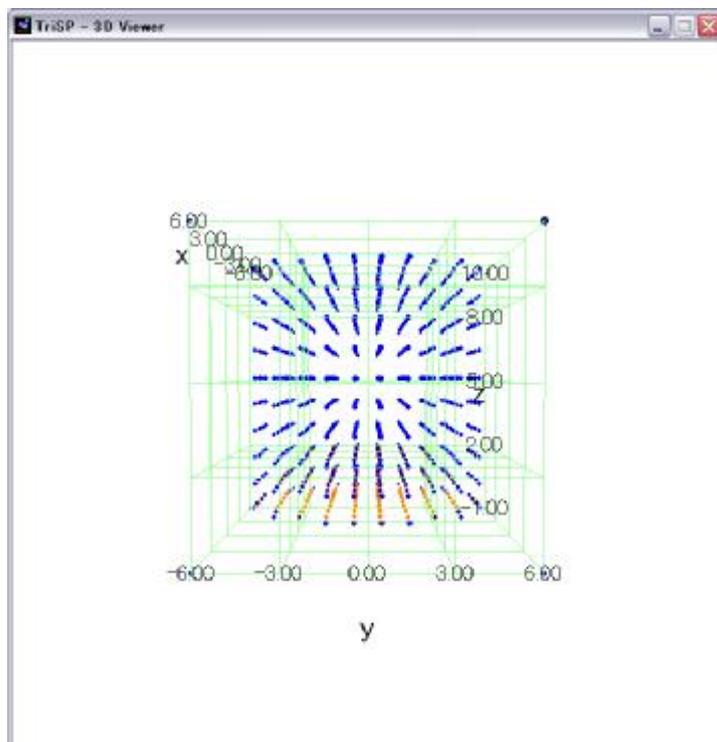


图 9.10 $T=0.8$

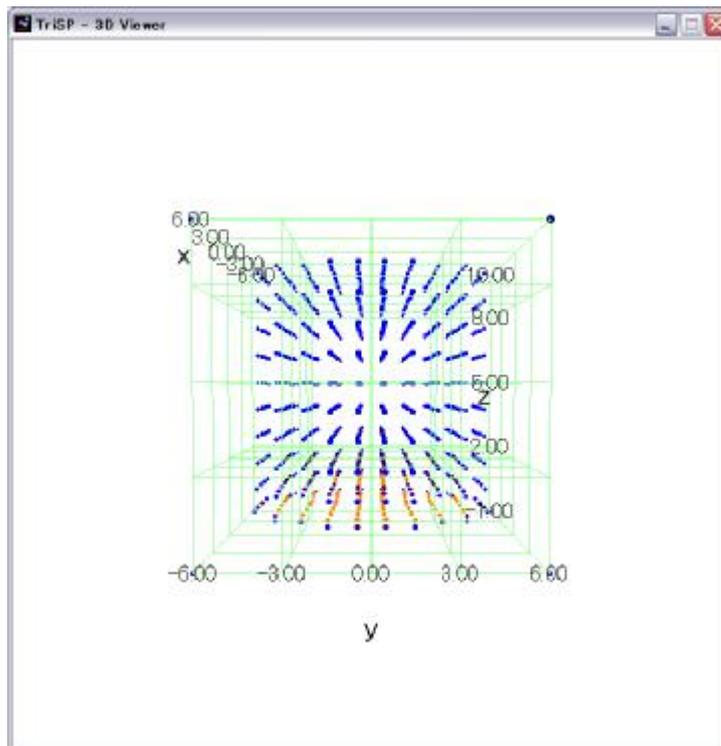


図 9.11 $T = 1.0$

衝突直後に $2 \sim 8 GPa$ の圧力が始まり、時間経過とともに衝突面中心から更に強い圧力が出ている様子が分かる。 $T = 1.0$ では最大で $32 GPa \sim$ もの圧力が見られ、発生した圧力が次第に周りの粒子にも伝わっていることが分かる。

(3) $v = 10\text{km/s}$ の圧力分布 (図 9.12~9.16)

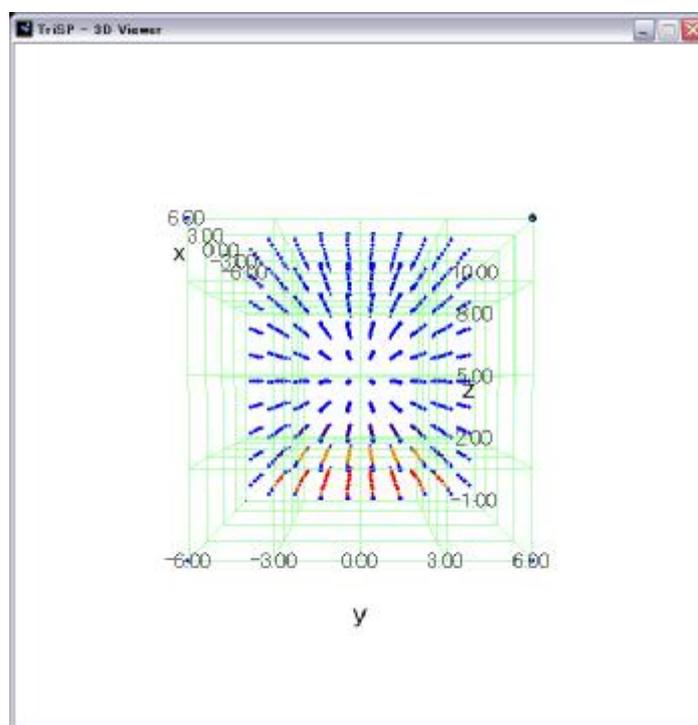


図 9.12 $T = 0.2$

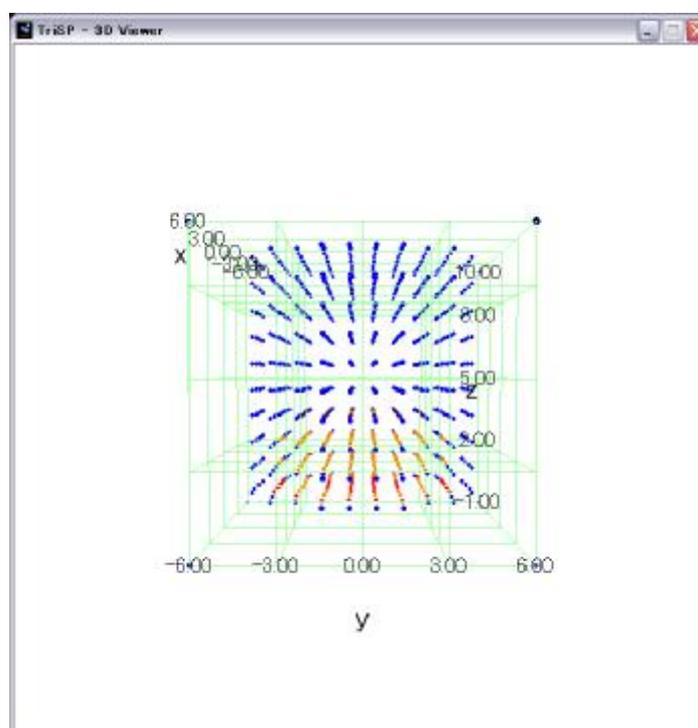


図 9.13 $T = 0.4$

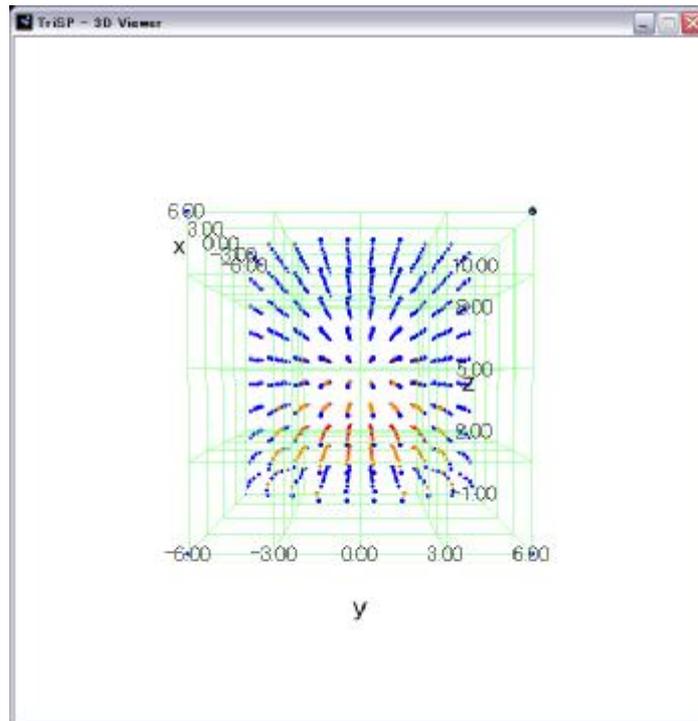


图 9.14 $T=0.6$

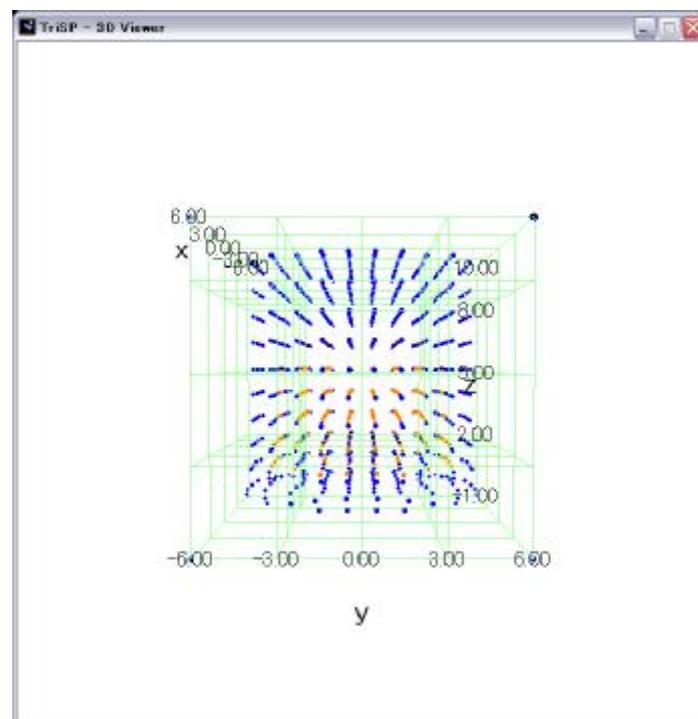


图 9.15 $T=0.8$

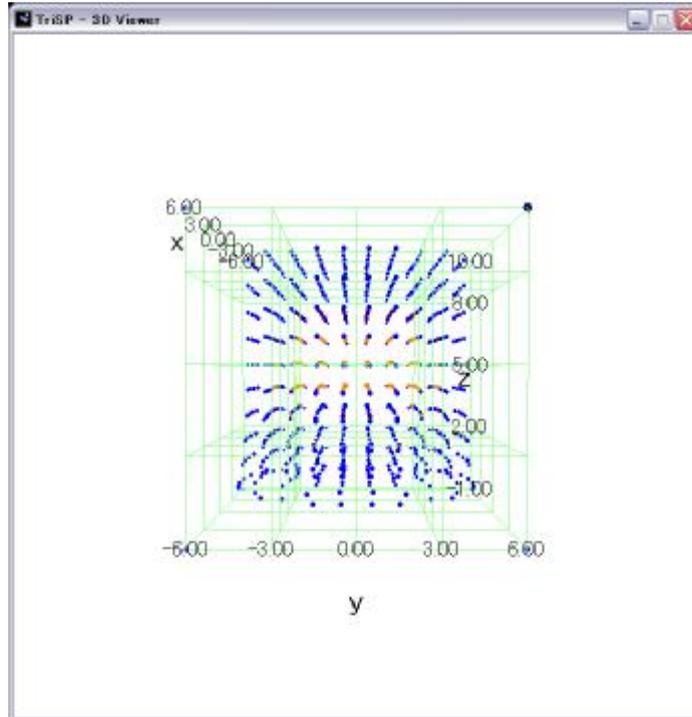


図 9.16 $T = 1.0$

衝突の瞬間から $32\text{GPa}\sim$ の非常に強い圧力が見られる。また、時間経過とともに圧力が周りの粒子に伝わるだけでなく、粒子上部へ面として移動していることも分かる。

9.2 圧力分布と各パラメータ

どの速度も密度が集中していると考えられる中央部分の圧力大きくなっているようだが、更に詳しい分布を調べるために初期状態において x, y 座標が 0 に近い一列の粒子

(図 9.17に示す青い粒子一列) に着目して $v = 1\text{km/s}$ で衝突した場合の $T = 1.0$ (図 9.6) における圧力、密度、速度を出力してまとめた (表 9.1)。相対速度は基準を $v = 0.5$ として算出した。表 9.1より、 z 座標と圧力の関係についてグラフに描いた (図 9.18)。

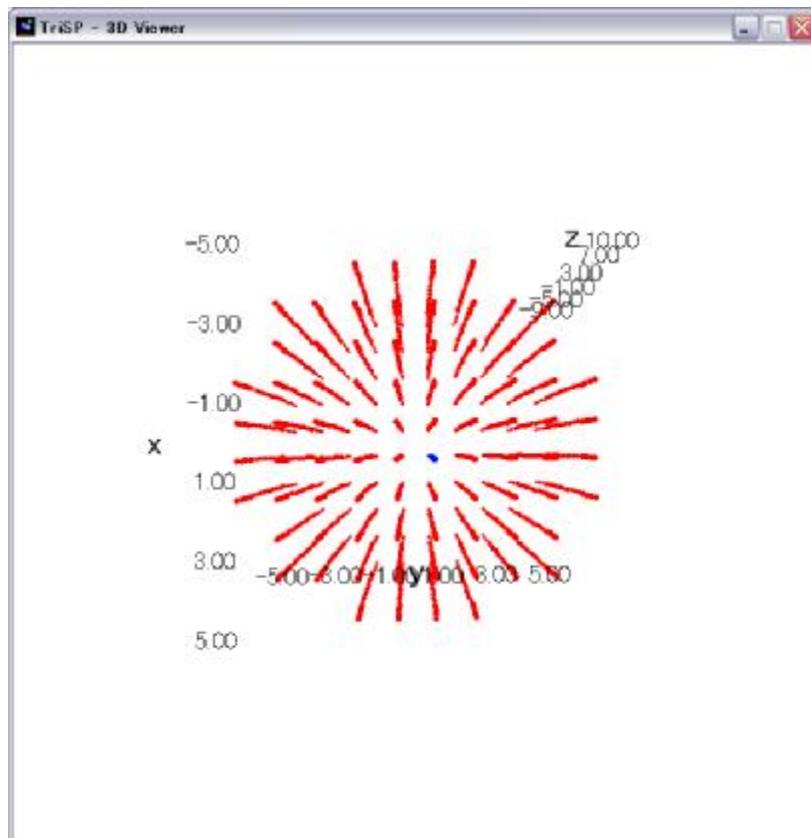


図 9.17 $T = 0$ における xy 平面を見下ろした状態。青い粒子に着目

表 9.1より、中心の粒子ほど相対速度が小さく、密度が大きい粒子ほど圧力も大きいため、これは理論的にも妥当である。また、図 9.18を見ると、図 9.2~9.6 ではほとんど変化が見られなかった圧力が中心部ほど指数的に大きく出ている様子が分かる。これらのことから、圧力の点ではある程度信頼できる演算をしていることがうかがえる。

x 座標	y 座標	z 座標	圧力	速度	相対速度	密度
0.5	0.5	0.3	3.3	-0.3	0.2	1.4
0.5	0.5	1.1	1.3	-0.3	0.2	1.2
0.5	0.5	2	0.5	-0.8	0.3	1.1
0.5	0.5	3	0.1	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	4	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	5	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	6	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	7	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	8	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	9	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	-0.3	3.3	-0.7	0.2	1.4
0.5	0.5	-1.1	1.3	-0.7	0.2	1.2
0.5	0.5	-2	0.5	-0.2	0.3	1.1
0.5	0.5	-3	0.1	0	0.5	1
0.5	0.5	-4	0	0	0.5	1
0.5	0.5	-5	0	0	0.5	1
0.5	0.5	-6	0	0	0.5	1
0.5	0.5	-7	0	0	0.5	1
0.5	0.5	-8	0	0	0.5	1
0.5	0.5	-9	0	0	0.5	1

表 9.1 $x=y=0$ 近傍の粒子一列における各パラメータ

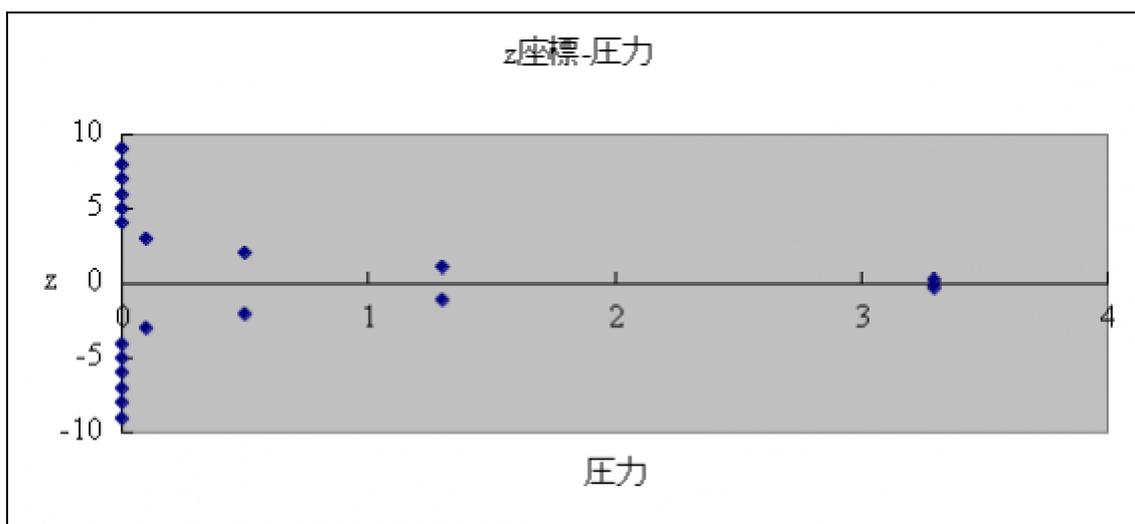


図 9.18

次に、Tillotson 状態方程式をプログラムに導入し、同じ条件でシミュレーションを行った。表 9.2 は x, y 座標が 0 に近い一列の粒子に着目して $v = 1 \text{ km/s}$ で衝突した場合の $T = 1.0$ における圧力、密度、速度を出力して衝突体の粒子のみをまとめたものである。

$a, b, A, B, \alpha, \beta, E_0, E_{iv}, E_{cv}$ の値としては以下のものを用いた【Melosh 1989】。

$$a = 0.5, b = 1.5, \alpha = 5, \beta = 5$$

$$A = 128 \text{ Gpa}, B = 105 \text{ Gpa}$$

$$E_0 = 9.5 \text{ MJ/kg}, E_{iv} = 2.4 \text{ MJ/kg}, E_{cv} = 8.7 \text{ MJ/kg}$$

Tillotson 状態方程式

$$P = \left\{ a + \frac{b}{\left(\frac{E}{(E_0 \eta^2)} + 1 \right)} \right\} \rho E + A(1 + \eta) + B(1 + \eta)^2 \quad \text{if } E < E_{iv}$$

$$P = a \rho E + \left\{ \frac{b}{\left(\frac{E}{(E_0 \eta^2)} + 1 \right)} + A(1 + \eta) e^{-\beta(\rho_0/\rho - 1)} \right\} e^{-\alpha(\rho_0/\rho - 1)^2} \quad \text{if } E > E_{cv}$$

$$P = \left\{ (E - E_{iv}) P_E + (E_{cv} - E) P_C \right\} / (E_{cv} - E_{iv}) \quad \text{if } E_{iv} \leq E \leq E_{cv}$$

表 9.2 $x = y = 0$ 近傍の粒子一列における各パラメータ

x 座標	y 座標	z 座標	圧力	速度	相対速度	密度
0.5	0.5	0.3	0.64	-0.3	0.2	1.4
0.5	0.5	1.1	0.22	-0.3	0.2	1.2
0.5	0.5	2	0.07	-0.8	0.3	1.1
0.5	0.5	3	0.02	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	4	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	5	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	6	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	7	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	8	0	-1.0	0.5	1
0.5	0.5	9	0	-1.0	0.5	1

表 9.1 と表 9.2 を比較すると、速度と密度については Rankine-Hugoniot 状態方程式と同様の結果が得られ、圧力が大幅に減少したようである。表 9.2 の数値を図 9.18 に重ねた(図 9.19)。

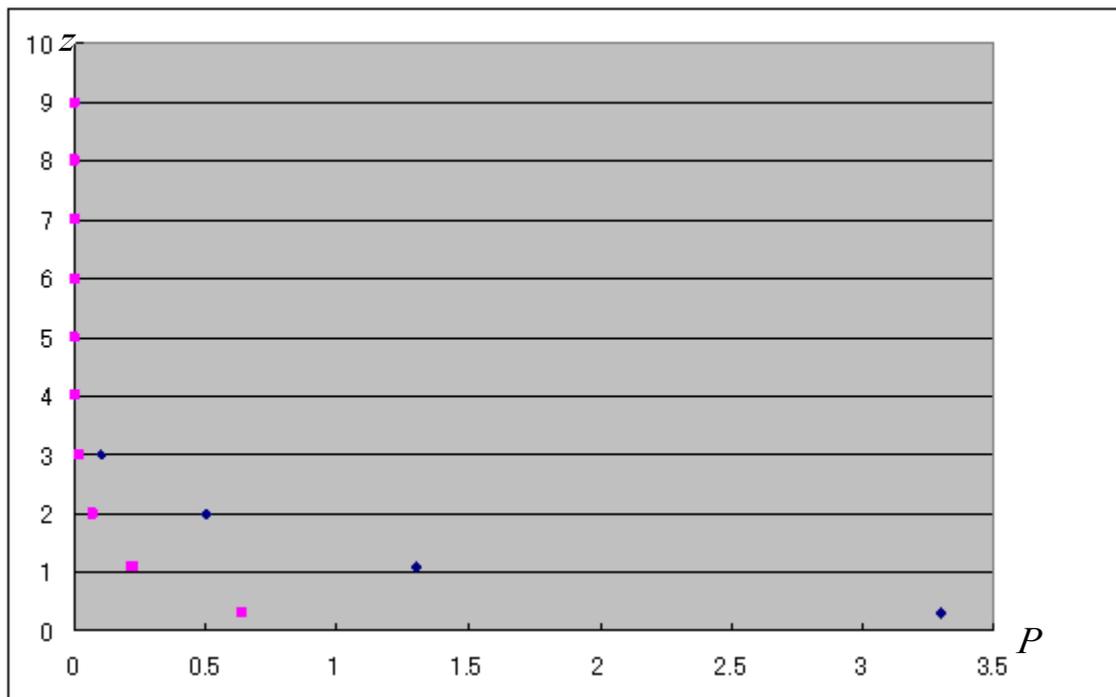


図 9.19

第10章 結論

10.1 本研究の成果

本研究では、三次元の記述がなされているプログラムに対して三次元での散布図を作成した。これは空間的な物体の運動を考える上ではたいへん重要である。また、物体の変形をある時間系だけでなく、連続的に表現することで、変形過程を議論することが可能となった。それに加え、圧力分布を調べることで、座標の変化とは異なる内部エネルギーの視点で天体衝突を表現することができた。また、速度や物性によって変形にどのような違いが生じるかということも議論することができた。これらが本研究の成果である。

10.2 今後の課題

変形過程において、速度が小さいにもかかわらず流体としての変形が見られる場面があった。この原因を解明することが課題の一つに挙げられる。また、内部エネルギーの変化を議論するには圧力のみ記述では不十分である。内部温度の表現をするには内部エネルギーの総和を表現していく必要がある。

今回使用したプログラムが天体衝突の表現をするのに適当であるかについては、状態方程式や弾性変形の面からもまだ議論が必要であると考えている。

謝辞

本研究を行うにあたり、御指導をしてくださいました高田淑子教授をはじめ、年間を通してともに学んだ同研究室の門脇駿君、桑原永介君、ならびに私を支えてくださった多くの関係者の方々に深く御礼申し上げます。

参考文献

- Melosh, H. J (1989) : 「Stress Waves in Solids」 in Impact Cratering 37-57, 229
Oxford Monographs on Geology and Geophysics No.11
- Monaghan, J. J (1992) : 「Smoothed Particle Hydrodynamics」 543-550
- Turcotte, D. L & Schubert, G (1982) : 「Geodynamics-Applications of continuum Physics
to geological problems」 in Elastic and Flexure.
105-129 J. Wiley & Sons
- Wingate, A. C & Fisher, H. N (1991) : 「Strength Modeling in SPHC」 Los Alamos National
Laboratory
- 国尾武 (1977) : 「固体力学の基礎」 29-53 培風館
- 恒藤敏彦 (1983) : 「弾性体と流体」 218-229 岩波書店
- ジャーガー, J. C : 訳 飯田汲事 (1980) 「弾性・破壊・流動論」 1-5, 96-97 共立出版
- 杉江日出澄・岡崎明彦・足達義則・尾崎正弘 (1986) : 「FORTRANによる数値計算法」 91-94
培風館
- ファン, Y. C (1970) : 共訳 大橋義夫・村上澄男・神谷紀生「固体の力学／理論」 93-
96, 447-455 培風館
- 松井孝典 (1993) : 「宇宙誌」 225-233 得間書店
- 松井孝典 (1997) : 「比較惑星学」 87-118 岩波書店
- 戸田盛和 (1994) : 「流体力学30講」 1-26 朝倉書店
- 矢部孝・観山正見・椛島成治 (1992) : 「パソコンによるシミュレーション物理」 60-68
朝倉書店
- 山口伯樹 (1975) : 「弾・塑性力学」 2-5, 17-22, 42-47, 190-202 森北出版
- 吉田総仁 (1997) : 「弾塑性力学の基礎」 10-11, 38-49, 140-141 共立出版

資料

define.h

SPH Cプログラム(Rankine-Hugoniot 状態方程式)

SPH Cプログラム(Tillotson 状態方程式)

三次元散布図ソフト

```
/*define.h*/
```

```
#define Num 1600  
#define num1 26  
#define dltt .04  
#define Nz2 10  
#define Nz1 10  
#define Vx 0  
#define Vy 0  
#define Vz1 0  
#define M1 1  
#define u0 0  
#define M2 1  
#define Vz2 -1  
#define pi 3.14  
#define h 1  
#define rho0 1  
#define C .8  
#define S 1.6  
#define Ys .0032  
#define G 1.8
```

各値の説明

Num 全粒子数
num1 計算回数
d1tt 分割時間
Nz2 衝突体粒子数 (高さ方向)
Nz1 非衝突体粒子数 (高さ方向)
Vx 非衝突体速度
Vy
Vz1
M1 非衝突体 1 粒子の質量
u0 初期エネルギー
M2 非衝突体 1 粒子の質量
Vz2 衝突体速度
pi 円周率
h 衝突体高さ
rho0 衝突体密度
C 考えている物体の音速
S 物体固有値
Ys 降伏応力
G Gruneisenパラメータ

```

/*SPH C-Program(Rankine-Hugoniot)*/
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include"def.h"

short i, j, l, m, n;
double Y[13][Num];
double dY[13][Num];
double Mass[Num];
double W[Num][Num];
double rho[Num];
double Ph[Num];
double P[Num];
double eh[Num];
double c[Num];
double Z, Q;
double d1[13][Num];
double d2[13][Num];
double d3[13][Num];
double d4[13][Num];
double Ya[13][Num];
double Exx, Eyy, Ezz, Exy, Eyz, Ezx;
double Rxy, Ryz, Rzx;
double toE[num1];
double ke[num1], ie[num1];
double ratE;
double f[Num];
double J2, Ys2;
double myu[Num];
float t1;
int a;

main()
{
    routin1();
    routin2();
    dataout();
    for(a=0;a<num1;++a)
    {
        t1=a*dltt;

```

```

    routin3();
    routin4();
    rk01();
    routin3();
    routin4();
    rk02();
    routin3();
    routin4();
    rk03();
    routin3();
    routin4();
    rk04();
    EnergyCons();
    routin3();
    dataout();
}
}

```

```

routin1()
{
    for (m=0;m<5;++m)
    {
        if (m<2)
        {
            for (l=0;l<5;++l)
            {
                for (n=0;n<Nz2;++n)
                {
                    i=m*5*Nz2+l*Nz2+n*1;
                    Y[0][i]=1+0.5;
                    Y[1][i]=m+0.5;
                    Y[2][i]=n+1;
                }
            }
        }
        if (m==2)
        {
            for (l=0;l<4;++l)
            {
                for (n=0;n<Nz2;++n)
                {
                    i=m*5*Nz2+l*Nz2+n*1;

```

```

        Y[0][i]=1+0.5;
        Y[1][i]=m+0.5;
        Y[2][i]=n+1;
    }
}
if(m>2)
{
    if(m==3)
    {
        for(l=0;l<4;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz2;++n)
            {
                i=m*5*Nz2-Nz2+l*Nz2+n*1;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=n+1;
            }
        }
    }
    else
    {
        for(l=0;l<2;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz2;++n)
            {
                i=m*5*Nz2-2*Nz2+l*Nz2+n*1;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=n+1;
            }
        }
    }
}
for(m=0;m<5;++m)
{
    if(m<2)
    {
        for(l=0;l<5;++l)
        {

```

```

        for (n=0;n<Nz1;++n)
            {
                i=m*5*Nz1+1*Nz1+n*1+Nz2*20;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=-n;
            }
    }
}
if (m==2)
{
    for (l=0;l<4;++l)
    {
        for (n=0;n<Nz1;++n)
        {
            i=m*5*Nz1+1*Nz1+n*1+Nz2*20;
            Y[0][i]=1+0.5;
            Y[1][i]=m+0.5;
            Y[2][i]=-n;
        }
    }
}
if (m>2)
{
    if (m==3)
    {
        for (l=0;l<4;++l)
        {
            for (n=0;n<Nz1;++n)
            {
                i=m*5*Nz1-Nz1+1*Nz1+n*1+Nz2*20;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=-n;
            }
        }
    }
}
else
{
    for (l=0;l<2;++l)
    {
        for (n=0;n<Nz1;++n)

```

```

        {
            i=m*5*Nz1-2*Nz1+1*Nz1+n*1+Nz2*20;
            Y[0][i]=1+0.5;
            Y[1][i]=m+0.5;
            Y[2][i]=-n;
        }
    }
}
}
for (i=0;i<Num/4;++i)
{
    Y[0][i+Num/4]=-Y[0][i];
    Y[1][i+Num/4]=Y[1][i];
    Y[2][i+Num/4]=Y[2][i];
}
for (i=0;i<Num/2;++i)
{
    Y[0][i+Num/2]=Y[0][i];
    Y[1][i+Num/2]=-Y[1][i];
    Y[2][i+Num/2]=Y[2][i];
}
}

routin2()
{
    for (i=0;i<Num/4;++i)
    {
        Y[3][i]=Vx;
        Y[4][i]=Vy;
        Y[5][i]=Vz1;
        Mass[i]=M1;
        Y[6][i]=u0;
        Y[7][i]=0.;
        Y[8][i]=0.;
        Y[9][i]=0.;
        Y[10][i]=0.;
        Y[11][i]=0.;
        Y[12][i]=0.;
        Mass[i+Num/4]=Mass[i];

        if (i<200)

```

```

    {
        Mass[i]=M2;
        Mass[i+Num/4]=Mass[i];
        Y[5][i]=Vz2;
    }
}
for (i=0;i<Num/2;++i)
    {
        Mass[i+Num/2]=Mass[i];
    }
}

```

```

routin3()
{
    double r2;
    double Y0ij,Y1ij,Y2ij;
    for (i=0;i<Num/4;++i)
        {
            Y[0][i+Num/4]=-Y[0][i];
            Y[1][i+Num/4]=Y[1][i];
            Y[2][i+Num/4]=Y[2][i];
            Y[3][i+Num/4]=-Y[3][i];
            Y[4][i+Num/4]=Y[4][i];
            Y[5][i+Num/4]=Y[5][i];
            Y[6][i+Num/4]=Y[6][i];
            Y[7][i+Num/4]=-Y[7][i];
            Y[8][i+Num/4]=Y[8][i];
            Y[9][i+Num/4]=Y[9][i];
            Y[10][i+Num/4]=-Y[10][i];
            Y[11][i+Num/4]=Y[11][i];
            Y[12][i+Num/4]=-Y[12][i];
        }
    for (i=0;i<Num/2;++i)
        {
            Y[0][i+Num/2]=Y[0][i];
            Y[1][i+Num/2]=-Y[1][i];
            Y[2][i+Num/2]=Y[2][i];
            Y[3][i+Num/2]=Y[3][i];
            Y[4][i+Num/2]=-Y[4][i];
            Y[5][i+Num/2]=Y[5][i];
        }
}

```

```

Y[6][i+Num/2]=Y[6][i];
Y[7][i+Num/2]=Y[7][i];
Y[8][i+Num/2]=-Y[8][i];
Y[9][i+Num/2]=Y[9][i];
Y[10][i+Num/2]=-Y[10][i];
Y[11][i+Num/2]=-Y[11][i];
Y[12][i+Num/2]=Y[12][i];
}
for(i=0;i<Num/4;++i)
{
rho[i]=0.;
for(j=0;j<Num;++j)
{
Y0ij=Y[0][i]-Y[0][j];
Y1ij=Y[1][i]-Y[1][j];
Y2ij=Y[2][i]-Y[2][j];
r2=pow(Y0ij,2)+pow(Y1ij,2)+pow(Y2ij,2);
W[i][j]=pow((1./ (pi*pow(h,2))),1.5)*exp(-r2/pow(h,2));
rho[i]+=Mass[j]*W[i][j];
}
if(rho[i]<rho0)
{
P[i]=0.;
}
else
{
myu[i]=rho[i]/rho0-1;
Ph[i]=rho0*pow(C,2)*myu[i]*(1+myu[i])/pow(1-(S-1)*myu[i],2);
eh[i]=0.5*(Ph[i]/rho0)*(myu[i]/(1+myu[i]));
if(Y[6][i]<eh[i])
{
P[i]=(1-0.5*myu[i]*1.81)*Ph[i];
}
else
{
P[i]=(1-0.5*myu[i]*1.81)*Ph[i]+1.81*rho[i]*(Y[6][i]-eh[i]);
}
}
J2=pow(Y[7][i],2)+pow(Y[8][i],2)+pow(Y[9][i],2)+
pow(Y[10][i],2)+pow(Y[11][i],2)+pow(Y[12][i],2)+
Y[7][i]*Y[8][i]+Y[8][i]*Y[9][i]+Y[9][i]*Y[7][i];
f[i]=1.;

```

```

    Ys2=pow(Ys, 2);
    if (Ys2<J2*3.)
    {
        f[i]=Ys/sqrt(J2*3.);
    }
    Y[7][i]=f[i]*Y[7][i];
    Y[8][i]=f[i]*Y[8][i];
    Y[9][i]=f[i]*Y[9][i];
    Y[10][i]=f[i]*Y[10][i];
    Y[11][i]=f[i]*Y[11][i];
    Y[12][i]=f[i]*Y[12][i];
    }
for (i=0;i<Num/4;++i)
{
    rho[i+Num/4]=rho[i];
    c[i+Num/4]=c[i];
    P[i+Num/4]=P[i];
    f[i+Num/4]=f[i];
    Y[7][i+Num/4]=-Y[7][i];
    Y[8][i+Num/4]=Y[8][i];
    Y[9][i+Num/4]=Y[9][i];
    Y[10][i+Num/4]=-Y[10][i];
    Y[11][i+Num/4]=Y[11][i];
    Y[12][i+Num/4]=-Y[12][i];
}
for (i=0;i<Num/2;++i)
{
    rho[i+Num/2]=rho[i];
    c[i+Num/2]=c[i];
    P[i+Num/2]=P[i];
    f[i+Num/2]=f[i];
    Y[7][i+Num/2]=Y[7][i];
    Y[8][i+Num/2]=-Y[8][i];
    Y[9][i+Num/2]=Y[9][i];
    Y[10][i+Num/2]=-Y[10][i];
    Y[11][i+Num/2]=-Y[11][i];
    Y[12][i+Num/2]=Y[12][i];
}
}

routin4()
{

```

```

double rhoi2, rhoj2;
double Y0ij, Y1ij, Y2ij, Y3ij, Y4ij, Y5ij;
double w;
double X;
for (i=0; i<Num/4; ++i)
{
    dY[0][i]=Y[3][i];
    dY[1][i]=Y[4][i];
    dY[2][i]=Y[5][i];
    dY[3][i]=0. ;
    dY[4][i]=0. ;
    dY[5][i]=0. ;
    dY[6][i]=0. ;
    dY[7][i]=0. ;
    dY[8][i]=0. ;
    dY[9][i]=0. ;
    dY[10][i]=0. ;
    dY[11][i]=0. ;
    dY[12][i]=0. ;
    for (j=0; j<Num; ++j)
    {
        Y0ij=Y[0][i]-Y[0][j];
        Y1ij=Y[1][i]-Y[1][j];
        Y2ij=Y[2][i]-Y[2][j];
        Y3ij=Y[3][i]-Y[3][j];
        Y4ij=Y[4][i]-Y[4][j];
        Y5ij=Y[5][i]-Y[5][j];
        rhoi2=pow(rho[i], 2);
        rhoj2=pow(rho[j], 2);
        X=Y3ij*Y0ij+Y4ij*Y1ij+Y5ij*Y2ij;
        if (X<0)
        {
            Z=X*h/(pow(Y0ij, 2)+pow(Y1ij, 2)+pow(Y2ij, 2)+0.01*pow(h, 2));
            Q=(2/(rho[i]+rho[j]))*(2*pow(Z, 2)-(1*Z*(c[i]+c[j])/2));
        }
        else
        {
            Z=0. ;
            Q=0. ;
        }

        w=-W[i][j]*2/pow(h, 2);
    }
}

```

```

dY[3][i]+=(Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y0ij¥
      -(Y[7][i]/rhoi2+Y[7][j]/rhoj2)*Y0ij¥
      -(Y[10][i]/rhoi2+Y[10][j]/rhoj2)*Y1ij¥
      -(Y[12][i]/rhoi2+Y[12][j]/rhoj2)*Y2ij);
dY[4][i]+=(Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y1ij¥
      -(Y[10][i]/rhoi2+Y[10][j]/rhoj2)*Y0ij¥
      -(Y[11][i]/rhoi2+Y[11][j]/rhoj2)*Y2ij¥
      -(Y[8][i]/rhoi2+Y[8][j]/rhoj2)*Y1ij);
dY[5][i]+=(Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y2ij¥
      -(Y[9][i]/rhoi2+Y[9][j]/rhoj2)*Y2ij¥
      -(Y[12][i]/rhoi2+Y[12][j]/rhoj2)*Y0ij¥
      -(Y[11][i]/rhoi2+Y[11][j]/rhoj2)*Y1ij);
Exx=-(Mass[j]*w/rho[j])*(Y3ij*Y0ij);
Eyy=-(Mass[j]*w/rho[j])*(Y4ij*Y1ij);
Ezz=-(Mass[j]*w/rho[j])*(Y5ij*Y2ij);
Exy=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y3ij*Y1ij+Y4ij*Y0ij);
      Eyz=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y4ij*Y2ij+Y5ij*Y1ij);
Ezx=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y5ij*Y0ij+Y3ij*Y2ij);
      Rxy=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y3ij*Y1ij-Y4ij*Y0ij);
Ryz=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y4ij*Y2ij-Y5ij*Y1ij);
Rzx=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y5ij*Y0ij-Y3ij*Y2ij);
dY[6][i]+=0.5*(P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Mass[j]*w¥
      *(Y3ij*Y0ij+Y4ij*Y1ij+Y5ij*Y2ij)¥
      +(Y[7][i]*Exx+Y[8][i]*Eyy+Y[9][i]*Ezz¥
      +2*Y[10][i]*Exy+2*Y[11][i]*Eyz+2*Y[12][i]*Ezx)/rho[j];

dY[7][i]+=2./3.*G*(2.*Exx-Eyy-Ezz)+2.*(Y[10][i]*Rxy-Y[12][i]*Rzx);
dY[8][i]+=2./3.*G*(2.*Eyy-Ezz-Exx)+2.*(Y[11][i]*Ryz-Y[10][i]*Rxy);
dY[9][i]+=2./3.*G*(2.*Ezz-Exx-Eyy)+2.*(Y[12][i]*Rzx-Y[11][i]*Ryz);
dY[10][i]+=2.*G*Exy-(Y[7][i]-Y[8][i])*Rxy+Y[12][i]*Ryz-Y[11][i]*Rzx;
      dY[11][i]+=2.*G*Eyz-(Y[8][i]-Y[9][i])*Ryz+Y[10][i]*Rzx-Y[12][i]*Rxy;
      dY[12][i]+=2.*G*Ezx-(Y[9][i]-Y[7][i])*Rzx+Y[11][i]*Rxy-Y[10][i]*Ryz;
}

dY[0][i+Num/4]=-dY[0][i];
dY[1][i+Num/4]=dY[1][i];
dY[2][i+Num/4]=dY[2][i];
dY[3][i+Num/4]=-dY[3][i];
dY[4][i+Num/4]=dY[4][i];
dY[5][i+Num/4]=dY[5][i];
dY[6][i+Num/4]=dY[6][i];
dY[7][i+Num/4]=-dY[7][i];
dY[8][i+Num/4]=dY[8][i];

```

```

    dY[9][i+Num/4]=dY[9][i];
    dY[10][i+Num/4]=-dY[10][i];
    dY[11][i+Num/4]=dY[11][i];
    dY[12][i+Num/4]=-dY[12][i];
}
for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    dY[0][i+Num/2]=dY[0][i];
    dY[1][i+Num/2]=-dY[1][i];
    dY[2][i+Num/2]=dY[2][i];
    dY[3][i+Num/2]=dY[3][i];
    dY[4][i+Num/2]=-dY[4][i];
    dY[5][i+Num/2]=dY[5][i];
    dY[6][i+Num/2]=dY[6][i];
    dY[7][i+Num/2]=dY[7][i];
    dY[8][i+Num/2]=-dY[8][i];
    dY[9][i+Num/2]=dY[9][i];
    dY[10][i+Num/2]=-dY[10][i];
    dY[11][i+Num/2]=-dY[11][i];
    dY[12][i+Num/2]=dY[12][i];
}
}

rk01()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d1[i][j]=d1tt*dY[i][j];
            Ya[i][j]=Y[i][j]+0.5*d1[i][j];
        }
    }
}

rk02()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {

```

```

        d2[i][j]=d1tt*dY[i][j];
        Ya[i][j]=Y[i][j]+0.5*d2[i][j];
    }
}

```

```

rk03()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d3[i][j]=d1tt*dY[i][j];
            Ya[i][j]=Y[i][j]+d3[i][j];
        }
    }
}

```

```

rk04()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d4[i][j]=d1tt*dY[i][j];
            Y[i][j]=Y[i][j]+(1./6.)*(d1[i][j]+2*d2[i][j]+2*d3[i][j]+d4[i][j]);
        }
    }
}

```

```

EnergyCons()
{
    toE[a]=0.0;
    ke[a]=0.0;
    ie[a]=0.0;
    for(i=0;i<Num;++i)
    {
        ke[a]+=0.5*Mass[i]*(pow(Y[3][i],2)+pow(Y[4][i],2)+pow(Y[5][i],2));
        ie[a]+=Mass[i]*Y[6][i];
    }
}

```

```

    }

toE[a]+=0.5*Mass[i]*(pow(Y[3][i],2)+pow(Y[4][i],2)+pow(Y[5][i],2))+Mass[i]*Y[6][i];
    ratE=100*(toE[a]-toE[0])/toE[0];
}

dataout()
{
    for(i=0;i<Num;++i)
    {
        printf("%f,%d,%f,%f,%f\n",t1,i,Y[0][i],Y[1][i],Y[2][i]);
    }
}

```

```

/*SPH C-Program(Tillotson)*/
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include"def.h"

short i, j, l, m, n;
double Y[13][Num];
double dY[13][Num];
double Mass[Num];
double W[Num][Num];
double rho[Num];
double P[Num];
double c[Num];
double Z, Q;
double d1[13][Num];
double d2[13][Num];
double d3[13][Num];
double d4[13][Num];
double Ya[13][Num];
double Exx, Eyy, Ezz, Exy, Eyz, Ezx;
double Rxy, Ryz, Rzx;
double toE[num1];
double ke[num1], ie[num1];
double ratE;
double f[Num];
double J2, Ys2;
double myu[Num];
float t1;
int a;

main()
{
    routin1();
    routin2();
    dataout();
    for(a=0;a<num1;++a)
    {
        t1=a*dltt;
        routin3();
        routin4();
    }
}

```

```

    rk01();
    routin3();
    routin4();
    rk02();
    routin3();
    routin4();
    rk03();
    routin3();
    routin4();
    rk04();
    EnergyCons();
    routin3();
    dataout();
}
}

```

```

routin1()
{
    for(m=0;m<5;++m)
    {
        if(m<2)
        {
            for(l=0;l<5;++l)
            {
                for(n=0;n<Nz2;++n)
                {
                    i=m*5*Nz2+l*Nz2+n*1;
                    Y[0][i]=1+0.5;
                    Y[1][i]=m+0.5;
                    Y[2][i]=n+1;
                }
            }
        }
        if(m==2)
        {
            for(l=0;l<4;++l)
            {
                for(n=0;n<Nz2;++n)
                {
                    i=m*5*Nz2+l*Nz2+n*1;
                    Y[0][i]=1+0.5;
                    Y[1][i]=m+0.5;

```

```

        Y[2][i]=n+1;
    }
}
if(m>2)
{
    if(m==3)
    {
        for(l=0;l<4;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz2;++n)
            {
                i=m*5*Nz2-Nz2+1*Nz2+n*1;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=n+1;
            }
        }
    }
else
    {
        for(l=0;l<2;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz2;++n)
            {
                i=m*5*Nz2-2*Nz2+1*Nz2+n*1;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=n+1;
            }
        }
    }
}
for(m=0;m<5;++m)
{
    if(m<2)
    {
        for(l=0;l<5;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz1;++n)
            {

```

```

        i=m*5*Nz1+1*Nz1+n*1+Nz2*20;
        Y[0][i]=1+0.5;
        Y[1][i]=m+0.5;
        Y[2][i]=-n;
    }
}
}
if(m==2)
{
    for(l=0;l<4;++l)
    {
        for(n=0;n<Nz1;++n)
        {
            i=m*5*Nz1+1*Nz1+n*1+Nz2*20;
            Y[0][i]=1+0.5;
            Y[1][i]=m+0.5;
            Y[2][i]=-n;
        }
    }
}
if(m>2)
{
    if(m==3)
    {
        for(l=0;l<4;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz1;++n)
            {
                i=m*5*Nz1-Nz1+1*Nz1+n*1+Nz2*20;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=-n;
            }
        }
    }
}
else
{
    for(l=0;l<2;++l)
    {
        for(n=0;n<Nz1;++n)
        {
            i=m*5*Nz1-2*Nz1+1*Nz1+n*1+Nz2*20;

```

```

        Y[0][i]=1+0.5;
        Y[1][i]=m+0.5;
        Y[2][i]=-n;
    }
}
}
}
for (i=0;i<Num/4;++i)
{
    Y[0][i+Num/4]=-Y[0][i];
    Y[1][i+Num/4]=Y[1][i];
    Y[2][i+Num/4]=Y[2][i];
}
for (i=0;i<Num/2;++i)
{
    Y[0][i+Num/2]=Y[0][i];
    Y[1][i+Num/2]=-Y[1][i];
    Y[2][i+Num/2]=Y[2][i];
}
}

```

```

routin2()
{
    for (i=0;i<Num/4;++i)
    {
        Y[3][i]=Vx;
        Y[4][i]=Vy;
        Y[5][i]=Vz1;
        Mass[i]=M1;
        Y[6][i]=u0;
        Y[7][i]=0.;
        Y[8][i]=0.;
        Y[9][i]=0.;
        Y[10][i]=0.;
        Y[11][i]=0.;
        Y[12][i]=0.;
        Mass[i+Num/4]=Mass[i];

        if (i<200)
        {
            Mass[i]=M2;

```

```

    Mass[i+Num/4]=Mass[i];
    Y[5][i]=Vz2;
}
}
for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    Mass[i+Num/2]=Mass[i];
}
}

```

```

routin3()
{
    double r2;
    double Y0ij, Y1ij, Y2ij;
    for(i=0;i<Num/4;++i)
    {
        Y[0][i+Num/4]=-Y[0][i];
        Y[1][i+Num/4]=Y[1][i];
        Y[2][i+Num/4]=Y[2][i];
        Y[3][i+Num/4]=-Y[3][i];
        Y[4][i+Num/4]=Y[4][i];
        Y[5][i+Num/4]=Y[5][i];
        Y[6][i+Num/4]=Y[6][i];
        Y[7][i+Num/4]=-Y[7][i];
        Y[8][i+Num/4]=Y[8][i];
        Y[9][i+Num/4]=Y[9][i];
        Y[10][i+Num/4]=-Y[10][i];
        Y[11][i+Num/4]=Y[11][i];
        Y[12][i+Num/4]=-Y[12][i];
    }
    for(i=0;i<Num/2;++i)
    {
        Y[0][i+Num/2]=Y[0][i];
        Y[1][i+Num/2]=-Y[1][i];
        Y[2][i+Num/2]=Y[2][i];
        Y[3][i+Num/2]=Y[3][i];
        Y[4][i+Num/2]=-Y[4][i];
        Y[5][i+Num/2]=Y[5][i];
        Y[6][i+Num/2]=Y[6][i];
        Y[7][i+Num/2]=Y[7][i];
    }
}

```

```

Y[8][i+Num/2]=-Y[8][i];
Y[9][i+Num/2]=Y[9][i];
Y[10][i+Num/2]=-Y[10][i];
Y[11][i+Num/2]=-Y[11][i];
Y[12][i+Num/2]=Y[12][i];
}
for(i=0;i<Num/4;++i)
{
rho[i]=0.;
for(j=0;j<Num;++j)
{
Y0ij=Y[0][i]-Y[0][j];
Y1ij=Y[1][i]-Y[1][j];
Y2ij=Y[2][i]-Y[2][j];
r2=pow(Y0ij,2)+pow(Y1ij,2)+pow(Y2ij,2);
W[i][j]=pow((1./(pi*pow(h,2))),1.5)*exp(-r2/pow(h,2));
rho[i]+=Mass[j]*W[i][j];
}
if(rho[i]>rho0)
{
if(Y[6][i]<Eiv)
{
P[i]=(aa+bb/(Y[6][i]/(E0*(pow(rho[i]/rho0,2))+1)))*rho[i]*Y[6][i]+AA*(rho[i]/rho0
-1)+BB*pow(rho[i]/rho0-1,2);
}
else
{
P[i]=0;
}
}
else
{
if(Y[6][i]<Eiv)
{
P[i]=0;
}
else
{
if(Y[6][i]>Ecv)
{

```

```

P[i]=aa*rho[i]*Y[6][i]+(bb*rho[i]*Y[6][i]/(Y[6][i]/(E0*(pow(rho[i]/rho0, 2))))+1)+A
A*(rho[i]/rho0-1)*exp(-dd*(rho0/rho[i]-1))*exp(-cc*pow((rho0/rho[i]-1), 2));
    }
    else
    {

P[i]=((Y[6][i]-Eiv)*(aa*rho[i]*Y[6][i]+(bb*rho[i]*Y[6][i]/(Y[6][i]/(E0*(pow(rho[i]
]/rho0, 2))))+1)+AA*(rho[i]/rho0-1)*exp(-dd*(rho0/rho[i]-1))*exp(-cc*pow((rho0/rho
[i]-1), 2)))+(Ecv-Y[6][i])*((aa+bb/(Y[6][i]/(E0*(pow(rho[i]/rho0, 2))))+1))*rho[i]*Y
[6][i]+AA*(rho[i]/rho0-1)+BB*pow(rho[i]/rho0-1, 2)))/(Ecv-Eiv);
    }
    }

J2=pow(Y[7][i], 2)+pow(Y[8][i], 2)+pow(Y[9][i], 2)+
    pow(Y[10][i], 2)+pow(Y[11][i], 2)+pow(Y[12][i], 2)+
    Y[7][i]*Y[8][i]+Y[8][i]*Y[9][i]+Y[9][i]*Y[7][i];
f[i]=1.;
Ys2=pow(Ys, 2);
if(Ys2<J2*3.)
{
    f[i]=Ys/sqrt(J2*3.);
}

Y[7][i]=f[i]*Y[7][i];
Y[8][i]=f[i]*Y[8][i];
Y[9][i]=f[i]*Y[9][i];
Y[10][i]=f[i]*Y[10][i];
Y[11][i]=f[i]*Y[11][i];
Y[12][i]=f[i]*Y[12][i];
}

for(i=0;i<Num/4;++i)
{
    rho[i+Num/4]=rho[i];
    c[i+Num/4]=c[i];
    P[i+Num/4]=P[i];
    f[i+Num/4]=f[i];
    Y[7][i+Num/4]=-Y[7][i];
    Y[8][i+Num/4]=Y[8][i];
    Y[9][i+Num/4]=Y[9][i];
    Y[10][i+Num/4]=-Y[10][i];
    Y[11][i+Num/4]=Y[11][i];
    Y[12][i+Num/4]=-Y[12][i];
}

```

```

for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    rho[i+Num/2]=rho[i];
    c[i+Num/2]=c[i];
    P[i+Num/2]=P[i];
    f[i+Num/2]=f[i];
    Y[7][i+Num/2]=Y[7][i];
    Y[8][i+Num/2]=-Y[8][i];
    Y[9][i+Num/2]=Y[9][i];
    Y[10][i+Num/2]=-Y[10][i];
    Y[11][i+Num/2]=-Y[11][i];
    Y[12][i+Num/2]=Y[12][i];
}
}

routin4()
{
    double rhoi2, rhoj2;
    double Y0ij, Y1ij, Y2ij, Y3ij, Y4ij, Y5ij;
    double w;
    double X;
    for(i=0;i<Num/4;++i)
    {
        dY[0][i]=Y[3][i];
        dY[1][i]=Y[4][i];
        dY[2][i]=Y[5][i];
        dY[3][i]=0.;
        dY[4][i]=0.;
        dY[5][i]=0.;
        dY[6][i]=0.;
        dY[7][i]=0.;
        dY[8][i]=0.;
        dY[9][i]=0.;
        dY[10][i]=0.;
        dY[11][i]=0.;
        dY[12][i]=0.;
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            Y0ij=Y[0][i]-Y[0][j];
            Y1ij=Y[1][i]-Y[1][j];
            Y2ij=Y[2][i]-Y[2][j];
            Y3ij=Y[3][i]-Y[3][j];

```

```

Y4i j=Y[4][i]-Y[4][j];
Y5i j=Y[5][i]-Y[5][j];
rhoi2=pow(rho[i], 2);
rhoj2=pow(rho[j], 2);
X=Y3i j*Y0i j+Y4i j*Y1i j+Y5i j*Y2i j;
if(X<0)
{
Z=X*h/(pow(Y0i j, 2)+pow(Y1i j, 2)+pow(Y2i j, 2)+0.01*pow(h, 2));
Q=(2/(rho[i]+rho[j]))*(2*pow(Z, 2)-(1*Z*(c[i]+c[j])/2));
}
else
{
Z=0.;
Q=0.;
}

w=-W[i][j]*2/pow(h, 2);
dY[3][i]+=- (Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y0i j¥
-(Y[7][i]/rhoi2+Y[7][j]/rhoj2)*Y0i j¥
-(Y[10][i]/rhoi2+Y[10][j]/rhoj2)*Y1i j¥
-(Y[12][i]/rhoi2+Y[12][j]/rhoj2)*Y2i j);
dY[4][i]+=- (Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y1i j¥
-(Y[10][i]/rhoi2+Y[10][j]/rhoj2)*Y0i j¥
-(Y[11][i]/rhoi2+Y[11][j]/rhoj2)*Y2i j¥
-(Y[8][i]/rhoi2+Y[8][j]/rhoj2)*Y1i j);
dY[5][i]+=- (Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y2i j¥
-(Y[9][i]/rhoi2+Y[9][j]/rhoj2)*Y2i j¥
-(Y[12][i]/rhoi2+Y[12][j]/rhoj2)*Y0i j¥
-(Y[11][i]/rhoi2+Y[11][j]/rhoj2)*Y1i j);
Exx=- (Mass[j]*w/rho[j])*(Y3i j*Y0i j);
Eyy=- (Mass[j]*w/rho[j])*(Y4i j*Y1i j);
Ezz=- (Mass[j]*w/rho[j])*(Y5i j*Y2i j);
Exy=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y3i j*Y1i j+Y4i j*Y0i j);
Eyz=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y4i j*Y2i j+Y5i j*Y1i j);
Ezx=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y5i j*Y0i j+Y3i j*Y2i j);
Rxy=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y3i j*Y1i j-Y4i j*Y0i j);
Ryz=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y4i j*Y2i j-Y5i j*Y1i j);
Rzx=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y5i j*Y0i j-Y3i j*Y2i j);
dY[6][i]+=0.5*(P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Mass[j]*w¥
*(Y3i j*Y0i j+Y4i j*Y1i j+Y5i j*Y2i j)¥
+(Y[7][i]*Exx+Y[8][i]*Eyy+Y[9][i]*Ezz¥
+2*Y[10][i]*Exy+2*Y[11][i]*Eyz+2*Y[12][i]*Ezx)/rho[j];

```

```

dY[7][i]+=2./3.*G*(2.*Exx-Eyy-Ezz)+2.*(Y[10][i]*Rxy-Y[12][i]*Rzx);
dY[8][i]+=2./3.*G*(2.*Eyy-Ezz-Exx)+2.*(Y[11][i]*Ryz-Y[10][i]*Rxy);
dY[9][i]+=2./3.*G*(2.*Ezz-Exx-Eyy)+2.*(Y[12][i]*Rzx-Y[11][i]*Ryz);
dY[10][i]+=2.*G*Exy-(Y[7][i]-Y[8][i])*Rxy+Y[12][i]*Ryz-Y[11][i]*Rzx;
    dY[11][i]+=2.*G*Eyz-(Y[8][i]-Y[9][i])*Ryz+Y[10][i]*Rzx-Y[12][i]*Rxy;
    dY[12][i]+=2.*G*Ezx-(Y[9][i]-Y[7][i])*Rzx+Y[11][i]*Rxy-Y[10][i]*Ryz;
}

dY[0][i+Num/4]=-dY[0][i];
dY[1][i+Num/4]=dY[1][i];
dY[2][i+Num/4]=dY[2][i];
dY[3][i+Num/4]=-dY[3][i];
dY[4][i+Num/4]=dY[4][i];
dY[5][i+Num/4]=dY[5][i];
dY[6][i+Num/4]=dY[6][i];
dY[7][i+Num/4]=-dY[7][i];
dY[8][i+Num/4]=dY[8][i];
dY[9][i+Num/4]=dY[9][i];
dY[10][i+Num/4]=-dY[10][i];
dY[11][i+Num/4]=dY[11][i];
dY[12][i+Num/4]=-dY[12][i];
}

for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    dY[0][i+Num/2]=dY[0][i];
    dY[1][i+Num/2]=-dY[1][i];
    dY[2][i+Num/2]=dY[2][i];
    dY[3][i+Num/2]=dY[3][i];
    dY[4][i+Num/2]=-dY[4][i];
    dY[5][i+Num/2]=dY[5][i];
    dY[6][i+Num/2]=dY[6][i];
    dY[7][i+Num/2]=dY[7][i];
    dY[8][i+Num/2]=-dY[8][i];
    dY[9][i+Num/2]=dY[9][i];
    dY[10][i+Num/2]=-dY[10][i];
    dY[11][i+Num/2]=-dY[11][i];
    dY[12][i+Num/2]=dY[12][i];
}
}

rk01()
{

```

```

for(i=0;i<13;++i)
{
    for(j=0;j<Num;++j)
    {
        d1[i][j]=d1tt*dY[i][j];
        Ya[i][j]=Y[i][j]+0.5*d1[i][j];
    }
}
}

```

```

rk02()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d2[i][j]=d1tt*dY[i][j];
            Ya[i][j]=Y[i][j]+0.5*d2[i][j];
        }
    }
}

```

```

rk03()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d3[i][j]=d1tt*dY[i][j];
            Ya[i][j]=Y[i][j]+d3[i][j];
        }
    }
}

```

```

rk04()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)

```

```

    {
        d4[i][j]=d1tt*dY[i][j];
        Y[i][j]=Y[i][j]+(1./6.)*(d1[i][j]+2*d2[i][j]+2*d3[i][j]+d4[i][j]);
    }
}

```

EnergyCons()

```

{
    toE[a]=0.0;
    ke[a]=0.0;
    ie[a]=0.0;
    for(i=0;i<Num;++i)
    {
        ke[a]+=0.5*Mass[i]*(pow(Y[3][i],2)+pow(Y[4][i],2)+pow(Y[5][i],2));
        ie[a]+=Mass[i]*Y[6][i];
    }

    toE[a]+=0.5*Mass[i]*(pow(Y[3][i],2)+pow(Y[4][i],2)+pow(Y[5][i],2))+Mass[i]*Y[6][i];
};
    ratE=100*(toE[a]-toE[0])/toE[0];
}

```

dataout()

```

{
    for(i=0;i<Num;++i)
    {
        printf("%f,%d,%f,%f,%f,%f\n",t1,i,P[i],Y[0][i],Y[1][i],Y[2][i]);
    }
}

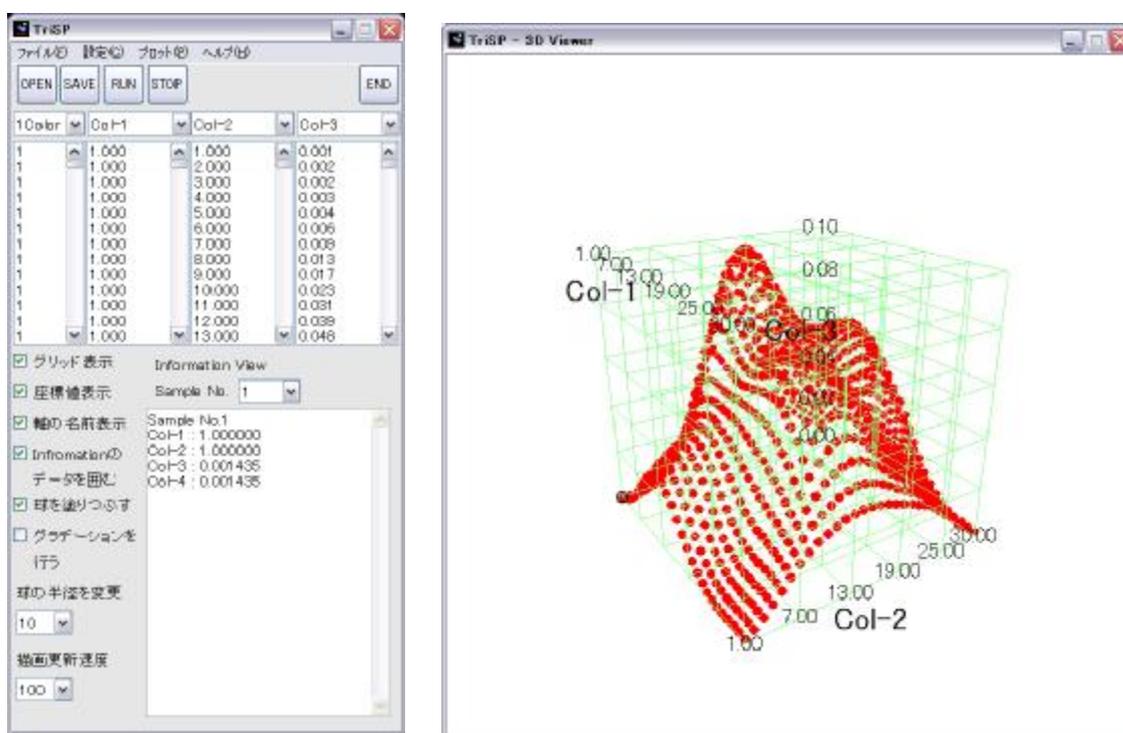
```

表現ソフト

プログラムから出力された各粒子の座標データを時間ごとに散布図としてプロットすれば視覚的に変形の様子を観察することが出来る。しかし、散布図として表現したい三次元のデータに対してエクセルの図表作成ツールは二次元までしか対応していないため、本研究では三次元の散布図が描けるソフトを探すことにした。選定の結果、以下のソフトを用いることにした。

フリーソフト「TriSP (Tri-dimension scatter plot)」

エクセルでプロットしたいデータを作成し、「TriSP」から読み込めば散布図を描かれるものである。



「TriSP」