

卒業論文題目

天体衝突の数値シミュレーション

宮城教育大学生涯教育総合課程自然環境専攻

D7622 伊藤友美

平成 21 年 2 月 9 日

要旨

天体现象は対象物が巨大なスケールを持つため、実験による理解は困難である。したがって、天体现象を理解する手段のひとつとして、コンピューターによる数値シミュレーションが行われている。

本研究は、天体の衝突現象についてシミュレーションしたものである。宇宙には多数の天体が存在するが、天体の大きさや形状、物性、速度は様々である。よって、天体同士が衝突した場合、衝突後の天体に見られる現象も様々である。現在、シミュレーションによってクレーターの形成や天体の結合、破壊などについての理解が進められており、宇宙の進化を考える上で重要であると考えられている。

ここでは、天体を弾塑性体として扱う。したがって、流体運動に用いられている SPH 流体計算コードを弾塑性体に応用できるように拡張した。また、多次元問題に適している SPH 法の特徴を生かし、シミュレーションが 3 次元で行えるようプログラムを作成した。

この計算コードを用い、直径 1km の天体同士が衝突する問題を、衝突速度と物質を変えて計算した。その結果、各物質とも、衝突速度が大きくなると天体は弾塑性体ではなく流体として振るまうようになることが確認できた。また、鉄と岩石に比べ、氷は小さいエネルギーで変形し、各物質のエネルギーと変形の関係を得ることができた。

目次

第1章 はじめに

- 1.1 天体衝突現象
 - 1.1.1 天体衝突
 - 1.1.2 カタストロフィック破壊
- 1.2 本研究の目的

第2章 流体の運動

- 2.1 流体
- 2.2 流体力学の基礎方程式
 - 2.2.1 連続の方程式
 - 2.2.2 運動量保存
 - 2.2.3 エネルギー保存

第3章 流体の SPH 表記法

- 3.1 SPH 法
 - 3.1.1 SPH 法
 - 3.1.2 SPH 法の基本式
 - 3.1.3 平均化関数
- 3.2 流体力学の基礎方程式への適用
 - 3.2.1 運動量保存
 - 3.2.2 エネルギー保存

第4章 弾塑性体の運動

- 4.1 応力
 - 4.1.1 応力の定義
 - 4.1.2 応力成分の直交変換
- 4.2 ひずみ
 - 4.2.1 ひずみの定義
 - 4.2.2 ひずみ成分の直交変換
- 4.3 フックの法則
- 4.4 回転
- 4.5 偏差応力
- 4.6 降伏強度
- 4.7 流体力学の基礎方程式の弾塑性体への適用

- 4.7.1 運動量保存
- 4.7.2 エネルギー保存

第5章 弾塑性体の SPH 表記法

- 5.1 運動量保存
- 5.2 ひずみ
- 5.3 回転
- 5.4 偏差応力
- 5.5 エネルギー保存

第6章 ユゴニオ方程式

- 6.1 ユゴニオ方程式とは
- 6.2 衝撃波面が動く場合のユゴニオ方程式方程式の導出
 - 6.2.1 質量保存
 - 6.2.2 運動量保存
 - 6.2.3 エネルギー保存
- 6.3 衝撃波面を固定した場合のユゴニオ方程式方程式の導出
 - 6.3.1 質量保存
 - 6.3.2 運動量保存
 - 6.3.3 エネルギー保存
- 6.4 平面衝突の近似モデル
- 6.5 状態方程式

第7章 数値計算法

- 7.1 Runge-Kutta 法
- 7.2 系の中でのエネルギー保存
- 7.3 数値の無次元化
 - 7.3.1 シミュレーションに用いる各値
 - 7.3.2 無次元化

第8章 シミュレーションモデル

- 8.1 テストシミュレーションによるコードの評価
- 8.2 テストシミュレーション
 - 8.2.1 シミュレーションモデル
 - 8.2.2 粒子の配列
 - 8.2.3 各値

- 8.2.4 状態方程式
- 8.2.5 数値の無次元化
- 8.3 計算結果
- 8.4 議論
 - 8.4.1 降伏強度による違い
 - 8.4.2 状態方程式による違い

第9章 数値計算

- 9.1 シミュレーション概要
 - 9.1.1 衝突速度
 - 9.1.2 物質
 - 9.1.3 状態方程式
- 9.2 シミュレーション
 - 9.2.1 シミュレーションモデル
 - 9.2.2 粒子の配列
- 9.3 計算結果

第10章 議論

- 10.1 変形率
- 10.2 変形率の時間変化
- 10.3 エネルギー密度と変形率
- 10.4 今後の課題

第11章 結論

謝辞

参考文献

資料

- SPH C-プログラム (Mie-Gruneisen 状態方程式)
- SPH C-プログラム (Rankine-Hugoniot 状態方程式)

第1章 はじめに

1.1 天体衝突現象

1.1.1 天体衝突

太陽系には、惑星や小惑星、衛星など多数の天体が存在する。これらの天体の構造や起源・進化を決定する重要な過程として、衝突現象が特に重視されている。

天体衝突は、太陽系内で普遍的に起こっている現象である。例えば、惑星や衛星などの固体天体の表面にはクレーターが多数見られるが、これらのほとんどは高速度で飛来した小天体の衝突によって形成されたものである。また、小惑星や小衛星の多くは不規則な形状をもっている。これらは過去に他の天体による衝突を受け、破壊されてできたものであると考えられている（藤原 1997）。さらに、地球に飛来した隕石によって過去に生物の大量絶滅があったように、惑星環境を変化させることもある（松井 2003）。

太陽系内での天体間の衝突速度は、一般に $1\sim 10\text{km/s}$ オーダーである（藤原 1997）。また、衝突する天体の大きさや形状も様々である。例えば、小惑星の中で最大であるケレスは直径 952km であるが、大部分のものは $20\sim 80\text{km}$ 、イトカワは 1km 以下である（理科年表 2007）。このような天体同士が衝突したときに起こる現象は複雑であり、かつ多彩である。同時に、これらの現象は、天体の大きさや数、表面の様子や内部の様子を知る手掛かりとなると考えられている。したがって、衝突現象の理解は、太陽系の天体の進化を考える上で大変重要であるといえる。

1.1.2 カタストロフィック破壊

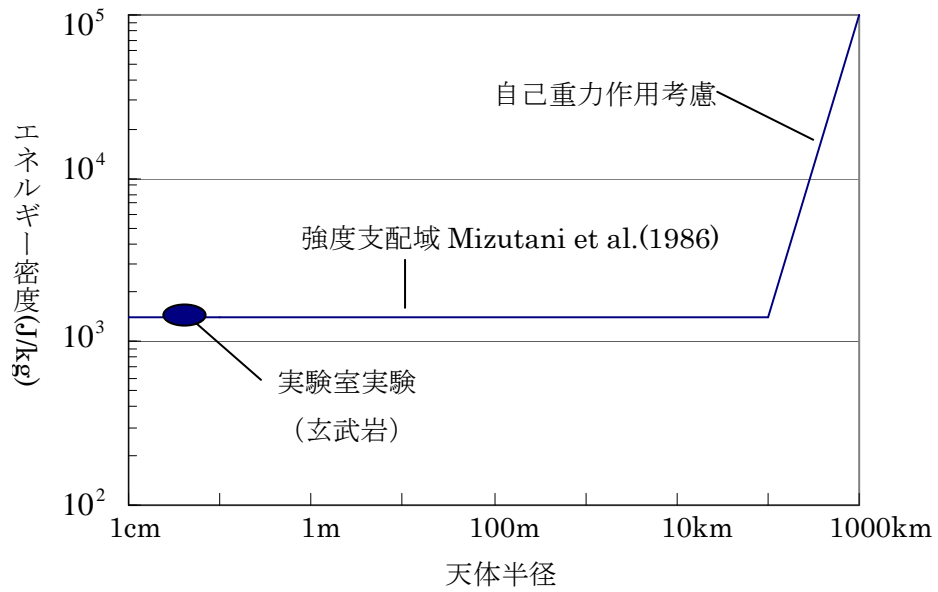
天体同士が衝突した際の現象として、標的にクレーターが形成される場合と、標的全体が破壊される場合とがある。標的にクレーターが形成されるのかまたは標的がどの程度破壊するかは、標的の単位質量あたりに投入される衝突エネルギーであるエネルギー密度 Q によって決定されると考えられている。

天体が破壊される場合、一般に、1回の衝突による破壊でできた標的の最大の破片の質量が、破壊前の標的の質量の $1/2$ 以下になるときの破壊を、カタストロフィック破壊という。

カタストロフィック破壊を起こすときのエネルギー密度を Q^* と表し、 Q^* をカタストロフィック破壊を起こす Q のしきい値とよぶ（松井 1997）。

天体の径とカタストロフィック破壊のしきい値 Q^* との関係は、実験やコンピューターシミュレーションなどにより求められている。藤原（1997）によると、カタストロフィック破壊のしきい値は、天体の自己重力作用を無視できる径の範囲において、強度支配域の場合、標的の径によらずほぼ一定で、約 10^3J/kg である（図 1.1）。

図 1.1



1.2 本研究の目的

本研究では、同一天体同士の衝突についてシミュレーションを行う。天体は鉄、岩石（玄武岩）、氷の3種類を考える。それぞれの天体が、衝突エネルギー密度の違いによりどのように変形するのかをシミュレーションにより検証することを目的とする。

第2章 流体の運動

2.1 流体力学

気体や液体は、力を加えると自由に流れるので、総括して流体と呼ばれる。流体は非常に多くの分子からなるが、多数の分子のそれぞれの運動を力学的に扱うことは不可能である。しかし、分子的な構造を考えずに流体を連続的に広がった物体として扱うことはできる。このように、巨視的な立場で、流体を力学的に扱うのが流体力学である（戸田 1994）。

2.2 流体力学の基礎方程式

流体の運動を記述する式として、質量保存の方程式（連続の式）、運動量保存の方程式、エネルギー保存の方程式がある。

2.2.1 質量保存

不動の座標系 (x, y, z) をとり、 $x \sim x + \Delta x$ 、 $y \sim y + \Delta y$ 、 $z \sim z + \Delta z$ の範囲の立方体 $\Delta x \Delta y \Delta z$ を考える（図 2.1）。このとき、面 ABCD の面積は $\Delta y \Delta z$ であり、ここにおける流体の密度を ρ 、流速の x 成分を u とすると、この面を単位時間に通る流体の質量は $\rho u \Delta y \Delta z$ で与えられる。

同様に、面 ABCD から Δx だけ離れた面 A'B'C'D' を単位時間に通る流体の質量は $(\rho u)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ と書くことができる。ここで、 $(\rho u)_{x+\Delta x}$ は位置 $x + \Delta x$ における ρu の値であり、位置 x における ρu の値を単に ρu と書けば、 Δx が小さいとき

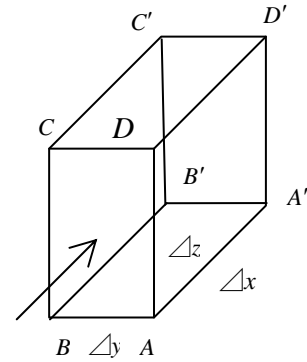


図 2.1

$$(\rho u)_{x+\Delta x} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \quad (2.1)$$

と表される。したがって面 ABCD を通って立方体 $\Delta x \Delta y \Delta z$ に入る流体の質量から面 A'B'C'D' を通って出る質量をひいた値は

$$\rho u - (\rho u)_{x+\Delta x} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.2)$$

で与えられる。同様に、立方体 $\Delta x \Delta y \Delta z$ の他の面についてもいえるので、 y と z 方向の流速をそれぞれ v 、 w とすれば、立方体 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 内の質量 $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ の時間的変化の割合は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = -\left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.3)$$

となる。(2.3)式を整理すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \bar{u}) \quad (2.4)$$

これが質量保存の方程式である。(2.4)式は、流体の一部に流体が集まる流れがあると、その流体の密度は増加することを示している(戸田 1994)。

2.2.2 運動量保存

粘性がない流体を完全流体という。完全流体は流体どうしが摩擦なくすべり、したがって流体どうしが及ぼし合う力は任意の面に垂直な圧力としてのみはたらく(戸田 1994)。以下、完全流体を考えるものとする。

空間の各点 (x, y, z) を通過する流れ(流れの場)を考える。流速の x 、 y 、 z 成分はそれぞれ $u(x, y, z, t)$ 、 $v(x, y, z, t)$ 、 $w(x, y, z, t)$ とする。一般に、流れの場における物理量 $f(x, y, z, t)$ は微小に異なる。ある場所と時刻における f との値の差、 df は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (2.5)$$

とかける。流れ(流速 u, v, w)とともに動く座標系でみていけば $u = dx/dt$ 、 $v = dy/dt$ 、 $w = dz/dt$ であるから、 f の時間的変化の割合は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.6)$$

である。たとえば加速度の x, y, z 成分はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.7)$$

で与えられる。

ここで、重力のように流体の質量に比例する外力を単位質量当たりの成分で X 、 Y 、 Z とする。また、流体の微小部分 $x \sim x + dx$ には両側からの圧力 p の差

$$-\{p(x + dx) - p(x)\} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (2.8)$$

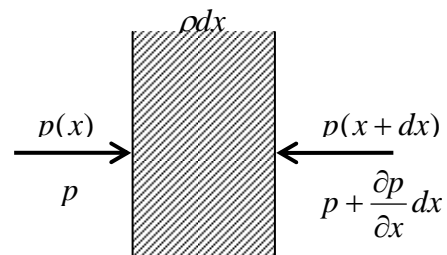


図 2.2

がはたらく(図 2.2)。加速度(2.7)式は外力と圧力差(2.8)式によって決められるため運動方程式は

$$\begin{aligned}\rho \frac{du}{dt} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.9}$$

と書ける。(2.9)式に(2.7)式を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.10}$$

となる。流速を \vec{v} で表すと、外力がはたらかない場合(2.10)式は

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P\tag{2.11}$$

と表される。これが完全流体に対するオイラーの運動量保存の方程式である(戸田 1994)。

2.2.3 エネルギー保存

完全流体は、粘性がないので内部摩擦によるエネルギーの損失はなく、そのため力学的エネルギーが保存される。ここでは、縮まない流体である非圧縮流体(密度 $\rho = \text{一定}$)を考える。

まず、図 2.3 のような細い流管の 2 点 A、B を考える。点 A、B での流管の断面積を S_A 、 S_B とする。また、これらの点における流速を q_A 、 q_B とする。

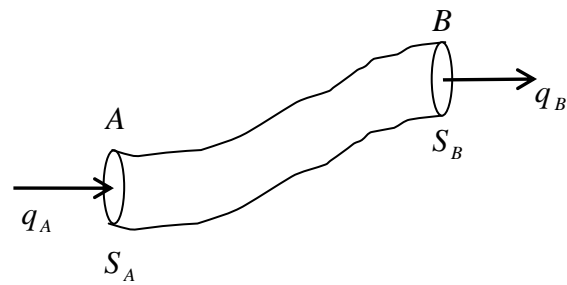


図 2.3

微小時間 dt に断面 A、B を通る全エネルギー(運動エネルギーと位置エネルギー U との和) E_A 、 E_B は

$$E_A = \rho \left(\frac{1}{2} q_A^2 + U_A \right) \cdot q_A dt S_A\tag{2.12}$$

$$E_B = \rho \left(\frac{1}{2} q_B^2 + U_B \right) \cdot q_B dt S_B\tag{2.13}$$

である。エネルギーが保存される時、これらの点におけるエネルギーの差は、それぞれの点においてなされる仕事 W_A 、 W_B の差でなければならない。仕事は、圧力を P とすると

$$W_A = P_A \cdot q_A dtS_A \quad (2.14)$$

$$W_B = P_B \cdot q_B dtS_B \quad (2.15)$$

である。したがって次式が成り立つ。

$$E_B - E_A = W_B - W_A$$

$$\rho \left(\frac{1}{2} q_B^2 + U_B \right) \cdot q_B dtS_B - \rho \left(\frac{1}{2} q_A^2 + U_A \right) \cdot q_A dtS_A = P_A \cdot q_A dtS_A - P_B \cdot q_B dtS_B \quad (2.16)$$

ところで、密度は一定であるから、点 A に流入する流体の体積と点 B から流出する流体の体積は等しいので

$$q_A dtS_A = q_B dtS_B \quad (2.17)$$

という関係が成り立つ。よって(2.16)式は(2.17)式を用いて

$$\rho \left(\frac{1}{2} q_B^2 + U_B \right) + P_B = \rho \left(\frac{1}{2} q_A^2 + U_A \right) + P_A \quad (2.18)$$

と書くことができる。すなわち

$$\rho \left(\frac{1}{2} q^2 + U \right) + P = \text{一定} \quad (2.19)$$

これがオイラーのエネルギー保存の方程式である (戸田 1994)。

第3章 流体の SPH 表記法

3.1 SPH 法

3.1.1 SPH 法

流体計算の方法の一つとして、SPH 法 (Smoothed Particle Hydrodynamics 法) がある。流体の運動を数式で記述する場合には、固定された点から流体を観察するオイラー法と、流体とともに動く座標系で記述するラグランジュ法がある。この SPH 法は、流体を分割してその素片の運動を追跡していくためラグランジュ法に似ているが、素片を広がりを持った粒子として表現するという点で異なっている。つまり、分割された各素片は互いに重なり合った集合体として流体を記述しており、ある流体素片に対する相互作用は周辺粒子からの寄与の和である。

ラグランジュ法は、一次元問題では精度のよい方法として用いられるが、多次元問題の場合、特に回転流体を記述する場合には格子点が回転に伴って変形するため、格子点がねじれて計算ができなくなる。しかし、SPH 法では格子点にとらわれずにその点での物理量を平均化して求めているため、多次元問題にも適応できる (矢部 2000)。

3.1.2 SPH 法の基本式

SPH 法では粒子の存在する点で物理量を代表し、それを平均化関数 W によって平均化する。つまり、物理量 $f(x)$ が存在したとき、物理量そのものでなく W により平均化した関数

$$\langle f(x) \rangle = \int W(x-x', h) f(x') dx' \quad (3.1)$$

を用いる。

まず、流体を N 個の流体素片に分割する。以下、各素片を粒子と呼ぶ。(3.1)式の積分を和で表すと

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N f(x_j) \left(\frac{m}{\rho(x_j)} \right) W(x-x_j, h_j) \quad (3.2)$$

となる。ここで、 m は流体素片の質量であり、 x_j は j 番目の粒子の重心を表す。

いま、物理量として流体の密度を表現する。実際の粒子の分布として点状の粒子の集合を考える。(3.2)式の $f(x)$ に密度の関数 $\rho(x)$ を代入すると

$$\langle \rho(x) \rangle = \sum_{j=1}^N \rho(x_j) \left(\frac{m}{\rho(x_j)} \right) W(x-x_j, h_j)$$

$$= \sum_{j=1}^N m W(x - x_j, h_j) \quad (3.3)$$

となり、 N 個の分布関数 $W(X)$ の重ね合わせとして流体密度が決定される。分割の個数が無限大になり、それに応じて平均化関数の広がり h が 0 の極限では、連続体としての流体が表現される。

また、物理量の微分は、 W が解析関数であるから(3.2)式の両辺を微分して

$$\nabla \langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N f(x_j) \left(\frac{m}{\rho} \right) \nabla W(x - x_j, h_j) \quad (3.4)$$

となり、粒子の分布関数の勾配に fm/ρ をかけて和をとることで与えられる。

3.1.3 平均化関数

物理量がどの程度平均化されるかは、平均化関数の基底長さを表す h で決まる。平均化関数 W は次の関係を満たさなければならない。

$$\int W(x, h) dx = 1 \quad (3.5)$$

また、SPH 法における平均化関数には、次のようなガウス関数を用いる場合がある。

$$W = \left(\frac{1}{\pi h^2} \right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{h^2} \right) \quad (3.6)$$

ここで、 d は系における次元を表す (木村 2000)。

3.2 流体力学の基礎方程式への適用

前章で述べたように、流体の運動は 2.2.2、2.2.3 の各方程式 ((2.11)式、(2.19)式) で示される。そこで、これらの流体力学の基礎方程式の SPH 表記を以下に導く。

3.2.1 運動量保存

(2.11)式より、運動量保の方程式は

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3.7)$$

である。ここで(3.7)式の右辺について、

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) &= P \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla P \\ &= -\frac{P}{\rho^2} \nabla \rho + \frac{1}{\rho} \nabla P \end{aligned} \quad (3.8)$$

より

$$-\frac{1}{\rho}\nabla P = -\frac{P}{\rho^2}\nabla\rho - \nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (3.9)$$

であるから、(3.7)式に代入すると

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{P}{\rho^2}\nabla\rho - \nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (3.10)$$

となる。 i 番目の粒子に対して考えると

$$\frac{dv_i}{dt} = -\nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i}\right) - \frac{P_i}{\rho_i^2}\nabla\rho_i \quad (3.11)$$

ここで、(3.4)式より、(3.11)式の右辺の2つの項はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i}\right) &= \sum_{j=1}^N \frac{P_j}{\rho_j} \frac{M_j}{\rho_j} \nabla W(x-x_j, h) \\ &= \sum_{j=1}^N M_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla W(x-x_j, h) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_i}{\rho_i^2}\nabla\rho_i &= \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N \rho_j \frac{M_j}{\rho_j} \nabla W(x-x_j, h) \\ &= \sum_{j=1}^N M_j \frac{P_i}{\rho_i^2} \nabla W(x-x_j, h) \end{aligned} \quad (3.13)$$

(3.12)式と(3.13)式を(3.11)式に代入すると

$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N M_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) \nabla W(x_i-x_j, h) \quad (3.14)$$

となる。これが流体力学の運動量保存の方程式のSPH表記法である (Monaghan 1992)。

3.2.2 エネルギー保存

エネルギー保存の方程式は(2.19)式より

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -P\nabla\vec{v} \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{P}{\rho}\nabla\vec{v} \end{aligned} \quad (3.15)$$

(3.15)式の右辺の $\nabla\vec{v}$ について

$$\begin{aligned}\nabla(\rho\vec{v}) &= v\nabla\rho + \rho\nabla v \\ \rho\nabla\vec{v} &= \nabla(\rho\vec{v}) - \vec{v}\nabla\rho\end{aligned}\tag{3.16}$$

であるから、(3.16)式の右辺の項は(3.4)式を用いてそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}\nabla(\rho\vec{v}) &= \sum_{j=1}^N \rho_j \vec{v}_j \frac{M_j}{\rho_j} \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) \\ &= \sum_{j=1}^N M_j v_j \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_j, h)\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_i \nabla\rho &= \sum_{j=1}^N \vec{v}_i \rho_j \frac{M_j}{\rho_j} \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) \\ &= \sum_{j=1}^N M_j \vec{v}_i \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_j, h)\end{aligned}\tag{3.18}$$

(3.17)式と(3.18)式を(3.16)式に代入すると

$$\rho_i \nabla\vec{v}_i = \sum_{j=1}^N M_j (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_j, h)\tag{3.19}$$

よって、(3.19)式を(3.15)式に代入すると

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N M_j (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_j, h)\tag{3.20}$$

が得られる。

また、(3.15)式の右辺は

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i} \vec{v}_i\right) &= \frac{P_i}{\rho_i} \nabla\vec{v}_i + \vec{v}_i \nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i}\right) \\ -\frac{P_i}{\rho_i} \nabla\vec{v}_i &= \vec{v}_i \nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i}\right) - \nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i} \vec{v}_i\right)\end{aligned}\tag{3.21}$$

と表せるので、(3.15)式に(3.21)式を代入すると

$$\frac{du_i}{dt} = \vec{v}_i \nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i}\right) - \nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i} \vec{v}_i\right)\tag{3.22}$$

となる。(3.22)式の右辺の項は(3.4)式を用いてそれぞれ次のようになる。

$$\vec{v}_i \nabla\left(\frac{P_i}{\rho_i}\right) = \sum_{j=1}^N \vec{v}_i \frac{P_j}{\rho_j} \frac{M_j}{\rho_j} \nabla W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h)$$

$$= \sum_{j=1}^N M_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \vec{v}_i \nabla W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{P_i}{\rho_i} \vec{v}_i \right) &= \sum_{j=1}^N \frac{P_j \vec{v}_j}{\rho_j} \frac{M_j}{\rho_j} \nabla W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h) \\ &= \sum_{j=1}^N M_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \vec{v}_j \nabla W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h) \end{aligned} \quad (3.24)$$

よって(3.22)式に(3.23)式と(3.24)式を代入すると

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^N M_j \frac{P_j}{\rho_j^2} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \nabla W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h) \quad (3.25)$$

が得られる。

(3.20)式と(3.25)式の平均をとると次式が得られる。

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N M_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \nabla W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h) \quad (3.26)$$

これが流体力学のエネルギー保存の方程式の SPH 表記法である (Monaghan 1992)。

第4章 弾塑性体の運動

4.1 応力

4.1.1 応力の定義

点 O において一定方向の線 OP と O を含み OP に垂直な面積 δA の平面を考える(図 4.1)。

OP 方向側の面を正、反対側の面を負とする。平面 δA の各点において面の一方の側の物質は他の側の物質に一定の力を及ぼしている。 δA の正の側の物質から負の側の物質に働いている力の合力を δF とすると、応力 σ_{OP} は次の式で定義される。

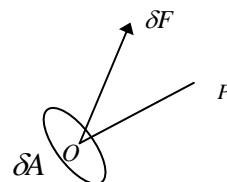


図 4.1

$$\sigma_{OP} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A} \quad (4.1)$$

次に直交座標 $O-xyz$ で考える(図 4.2)。いま、 OP を x 方向にとると、面積 δA は yz 平面内にある。そのベクトル P_x はそれぞれ x 、 y 、 z 方向において次の成分

$$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$$

に分解できる。 x 軸に垂直な成分 σ_{xx} は垂直応力とよばれる。一方、成分 σ_{xy} 、 σ_{xz} はせん断応力とよばれる。

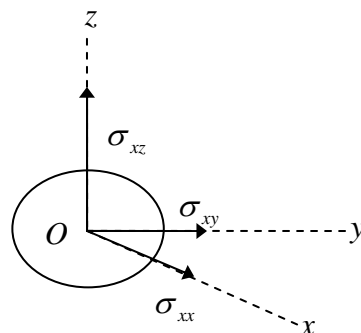


図 4.2

同様にして P_y は σ_{yy} 、 σ_{yz} 、 σ_{yx} に、 P_z は σ_{zz} 、 σ_{zx} 、 σ_{zy} に分解できる。ここで

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz}$$

である (ジエーガー 1980)。

4.1.2 応力成分の直交座標

直交座標 $O-xyz$ に関する 6 個の応力成分 (σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 、 $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ 、 $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ 、 $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$) が与えられたとき、点 O の近傍で任意方向に傾く面 ABC 上の応力成分 (p_x 、 p_y 、 p_z) を求める(図 4.3)。

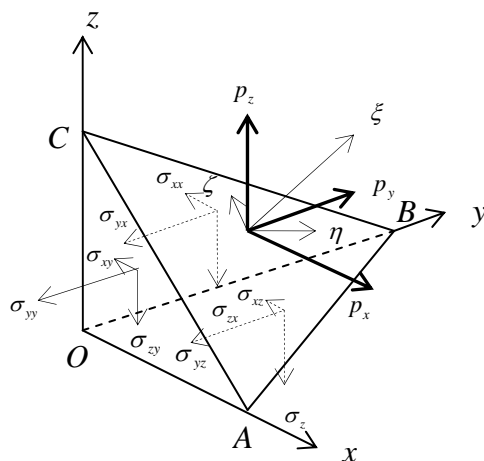


図 4.3

$\triangle ABC$ の面積を ΔA とし、点 O からこの面に下した垂線方向 (ξ 軸) の x 、 y 、 z 軸に対する方向余弦を l_1 、 m_1 、 n_1 とすると、次のような関係が得られる。

$$\begin{aligned}\triangle OBC &= l_1 \Delta A \\ \triangle OCA &= m_1 \Delta A \\ \triangle OAB &= n_1 \Delta A\end{aligned}\tag{4.2}$$

いま、 $O-ABC$ の各面にはたらく x 方向の応力を考えるとそれぞれ次のようになる。

$$\text{面 } OBC : \sigma_{xx} l_1 \Delta A$$

$$\text{面 } OCA : \sigma_{xy} m_1 \Delta A$$

$$\text{面 } OAB : \sigma_{zx} n_1 \Delta A$$

よって、 x 方向の応力のつりあいの式を立てると

$$p_x \Delta A = \sigma_{xx} l_1 \Delta A + \sigma_{xy} m_1 \Delta A + \sigma_{zx} n_1 \Delta A\tag{4.3}$$

となる。同様に y 、 z 方向についてもつりあいの式を立てると次式が得られる。

$$p_y = \sigma_{xy} l_1 + \sigma_{yy} m_1 + \sigma_{yz} n_1$$

$$p_z = \sigma_{zx} l_1 + \sigma_{yz} m_1 + \sigma_{zz} n_1\tag{4.4}$$

上式は点 O を通る任意方向 (l_1, m_1, n_1) の面上の応力成分が、 $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$ のみで表されることを示している。 $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$ を 1 点 O での応力成分という。

次に、面 ABC 上に任意の直交軸 $\eta\zeta$ を考え、直交座標系 $O'-\xi\eta\zeta$ に関する応力成分の表示式を求める。 ξ 、 η 、 ζ 軸の x 、 y 、 z 軸に関する方向余弦は表 4.1 の通りとする。

	x	y	z
ξ	l_1	m_1	n_1
η	l_2	m_2	n_2
ζ	l_3	m_3	n_3

表 4.1

まず ξ 軸について考える。力 $(p_x, p_y, p_z)\Delta A$ の各軸の成分の和が ξ 、 η 、 ζ 軸方向の力の成分であるから、これらを $(\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\xi\eta}, \sigma_{\xi\zeta})\Delta A$ としてつりあいの式を立てると

$$\sigma_{\xi\xi} = p_x l_1 + p_y m_1 + p_z n_1$$

$$\sigma_{\xi\eta} = p_x l_2 + p_y m_2 + p_z n_2$$

$$\sigma_{\xi\zeta} = p_x l_3 + p_y m_3 + p_z n_3\tag{4.5}$$

となる。(4.5)式に(4.4)式を代入するとそれぞれ

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi\xi} &= \sigma_{xx}l_1^2 + \sigma_{yy}m_1^2 + \sigma_{zz}n_1^2 + 2\sigma_{xy}l_1m_1 + \sigma_{yz}m_1n_1 + \sigma_{zx}n_1l_1 \\
\sigma_{\xi\eta} &= \sigma_{xx}l_1l_2 + \sigma_{yy}m_1m_2 + \sigma_{zz}n_1n_2 + \sigma_{xy}(l_2m_1 + l_1m_2) \\
&\quad + \sigma_{yz}(m_2n_1 + m_1n_2) + \sigma_{zx}(n_2l_1 + n_1l_2) \\
\sigma_{\xi\zeta} &= \sigma_{xx}l_1l_3 + \sigma_{yy}m_1m_3 + \sigma_{zz}n_1n_3 + \sigma_{xy}(l_3m_1 + l_1m_3) \\
&\quad + \sigma_{yz}(m_3n_1 + m_1n_3) + \sigma_{zx}(n_3l_1 + n_1l_3)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

となる。

同様に η, ζ 軸についても求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{xx}l_2^2 + \sigma_{yy}m_2^2 + \sigma_{zz}n_2^2 + 2\sigma_{xy}l_2m_2 + \sigma_{yz}m_2n_2 + \sigma_{zx}n_2l_2 \\
\sigma_{\zeta\zeta} &= \sigma_{xx}l_3^2 + \sigma_{yy}m_3^2 + \sigma_{zz}n_3^2 + 2\sigma_{xy}l_3m_3 + \sigma_{yz}m_3n_3 + \sigma_{zx}n_3l_3 \\
\sigma_{\eta\zeta} &= \sigma_{xx}l_2l_3 + \sigma_{yy}m_2m_3 + \sigma_{zz}n_2n_3 + \sigma_{xy}(l_3m_2 + l_2m_3) \\
&\quad + \sigma_{yz}(m_3n_2 + m_2n_3) + \sigma_{zx}(n_3l_2 + n_2l_3)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

直交座標に対して成分間の変換法則が上式で規定されるような量をテンソルという（山口1975）。

4.2 ひずみ

4.2.1 ひずみの定義

外力によって物体内の各点は変位を生ずる。変位の中で、剛体としての併進や回転（剛体移動）は応力に無関係であるが、各点の相対的変位は物体を伸び縮みさせたり、形状を変化させる。このような変形を数学的に規定するものがひずみである。

物体内に点 $A(x, y, z)$ があり、変形と剛体移動により点 A が点 $A'(x, y, z)$ に移動したとする。このような物体中のある点の移動量を変位といい、変位ベ

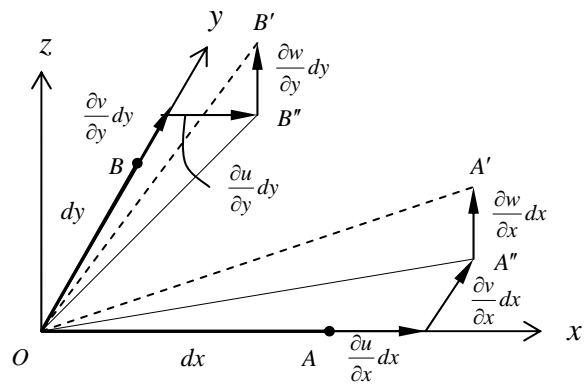


図 4.4

クトル u 、 v 、 w で表される。これらは、その点の位置によって異なるので、 x 、 y 、 z の関数である。

いま、図 4.4 のような直交座標系で OA と OB の変形（点 O に対する点 A 、 B の変位）を考える。点 O 、 A の x 方向の変位はそれぞれ u 、 $u + (\partial u / \partial x) dx$ であるので、点 A は点 O に対し x 方向に相対的に $(\partial u / \partial x) dx$ だけ変位する。

同様に、点 A は y 、 z 方向に相対的に $(\partial v / \partial x) dx$ 、 $(\partial w / \partial x) dx$ だけ変位して点 A' に移る。 y 軸上の点 B も x 、 y 、 z 方向にそれぞれ $(\partial u / \partial y) dy$ 、 $(\partial v / \partial y) dy$ 、 $(\partial w / \partial y) dy$ だけ変位して点 B' に移る。

OA から OA' への x 方向の伸び率を e_{xx} と表す。同様に、 OB から OB' への y 方向の伸び率は e_{yy} である。すなわち

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{OA' - OA}{OA} \\ e_{yy} &= \frac{OB' - OB}{OB} \end{aligned} \quad (4.8)$$

ところで OA' を求めると

$$\begin{aligned} (OA')^2 &= \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} (dx)^2 \\ OA' &= dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

となるので、(4.8)式に(4.9)式を代入すると e_{xx} は

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - dx}{dx} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \\
&= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} - 1
\end{aligned} \tag{4.10}$$

と求められる。ここで

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\} \tag{4.11}$$

である。

同様にして e_{yy} 、 e_{zz} も求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
e_{yy} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}} - 1 \\
e_{zz} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}} - 1
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

とする。

また、 xy 平面上で初め直角であった $\angle AOB$ は $\angle A'OB'$ に変化する。この角変化をせん断角といい、 $2e_{xy}$ と表す。すなわち

$$2e_{xy} = \frac{\pi}{2} - \angle A'OB' \tag{4.14}$$

$2e_{xy}$ を求めるために、 OA' と OB' の方向余弦 (l_1, m_1, n_1) 、 (l_2, m_2, n_2) を用いて

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \cos \angle A'OB' \tag{4.15}$$

という関係式を用いる。

l_1 、 m_1 、 n_1 、 l_2 、 m_2 、 n_2 はそれぞれ

$$l_1 = \frac{dx}{OA'} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad m_1 = \frac{dx}{OA'} \frac{\partial v}{\partial x} \quad n_1 = \frac{dx}{OA'} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$l_2 = \frac{dy}{OB'} \frac{\partial u}{\partial y} \quad m_2 = \frac{dy}{OB'} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad n_2 = \frac{dy}{OB'} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.16)$$

よって(4.15)式の左辺は(4.16)式を代入して

$$\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= \frac{dxdy}{OA' \cdot OB'} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\ &= \frac{dxdy}{OA' \cdot OB'} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる。また、(4.15)の右辺は(4.14)を用いて

$$\begin{aligned} \cos \angle A'OB' &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \angle A'OB' \right) \\ &= \sin(2e_{xy}) \\ &= 2e_{xy} + 0(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4.18)$$

と表される。(4.17)式と(4.18)式を(4.15)式に代入して

$$\frac{dxdy}{OA' \cdot OB'} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 2e_{xy} \quad (4.19)$$

ここで、(4.18)式と(4.12)式より

$$\begin{aligned} \frac{OA'}{dx} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} \\ \frac{OB'}{dy} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}} \\ \therefore \frac{dxdy}{OA' \cdot OB'} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

であるから、(4.19)式に代入するとせん断角は

$$2e_{xy} = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}} \quad (4.21)$$

表される。ここで

$$2\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4.22)$$

とする。

同様に $2e_{yz}$ と $2e_{zx}$ も求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
2e_{yz} &= \frac{2\varepsilon_{yz}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}\sqrt{1+2\varepsilon_{zz}}} \\
2e_{zx} &= \frac{2\gamma_{zx}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{zz}}\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}} \\
2\varepsilon_{yz} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
2\varepsilon_{zx} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ここで、(4.10)式、(4.12)式、(4.21)式、(4.23)式の $\varepsilon_{\alpha\beta}$ をまとめると以下の通りである（山口 1975）。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
2\varepsilon_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
2\varepsilon_{yz} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
2\varepsilon_{zx} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

微小範囲で考える場合、これらについて2次以上を無視することができる（島津 1978）。このとき、(4.24)式はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
\varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

この ε_{xx} 、 ε_{yy} 、 ε_{zz} を垂直ひずみ、 ε_{xy} 、 ε_{yz} 、 ε_{zx} をせん断ひずみという (山口 1975)。

4.2.2 ひずみ成分の直交変換

直交座標 $O-xyz$ に関する 6 個のひずみ成分 ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$) が与えられたとき方向余弦が (l_1, m_1, n_1)

になるような方向の垂直ひずみ $\varepsilon_{\xi\xi}$ を

求める (図 4.5)。まず、 $OA = d\xi$

とする。点 $A(dx, dy, dz)$ の点 O に

対する相対変位の成分は

$$\begin{aligned}
du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\
dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\
dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

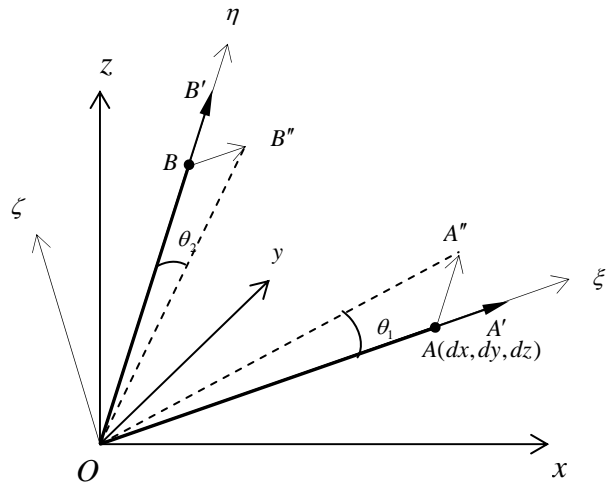


図 4.5

である。(4.26)式は点 A の x 、 y 、 z 方向への相対変位であるが、いまこれらの ξ 成分を求める。すなわち、点 A の ξ 軸方向への相対変位を表す。これを AA' とすると、次のように表される。

$$\begin{aligned}
AA' &= l_1 du + m_1 dv + n_1 dw \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} l_1 dx + \frac{\partial u}{\partial y} l_1 dy + \frac{\partial u}{\partial z} l_1 dz + \frac{\partial v}{\partial x} m_1 dx + \frac{\partial v}{\partial y} m_1 dy + \frac{\partial v}{\partial z} m_1 dz \\
&\quad + \frac{\partial w}{\partial x} n_1 dx + \frac{\partial w}{\partial y} n_1 dy + \frac{\partial w}{\partial z} n_1 dz
\end{aligned}
\tag{4.27}$$

ここで

$$l_1 = dx/d\xi$$

$$\begin{aligned} m_1 &= dy/d\xi \\ n_1 &= dz/d\xi \end{aligned} \quad (4.28)$$

を(4.27)式に代入すると

$$\begin{aligned} AA' &= \frac{\partial u}{\partial x} l_1^2 d\xi + \frac{\partial u}{\partial y} l_1 m_1 d\xi + \frac{\partial u}{\partial z} l_1 n_1 d\xi + \frac{\partial v}{\partial x} m_1 l_1 d\xi + \frac{\partial v}{\partial y} m_1^2 d\xi + \frac{\partial v}{\partial z} m_1 n_1 d\xi \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial x} n_1 l_1 d\xi + \frac{\partial w}{\partial y} n_1 m_1 d\xi + \frac{\partial w}{\partial z} n_1^2 d\xi \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} l_1^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m_1^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l_1 m_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) m_1 n_1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) n_1 l_1 \right\} d\xi \end{aligned} \quad (4.29)$$

となる。これが A 点の ξ 方向への相対的変位である。

また、 ξ 方向の伸びひずみは

$$\varepsilon_{\xi\xi} = AA'/d\xi \quad (4.30)$$

と表されるので、(4.29)式を代入して

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\partial u}{\partial x} l_1^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m_1^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l_1 m_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) m_1 n_1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) n_1 l_1 \quad (4.31)$$

となる。さらに、(4.25)式を代入すると、 ξ 方向の伸びひずみは次のように表される。

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xx} x l_1^2 + \varepsilon_{yy} y m_1^2 + \varepsilon_{zz} z n_1^2 + 2\varepsilon_{xy} l_1 m_1 + 2\varepsilon_{yz} m_1 n_1 + 2\varepsilon_{zx} n_1 l_1 \quad (4.32)$$

次に、せん断ひずみを考えるため、直交座標系 $O-\xi\eta\zeta$ を考える。 η 軸方向の方向余弦を (l_2, m_2, n_2) 、 ζ 軸方向の方向余弦を (l_3, m_3, n_3) とする。

まず、 $\xi\eta$ 軸に関するせん断ひずみを求める。せん断ひずみは角度変化により求めた。図 4.5 において、 η 成分 AA'' に応ずる角を θ_1 、点 $B(OB = d\eta)$ の点 O に対する相対変位成分 BB' に応ずる角を θ_2 とすると

$$2\varepsilon_{\xi\eta} = \theta_1 + \theta_2 \quad (4.33)$$

である。

$$\begin{aligned} AA'' &= \theta_1 d\xi, & BB' &= \theta_2 d\eta, \\ l_2 &= dx/d\eta, & m_2 &= dy/d\eta, & n_2 &= dz/d\eta \end{aligned}$$

および(4.16)式を考慮すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\eta} &= \varepsilon_{xx} l_1 l_2 + \varepsilon_{yy} m_1 m_2 + \varepsilon_{zz} n_1 n_2 \\ &\quad + \varepsilon_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \varepsilon_{yz} (n_1 m_2 + m_2 n_1) + \varepsilon_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1) \end{aligned} \quad (4.34)$$

が得られる。

このように、1点での任意直交軸に関するひずみ成分は、固定した規準となる座標に関する6個のひずみ成分 $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx})$ で表される。これらを1点でのひずみ成分という (山口 1975)。

4.3 フックの法則

バネなどの復元力は、伸び縮みが小さい場合は長さの変化の割合に比例する。流体でも、圧力の変化は密度の変化に比例する。弾塑性体の場合も同様に、変形の度合いがあまり大きくない場合は復元力すなわち応力は変化の割合に比例する。これをフックの法則という (恒藤 1983)。

せん断力がゼロである面に作用している垂直応力を主応力といい、また同様にせん断ひずみがゼロである方向の垂直ひずみを主ひずみという。等方弾性体の主ひずみの方向は対応する主応力の方向と一致する (吉田 1997)。

いま、等方・均一弾性体の主応力を $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 、主ひずみを $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ とする。棒に一軸応力 σ_1 を加えると、生じる軸ひずみ ε_1 は σ_1 の大きさに比例する。また、棒軸に垂直方向に ε_1 に比例する縮みを生ずる。これらは実験によって見出されており、次のように表される (Turcotte and Schubert 2002)。

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (4.35)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon_1 = \nu \frac{\sigma_1}{E} \quad (4.36)$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比という。これらから、棒軸方向に生じるひずみを考えると

- ・ 棒軸の主応力 σ_1 による主ひずみ σ_1/E
- ・ 棒軸に直角な主応力 σ_2 、 σ_3 による垂直ひずみ $-\nu \sigma_2/E$ 、 $-\nu \sigma_3/E$

である。したがって

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu \sigma_2}{E} - \frac{\nu \sigma_3}{E} \quad (4.37.a)$$

同様に ε_2 、 ε_3 も求めると次式が得られる (山口 1975)。

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu \sigma_3 - \nu \sigma_1}{E} \quad (4.37.b)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_2}{E} \quad (4.37.c)$$

次に、任意方向の垂直ひずみと垂直応力の間でも成り立つことを示す。まず(4.37.a)、(4.37.b)、(4.37.c)式を連立させて σ_1 、 σ_2 、 σ_3 を求める。

(4.37.a)式と(4.37.c)式より σ_2 を消去すると

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{1+\nu}{E}\sigma_3 \quad (4.38)$$

(4.37.b)式と(4.37.c)式より σ_2 を消去すると

$$\nu \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{\nu(\nu+1)}{E}\sigma_1 + \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_3 \quad (4.39)$$

(4.38)式と(4.39)式より σ_3 を消去すると

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(1-\nu) + \nu \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= \frac{(1-\nu^2) - \nu(\nu+1)}{E}\sigma_1 \\ \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\sigma_1 &= \varepsilon_1 - \nu \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (4.40)$$

(4.40)式の両辺に $2\nu \varepsilon_1$ を加えると

$$\begin{aligned} \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\sigma_1 + 2\nu \varepsilon_1 &= \nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_1 \\ \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\sigma_1 &= \nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (1-2\nu)\varepsilon_1 \\ \sigma_1 &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

同様に σ_2, σ_3 を求めると、次式が得られる。

$$\sigma_i = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_i \quad (i=1,2,3) \quad (4.42)$$

ただし $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ である。

ここで、主応力軸を xyz 軸にとると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_1 \\ \sigma_{yy} &= \sigma_2 \\ \sigma_{zz} &= \sigma_3 \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

いま、任意の直行方向 (ξ, η, ζ) が表1に示す方向余弦をもつものとする、(4.7)式より

$$\sigma_{\xi\xi} = l_1^2 \sigma_1 + m_1^2 \sigma_2 + n_1^2 \sigma_3 \quad (4.44)$$

(4.42)式を(4.44)式に代入し、 $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ を考えると

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \varepsilon + \frac{E}{1+\nu} (l_1^2 \varepsilon_1 + m_1^2 \varepsilon_2 + n_1^2 \varepsilon_3) \quad (4.45)$$

ところで、(4.32)式から $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ より、 $l_1^2 \varepsilon_1 + m_1^2 \varepsilon_2 + n_1^2 \varepsilon_3 = \varepsilon_{\xi\xi}$ なので(4.45)

式は

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} + \varepsilon_{\zeta\zeta}) + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\xi\xi} \quad (4.46)$$

同様に $\sigma_{\eta\eta}$ 、 $\sigma_{\zeta\zeta}$ も求めて、これらを $\varepsilon_{\xi\xi}$ 、 $\varepsilon_{\eta\eta}$ 、 $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ について解き、さらに ξ 、 η 、 ζ を x 、 y 、 z とすると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \{ \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \{ \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \{ \sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \} \end{aligned} \quad (4.47)$$

同様に主応力で考えると、(4.7)式と(4.43)式から

$$\sigma_{\xi\eta} = l_1 l_2 \sigma_1 + m_1 m_2 \sigma_2 + n_1 n_2 \sigma_3 \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_{\xi\eta} = l_1 l_2 \varepsilon_1 + m_1 m_2 \varepsilon_2 + n_1 n_2 \varepsilon_3 \quad (4.49)$$

$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ を考慮して(4.42)式を(4.48)式に代入すると

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\eta} &= \frac{E}{1+\nu} (l_1 l_2 \varepsilon_1 + m_1 m_2 \varepsilon_2 + n_1 n_2 \varepsilon_3) \\ &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\xi\eta} \\ &= 2G \varepsilon_{\xi\eta} \end{aligned} \quad (4.50)$$

ここで、 $G = E/2(1+\nu)$ はせん断剛性率である。(4.50)式の ξ 、 η を x 、 y にすると

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G} \\ 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G} \\ 2\varepsilon_{zx} &= \frac{\sigma_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (4.51)$$

が得られる。(4.47)式と(4.51)式が、任意直行座標に関する応力とひずみ成分の関係を表す

(山口 1975)。

また、(4.47)式と(4.51)式を応力について解くと、それぞれ次のようにも表すことができる。

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 2G\varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= 2G\varepsilon_{zx}\end{aligned}\tag{4.52}$$

ここで、ラメ定数 $\lambda = \nu E / (1 - 2\nu)(1 + \nu)$ 、剛性率 $\mu = G = E / 2(1 + \nu)$ を用いると

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 2\mu\varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= 2\mu\varepsilon_{zx}\end{aligned}\tag{4.53}$$

となる (Turcotte and Schubert 2002)。

4.4 回転

時計まわりの物体要素の剛体回転を回転という。

図 4.6 のように、四角形 $OABC$ が $OA'B'C'$ の位置まで時計まわりに回転したとする。このときの回転成分 R_{xy} は変位ベクトル $u = \{u_x, u_y, u_z\}$ の勾配 $(\partial u_i / \partial x_i)$ を用いて次のように表される (吉田 1997)。

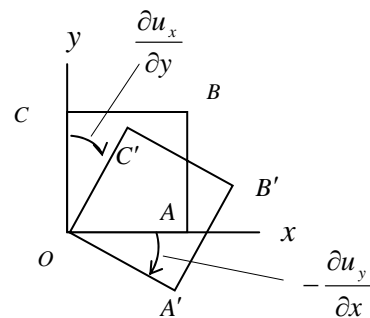


図 4.6

$$\begin{aligned}
R_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
R_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
R_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

4.5 偏差応力

弾性体に応力が加えられると、フックの法則にしたがってひずみが生じる。すなわち応力に比例してひずみが生じ、応力を0に戻せばひずみも消失する(山口 1975)。しかし応力には限度があり、それ以上の力を加えると非線型的、かつ非可逆的な塑性変形が始まる。フックの法則の成り立つ限界を降伏点といい、物質により異なる(伊達 1993)。降伏するために物体内の要素に関する応力成分が満たす条件を降伏条件という。

塑性変形は、静水圧だけでは起こらない。よって、降伏条件を考える際は、実際の圧力から静水圧を減ずる必要がある。垂直応力の各成分から静水圧応力 σ_m を引いたものを偏差応力 S_{ij} と定義する(吉田 1997)。

$$\begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

すなわち

$$S_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \sigma_m \tag{4.56}$$

ここで、 $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタ記号であり、次のように定義される。

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1(\alpha = \beta) \\ 0(\alpha \neq \beta) \end{cases} \tag{4.57}$$

(4.53)式の応力—ひずみ関係を $\delta_{\alpha\beta}$ を用いて表すと

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} \tag{4.58}$$

となる。3次元の場合、(4.58)式より、垂直応力の各成分の和は

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} &= \lambda \cdot 3\varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu\varepsilon_{\gamma\gamma} \\
&= (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\gamma\gamma}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

と求められる。静水圧の定義より

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3P \quad (4.60)$$

であるから (Turcotte and Schubert 2002)、(4.59)式と(4.60)式より

$$\begin{aligned} -3P &= (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\gamma\gamma} \\ P &= -\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\gamma\gamma} \\ &= -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{\gamma\gamma} \\ &= -K\varepsilon_{\gamma\gamma} \end{aligned} \quad (4.61)$$

ここで、 $K = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)$ は体積弾性率である。

(4.61)式の両辺に $\delta_{\alpha\beta}$ をかけると

$$P\delta_{\alpha\beta} = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} \quad (4.62)$$

(4.58)式と(4.62)式の辺々を足しあわせると

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} + P\delta_{\alpha\beta} &= 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta} &= -\left\{P\delta_{\alpha\beta} - 2\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)\right\} \end{aligned} \quad (4.63)$$

となる。したがって偏差応力は、偏差応力の定義より

$$S_{\alpha\beta} = 2\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) \quad (4.64)$$

と表される。

4.6 降伏条件

降伏関数は偏差応力とその第 2、第 3 不変量 J_2 、 J_3 の関数で表わされる。ここで、 J_1 、 J_2 、 J_3 はそれぞれ次のように定義される (山口 1975)。

$$J_1 = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2}S_{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2) + S_{xy}^2 + S_{yx}^2 + S_{zx}^2$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma} S_{\gamma\alpha} \quad (4.65)$$

$J_1 = 0$ であるので、結果的に降伏関数は J_2 、 J_3 の関数となり

$$f(J_2, J_3) = 0 \quad (4.66)$$

と表される。

また、降伏応力を Y_s とすると、Mises の降伏条件は

$$J_2 = \frac{Y_s^2}{\sqrt{3}} \quad (4.67)$$

となる。よって、降伏関数 f は

$$f = \min \left(\sqrt{\frac{Y_s^2}{3J_2}}, 1 \right) \quad (4.68)$$

と表され (Libersky and Petschek 1993)、弾塑性体における偏差応力は

$$S'_{\alpha\beta} = f S_{\alpha\beta} \quad (4.69)$$

となる (Wingate and Fisher 1991)。

4.7 流体力学の基礎方程式の弾塑性体への適用

4.7.1 運動量保存

流体力学の運動量保存の方程式(2.11)式を弾塑性体に書きかえるため、圧力 P を応力 σ と置く。

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \quad (4.70)$$

ここで、(4.63)式の応力を偏差応力 $S_{\alpha\beta}$ を用いて表すと

$$\sigma_{\alpha\beta} = -(P\delta_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}) \quad (4.71)$$

(4.70)式の $\sigma_{\alpha\beta}$ を(4.71)式で与えると、弾塑性体力学の運動量保存の方程式が得られる

(Wingate and Fisher 1991)。

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P\delta_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}) \quad (4.72)$$

本研究では、3次元直交座標系を用いて数値シミュレーションを行う。よって(4.72)式を

3次元で表すと

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \\
 \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} \right) \\
 \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial S_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial S_{zy}}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

となる。これが弾塑性体力学の運動量保存の方程式である。

4.7.2 エネルギー保存

4.7.1 の運動量保存の方程式と同様にして、流体力学のエネルギー保存の方程式(2.19)式を弾塑性体にかきかえると

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{du}{dt} &= \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_\beta \\
 &= \left(\sigma_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \sigma_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \sigma_{yz} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \sigma_{zx} \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\
 &= (-P + S_{xx}) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (-P + S_{yy}) \frac{\partial v_y}{\partial y} + (-P + S_{zz}) \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 &\quad + S_{xy} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + S_{yz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + S_{zx} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
 &= -P \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + S_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + S_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + S_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 &\quad + S_{xy} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + S_{yz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + S_{zx} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

となる (Wingate and Fisher 1991)。これが弾塑性体力学のエネルギー保存の方程式である。

第5章 弾塑性体の SPH 表記法

前章で述べたように、弾塑性体の運動は 4.7.1、4.7.2 の各方程式 ((4.73)式、(4.74)式) で示される。流体の SPH 表記法と同様にして、弾塑性体の基礎方程式の SPH 表記を以下に導く。

5.1 運動量保存

(4.73) 式より、弾塑性体力学の運動量保存の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial S_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial S_{zy}}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{5.1}$$

である。これらを SPH の基本式 ((3.2)式) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dv_{xi}}{dt} &= \sum M_j \left\{ - \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + Q_{ij} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{S_{xxi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{xj}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} + \left(\frac{S_{xyi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{xyj}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} + \left(\frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{zj}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^N M_j W \left\{ - \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + Q_{ij} \right) (x_i - x_j) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{S_{xxi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{xj}}{\rho_j^2} \right) (x_i - x_j) + \left(\frac{S_{xyi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{xyj}}{\rho_j^2} \right) (y_i - y_j) + \left(\frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{zj}}{\rho_j^2} \right) (z_i - z_j) \right\} \\ \frac{dv_{yi}}{dt} &= \sum_{j=1}^N M_j \left\{ - \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + Q_{ij} \right) \frac{\partial W}{\partial y} \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{S_{yyi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{yyj}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} + \left(\frac{S_{yzi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{yzj}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial z} + \left(\frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{zxj}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \Big\} \\
& = \sum_{j=1}^N M_j w \left\{ - \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + Q_{ij} \right) (y_i - y_j) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{S_{yyi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{yyj}}{\rho_j^2} \right) (y_i - y_j) + \left(\frac{S_{yzi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{yzj}}{\rho_j^2} \right) (z_i - z_j) + \left(\frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{zxj}}{\rho_j^2} \right) (x_i - x_j) \right\} \\
\frac{dv_{zi}}{dt} & = \sum_{j=1}^N M_j \left\{ - \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + Q_{ij} \right) \frac{\partial W}{\partial z} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{S_{zzi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{zzj}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial z} + \left(\frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{zxj}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} + \left(\frac{S_{yzi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{yzj}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} \right\} \\
& = \sum_{j=1}^N M_j w \left\{ - \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + Q_{ij} \right) (z_i - z_j) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{S_{zzi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{zzj}}{\rho_j^2} \right) (z_i - z_j) + \left(\frac{S_{zxi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{zxj}}{\rho_j^2} \right) (x_i - x_j) + \left(\frac{S_{yzi}}{\rho_i^2} + \frac{S_{yzj}}{\rho_j^2} \right) (y_i - y_j) \right\}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

となる。本研究では、SPH法の基本式 ((3.2)式) の平均化関数 W にはガウス関数 ((3.6)式) を用いる。

$$W = \left(\frac{1}{\pi h^2} \right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{h^2} \right) \tag{5.3}$$

(5.2)式では、 w を次のように定義した。

$$w = -\frac{2}{h^2} W \tag{5.4}$$

これが弾塑性体力学の運動量保存の方程式の SPH 表記法である。ただし、 Q は人口粘性項であり、次のように表される。

$$Q_{ij} = \frac{2}{\rho_i + \rho_j} \left(2 \times \omega^2 - 1 \times \omega \frac{C_i + C_j}{2} \right) \quad (5.5)$$

ここで

$$\omega = \frac{h(v_{xij}x_{ij} + v_{yij}y_{ij} + v_{zij}z_{ij})}{x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} + 0.01h^2} \quad (5.6)$$

C : 音速

5.2 ひずみ

(4.25) 式より、ひずみは

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

である。

これらを(3.2)式に代入して SPH 法で表と

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xx} &= \frac{d\varepsilon_{xx}}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\rho_i} (v_{xi} - v_{xj}) \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \frac{M_j w}{\rho_i} (v_{xi} - v_{xj})(x_i - x_j) \\ \dot{\varepsilon}_{yy} &= \frac{d\varepsilon_{yy}}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\rho_i} (v_{yi} - v_{yj}) \frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \frac{M_j w}{\rho_i} (v_{yi} - v_{yj})(y_i - y_j) \\ \dot{\varepsilon}_{zz} &= \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\rho_i} (v_{zi} - v_{zj}) \frac{\partial W}{\partial z} = \sum_{j=1}^N \frac{M_j w}{\rho_i} (v_{zi} - v_{zj})(z_i - z_j) \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{d\varepsilon_{xy}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\rho_i} \left\{ (v_{xi} - v_{xj}) \frac{\partial W}{\partial y} + (v_{yi} - v_{yj}) \frac{\partial W}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j w}{\rho_i} \left\{ (v_{xi} - v_{xj})(y_i - y_j) + (v_{yi} - v_{yj})(x_i - x_j) \right\} \\
\dot{\varepsilon}_{yz} &= \frac{d\varepsilon_{yz}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\rho_i} \left\{ (v_{yi} - v_{yj}) \frac{\partial W}{\partial z} + (v_{zi} - v_{zj}) \frac{\partial W}{\partial y} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j w}{\rho_i} \left\{ (v_{yi} - v_{yj})(z_i - z_j) + (v_{zi} - v_{zj})(y_i - y_j) \right\} \\
\dot{\varepsilon}_{zx} &= \frac{d\varepsilon_{zx}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\rho_i} \left\{ (v_{zi} - v_{zj}) \frac{\partial W}{\partial x} + (v_{xi} - v_{xj}) \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j w}{\rho_i} \left\{ (v_{zi} - v_{zj})(x_i - x_j) + (v_{xi} - v_{xj})(z_i - z_j) \right\}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

となる。これがひずみの SPH 表記である。

5.3 回転

(4.54) 式より回転は

$$\begin{aligned}
R_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\
R_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\
R_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

である。これらを(3.2)式に代入して SPH 法で表すと

$$\begin{aligned}
\dot{R}_{xy} &= \frac{dR_{xy}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\rho_i} \left\{ (v_{xi} - x_{xj}) \frac{\partial W}{\partial y} - (v_{yi} - x_{yj}) \frac{\partial W}{\partial x} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j w}{\rho_i} \left\{ (v_{xi} - x_{xj})(y_i - y_j) - (v_{yi} - x_{yj})(x_i - x_j) \right\} \\
\dot{R}_{yz} &= \frac{dR_{yz}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\rho_i} \left\{ (v_{yi} - v_{yj}) \frac{\partial W}{\partial z} - (v_{zi} - v_{zj}) \frac{\partial W}{\partial y} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j w}{\rho_i} \left\{ (v_{yi} - x_{yj})(z_i - z_j) - (v_{zi} - v_{zj})(y_i - y_j) \right\} \\
\dot{R}_{zx} &= \frac{dR_{zx}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{\rho_i} \left\{ (v_{zi} - v_{zj}) \frac{\partial W}{\partial x} - (v_{xi} - v_{xj}) \frac{\partial W}{\partial z} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{M_j w}{\rho_i} \left\{ (v_{zi} - v_{zj})(x_i - x_j) - (v_{xi} - v_{xj})(z_i - z_j) \right\} \quad (5.10)$$

となる。これが回転の SPH 表記である。

5.4 偏差応力

偏差応力は(4.64)式で与えられるが、SPH 表記をするため、この時間変化を考える。物体が大変形をとまなう場合の偏差応力の時間変化は次のように表される (Wingate and Fisher 1991)。

$$\frac{dS_{\alpha\beta}}{dt} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + S_{\alpha\gamma} \dot{R}_{\beta\gamma} + S_{\gamma\beta} \dot{R}_{\alpha\gamma} \quad (5.11)$$

3次元で考えると、それぞれ次のようになる。

$$\frac{dS_{xx}}{dt} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \times \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{xx}}{\partial t} - \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{yy}}{\partial t} - \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{zz}}{\partial t} \right) + 2S_{xy} \dot{R}_{xy} - 2S_{zx} \dot{R}_{zx}$$

$$\frac{dS_{yy}}{dt} = \frac{2}{3} \mu \left(-\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{xx}}{\partial t} + 2 \times \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{yy}}{\partial t} - \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{zz}}{\partial t} \right) - 2S_{xy} \dot{R}_{xy} + 2S_{yz} \dot{R}_{yz}$$

$$\frac{dS_{zz}}{dt} = \frac{2}{3} \mu \left(-\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{xx}}{\partial t} - \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{yy}}{\partial t} + 2 \times \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{zz}}{\partial t} \right) - 2S_{xy} \dot{R}_{xy} + 2S_{zx} \dot{R}_{zx}$$

$$\frac{dS_{xy}}{dt} = 2\mu \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{xy}}{\partial t} + (S_{yy} - S_{xx}) \dot{R}_{xy} + S_{xz} \dot{R}_{yz} - S_{yz} \dot{R}_{zx}$$

$$\frac{dS_{yz}}{dt} = 2\mu \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{yz}}{\partial t} + (S_{zz} - S_{yy}) \dot{R}_{yz} + S_{yx} \dot{R}_{zx} - S_{zx} \dot{R}_{xy}$$

$$\frac{dS_{zx}}{dt} = 2\mu \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{zx}}{\partial t} + (S_{xx} - S_{zz}) \dot{R}_{zx} + S_{yz} \dot{R}_{xy} - S_{xy} \dot{R}_{yz} \quad (5.12)$$

ここで $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ 、 $\dot{R}_{\alpha\beta}$ には 5.2、5.3 で求めたものを用いる。

5.5 エネルギー保存

(4.74)式より、弾塑性体力学のエネルギー保存の方程式は

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left\{ P \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} \right) + S_{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \right\} \quad (5.13)$$

である。(3.2)式を用いて SPH 法で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} = \sum M_j \left[- \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \left\{ (v_{xi} - v_{xj}) \frac{\partial W}{\partial x} + (v_{yi} - v_{yj}) \frac{\partial W}{\partial y} + (v_{zi} - v_{zj}) \frac{\partial W}{\partial z} + \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_i} (S_{xx} \varepsilon_{xx} + S_{yy} \varepsilon_{yy} + S_{zz} \varepsilon_{zz} + S_{xy} \varepsilon_{xy} + S_{yz} \varepsilon_{yz} + S_{zx} \varepsilon_{zx}) \right] \quad (5.14) \end{aligned}$$

これが弾塑性体力学のエネルギー保存の方程式の SPH 表記法である。

第6章 ランキン・ユゴニオ方程式

6.1 ランキン・ユゴニオ方程式

超音速物体が固体あるいは流体に衝突するとき、標的の媒体中には衝撃波が発生する。ランキン・ユゴニオ方程式は、圧力 p 、内部エネルギー E 、密度 ρ の関係式であり、衝撃波の通過前後の状態を表す (Melosh 1989)。簡単のため、衝撃波はその面に垂直な方向に伝播する垂直衝撃波として考える。衝撃波面に平行な方向の物理量の変化は考えなくてよいため、理論的な扱いは容易になる。

ここでは、一次元衝撃波面の前後で成立する単位面積当たりの質量、運動量、エネルギーの保存則を考える。物体中を衝撃波面が運動していく場合と、座標系に固定された衝撃波面の前後を物体が運動していく場合の2通りの方法で、ユゴニオ方程式を導出する。

6.2 衝撃波面が運動する場合のユゴニオ方程式の導出

図 6.1 は、衝撃波が伝わっている物体の時刻 t と t' における状態である。衝撃波の速度を U 、衝撃を受けた部分の速度を u_p とし、物体の断面積 A は常に一定としている。

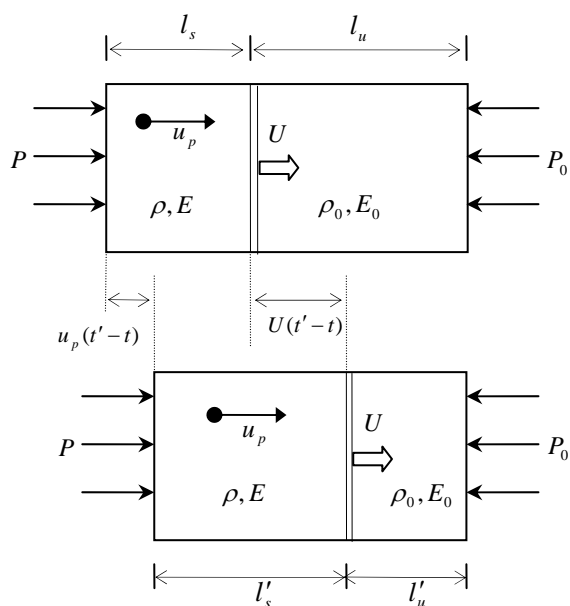


図 6.1 上が時刻 t 、下が時刻 t'

6.2.1 質量保存

時刻 t における衝撃を受けていない部分の長さを l_u 、受けた部分の長さを l_s とおく。時刻 t' では、衝撃波は $U(t' - t)$ だけ進み、衝撃を受けた部分は $u_p(t' - t)$ だけ運動する。よって、このときの衝撃を受けていない部分と受けた部分の長さ l'_u 、 l'_s はそれぞれ

$$l'_u = l_u - U(t' - t) \quad (6.1)$$

$$l'_s = l_s + U(t' - t) - u_p(t' - t) \quad (6.1)$$

と表される。

質量保存の法則より、時刻 t と t' での質量は等しいので

$$\rho l_s A + \rho_0 l_u A = \rho l'_s A + \rho_0 l'_u A \quad (6.3)$$

が成り立つ。(6.1)式と(6.2)式を代入すると

$$0 = \rho(U - u_p)(t' - t) - \rho_0 U(t' - t)$$

$$\rho(U - u_p) = \rho_0 U \quad (6.4)$$

が得られる。これが質量保存の方程式である (Melosh 1989)。

6.2.2 運動量保存

衝撃を受けた部分の端 (図 6.1 の左端) から受ける圧力 p は、受けていない部分の端 (図 6.1 の右端) から受ける圧力 P_0 よりも大きい。よって、物体が受ける力 $F = (P - P_0)A$ は右向きである。

時刻 t 、 t' における運動量は、それぞれ $\rho l_s u_p A$ 、 $\rho l'_s u_p A$ である。運動量保存則より、運動量の変化は、その間に物体に与えられた力積 $F(t' - t)$ に等しいので

$$\rho l'_s u_p A - \rho l_s u_p A = (P - P_0)A(t' - t) \quad (6.5)$$

が成り立つ。 l'_s に(6.2)式を代入すると

$$\rho(U - u_p)u_p = (P - P_0) \quad (6.6)$$

となる。(6.4)式より、 $\rho(U - u_p) = \rho_0 U$ とおくと

$$P - P_0 = \rho_0 U u_p \quad (6.7)$$

が得られる。これが運動量保存の方程式である (Melosh 1989)。

6.2.3 エネルギー保存

時刻 t における物体の全エネルギー $E_{tot}(t)$ は、衝撃を受けた部分の内部エネルギー、運動エネルギー及び衝撃を受けていない部分の内部エネルギーの和である。

$$E_{tot}(t) = \rho_0 l_u E_0 A + \rho l_s EA + \frac{1}{2} \rho l_s u_p^2 A \quad (6.8)$$

同様に、時刻 t' での物体の全エネルギー $E_{tot}(t')$ は

$$E_{tot}(t') = \rho_0 l'_u E_0 A + \rho l'_s EA + \frac{1}{2} \rho l'_s u_p^2 A \quad (6.9)$$

エネルギー保存則より、エネルギー変化は物体が時刻 t 、 t' 間にした仕事 $PAu_p(t'-t)$ に等しい。よって

$$E_{tot}(t') - E_{tot}(t) = PAu_p(t'-t) \quad (6.10)$$

が成り立つ。(6.8)式、(6.9)式、(6.1)式、(6.2)式を代入すると

$$-\rho_0 E_0 U + \rho E(U - u_p) + \frac{1}{2} \rho u_p^2 (U - u_p) = Pu_p \quad (6.11)$$

となる。(6.4)式より、 $\rho(U - u_p) = \rho_0 U$ とすると

$$\rho_0 U(E - E_0) + \frac{1}{2} \rho_0 u_p^2 U = Pu_p \quad (6.12)$$

が得られる。

ここで、先に求めた2つのユゴニオ方程式(6.4)式と(6.7)式を用いて u_p 、 U を求める。

$$\begin{cases} \rho(U - u_p) = \rho_0 U \\ P - P_0 = \rho_0 U u_p \end{cases}$$

上の2式をそれぞれ以下のように変形する。

$$\rho u_p = (\rho - \rho_0)U \quad (6.13)$$

$$\rho_0 u_p = \frac{P - P_0}{U} \quad (6.14)$$

(6.13)式、(6.14)式の辺々をかけ合せると

$$\rho \rho_0 u_p^2 = (\rho - \rho_0)(P - P_0) \quad (6.15)$$

よって u_p は

$$u_p = \sqrt{(P - P_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right)} \quad (6.16)$$

となる。 $V = 1/\rho$ とすると

$$u_p = \sqrt{(p - p_0)(V_0 - V)} \quad (6.17)$$

が得られる。

(6.13)式より

$$U = \frac{\rho}{\rho - \rho_0} u_p$$

u_p に(6.16)式を代入して 2 乗すると

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{\rho^2}{(\rho - \rho_0)^2} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 \rho} (P - P_0) \\ &= \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\rho}{\rho - \rho_0} (P - P_0) \\ &= \frac{1}{\rho_0^2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right)^{-1} (P - P_0) \end{aligned}$$

よって

$$U = \frac{1}{\rho_0} \sqrt{\frac{P - P_0}{V_0 - V}} \quad (6.18)$$

が得られる。

最後に(6.17)式の u_p と(6.18)式の U を(6.12)式に代入すると

$$E - E_0 = \frac{1}{2} (P + P_0)(V_0 - V) \quad (6.19)$$

となる。これがエネルギー保存の方程式である(Melosh 1989)。

6.3 衝撃波を固定した場合のユゴニオ方程式の導出

衝撃波面が座標軸に固定されている場合の流れを考える(図 6.2)。衝撃波面の前後はいずれも一様な状態であるとする。衝撃波面前後の流体の密度を ρ_1 、 ρ_2 、流速を u_1 、 u_2 とする。

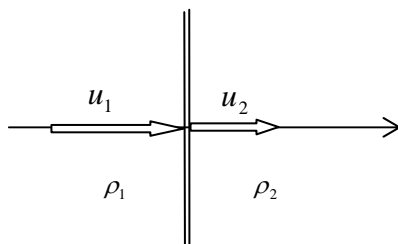


図 6.2

6.3.1 質量保存

衝撃を受ける前の物質が、 Δt 後に衝撃波を通過したとする。この Δt の間に衝撃波面に単位面積当たり流入した質量と流出した質量は等しい。

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 \Delta t &= \rho_2 u_2 \Delta t \\ \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2\end{aligned}\tag{6.20}$$

よって、波面を単位面積、単位時間当たりには通過する流体の質量は常に一定である。これが質量保存の方程式である。

6.3.2 運動量保存

物体が受ける単位面積当たりの力積は $(P_2 - P_1)\Delta t$ である。また、通過前後の単位面積当たりの運動量はそれぞれ $\rho_1 u_1^2 \Delta t$ 、 $\rho_2 u_2^2 \Delta t$ である。よって

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1^2 \Delta t - \rho_2 u_2^2 \Delta t &= (P_2 - P_1)\Delta t \\ \rho_1 u_1^2 + P_1 &= \rho_2 u_2^2 + P_2\end{aligned}\tag{6.21}$$

が成り立つ。これが運動量保存の方程式である。

6.3.3 エネルギー保存

流入前後の単位面積・単位時間当たりの流体の全エネルギーは、

$$\begin{aligned}E_{1(tot)} &= Q\left(E_1 + \frac{1}{2}u_1^2\right) \\ E_{2(tot)} &= Q\left(E_2 + \frac{1}{2}u_2^2\right)\end{aligned}\tag{6.22}$$

である。また、このときした仕事は $(P_1 u_1 - P_2 u_2)$ である。よって(6.22)式より

$$\begin{aligned}E_{2(tot)} - E_{1(tot)} &= P_1 u_1 - P_2 u_2 \\ Q\left(E_2 + \frac{1}{2}u_2^2\right) - Q\left(E_1 + \frac{1}{2}u_1^2\right) &= P_1 u_1 - P_2 u_2 \\ P_1 u_1 + Q\left(E_1 + \frac{1}{2}u_1^2\right) &= P_2 u_2 + Q\left(E_2 + \frac{1}{2}u_2^2\right)\end{aligned}\tag{6.23}$$

が成り立つ。

流体が、一定比熱の理想気体であるとする $P = \rho RT$ が成り立つので、これを(6.23)式に代入すると左辺は

$$\begin{aligned}
& \rho_1 RT_1 u_1 + Q \left(\frac{1}{2} u_1^2 + E_1 \right) \\
& = Q \left(RT_1 + \frac{u_1^2}{2} + E_1 \right)
\end{aligned} \tag{6.24}$$

となる。

$$E_u = c_v T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \tag{6.25}$$

$$R = c_p - c_v = c_v (\gamma - 1) \tag{6.26}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}
& Q \left\{ c_v (\gamma - 1) T_1 + \frac{u_1^2}{2} + c_v T_1 \right\} \\
& = Q \left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} \right)
\end{aligned} \tag{6.27}$$

となる。ここで c_p 、 c_v 、 γ は定圧比熱、定積比熱である。

右辺も同様にして Q を消去すると

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_2}{\rho_2} \tag{6.28}$$

となる。

(6.21)式と(6.28)式に $u_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} u_2$ ((6.20)式より) を代入すると

(6.21)式は

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 u_2^2 + P_1 = \rho_2 u_2^2 + P_2 \\
& u_2^2 = \frac{\rho_1 (P_2 - P_1)}{\rho_2 (\rho_2 - \rho_1)}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

(6.28)式は

$$\frac{u_2^2}{2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_2}{\rho_2}$$

$$\frac{u_2^2}{2} \frac{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 + \rho_1)}{\rho_1^2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\rho_1 P_2 - \rho_2 P_1}{\rho_1 \rho_2} \quad (6.30)$$

となる。(6.30)式に(6.29)式を代入して整理すると

$$\frac{P_2 - P_1}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\rho_1 P_2 - \rho_2 P_1}{\rho_2 - \rho_1} \quad (6.31)$$

となる。両辺に $(\rho_1 + \rho_2)/\rho_1$ をかけると

$$\frac{P_2 - P_1}{2} \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\rho_1 P_2 - \rho_2 P_1}{\rho_1} \quad (6.32)$$

$2(\gamma - 1)$ をかけると

$$(\gamma - 1)(P_2 - P_1) \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1} = 2\gamma \frac{\rho_1 P_2 - \rho_2 P_1}{\rho_1} \quad (6.33)$$

ρ_2/ρ_1 でくくって整理すると

$$\{(\gamma - 1)(P_2 - P_1) + 2\gamma P_1\} \frac{\rho_2}{\rho_1} = (\gamma - 1)(P_1 - P_2) + 2\gamma P_2 \quad (6.34)$$

各項を P_1 で割って

$$\left\{ (\gamma + 1) + (\gamma - 1) \frac{P_2}{P_1} \right\} \frac{\rho_2}{\rho_1} = (\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{P_2}{P_1}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\gamma + 1) + (\gamma - 1)P_2/P_1}{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)P_2/P_1} = \frac{u_2}{u_1} \quad (6.35)$$

が得られる。これがエネルギー保存の方程式である。

6.4 平面衝突の近似

ここではユゴニオ方程式を用いて、厚さ L の衝突体が速度 v_i で標的に衝突した場合の速度を求める(図 6.3)。衝突体は水平方向に無限に続く平面であるとし、衝突したときを $t = 0$ とする。また、物体の移動距離は、 $t = 0$ のときの衝突体と標的との境界面を基準面として考える(図 6.3.1)。

まず衝突後、強い衝撃が衝突体と標的の両方に伝わる。上下に伝った衝撃に挟まれた部分の速度は u_t 、圧力は P となり、衝突体と標的とで同じである。衝突体でまだ衝撃を受けていない部分は v_i で運動し続ける。よって、衝撃を受けたことによる減速を u_p とすると、衝撃を受けた部分は速度 $u_t = v_i - u_p$ で運動する。同様に、衝突体中を伝わる衝撃波の速度を U_p とすると、衝撃波は $v_i - U_p$ で伝わる。

衝突体の上端に衝撃波が到達したときを $t = t_c$ とする(図 6.3.2)。このとき、衝突体と標的との境界面は、 $t = 0$ のときの基準面から $u_t t_c$ だけ移動している。

衝撃波が衝突体の上端に達すると、そこから下方に向かって膨張波が発生する。この膨

張波が衝突体と標的との境界面に達したときを $t = t_C + t_R$ とする (図 6.3.3)。これをもって圧縮段階の終了とする。膨張波によって動かされる衝突体の物質の速度を u_R とすると、衝突体の運動速度は $u_t - u_R$ である。同様に、衝突体中を伝わる膨張波の速度を C_R とすると、膨張波の速度は $C_R + u_t$ である。

衝撃波速度 U と衝撃により物質が動く速度 u は実験的に

$$U = C + Su \quad (6.36)$$

という線形関係があることが知られている。よって U_t 、 U_p 、 u_t 、 u_p の関係は、以下のよ
うに表すことができる。

$$U_t = C_t + S_t u_t \quad (6.37)$$

$$U_p = C_p + S_p u_p \quad (6.38)$$

ここで C_t 、 C_p (速度の次元) と S_t 、 S_p (次元なし) は物質によって決まる定数である。

よって u_t が分かれば、 u_p は $u_t = v_i - u_p$ (v_i は既知) より求まるので、(6.37)式と(6.38)式

より U_t 、 U_p を求めることができる。

前に求めた衝撃の圧力 P 、衝突後の密度 ρ_t 、 ρ_p 、内部エネルギー E_t 、 E_p の関係は(6.4)

式と(6.7)式と(6.19)式より

$$\rho(U - u) = \rho_0 U \quad (6.39)$$

$$P - P_0 = \rho_0 u U \quad (6.40)$$

$$E - E_0 = (P + P_0)(V_0 - V) / 2 \quad (6.41)$$

であった。

まず標的について $P_t = \rho_{0t} U_t u_t$ ((6.40)式より)に $\rho_t(U_t - u_t) = \rho_{0t} U_t$ ((6.39)式)を代入すると

$$P_t = \rho_t u_t (U_t - u_t) \quad (6.42)$$

衝突体についても同様に

$$P_p = \rho_p u_p (U_p - u_p) \quad (6.43)$$

衝突体と標的の衝突を受けた後の圧力 P_p 、 P_t は等しいので、(6.42)式と(6.43)式より

$$\rho_t u_t (U_t - u_t) = \rho_p u_p (U_p - u_p) \quad (6.44)$$

また、(6.39)式より $\rho_p(U_p - u_p) = \rho_{0p}U_p$ と $\rho_t(U_t - u_t) = \rho_{0t}U_t$ を用いて

$$\frac{\rho_p(U_p - u_p)}{\rho_t(U_t - u_t)} = \frac{\rho_{0p}U_p}{\rho_{0t}U_t} \quad (6.45)$$

(6.44)式と(6.45)式より ρ_p 、 ρ_t を消去すると

$$\frac{u_t(U_t - u_t)}{u_p(U_p - u_p)} \frac{(U_p - u_p)}{(U_t - u_t)} = \frac{\rho_{0p}U_p}{\rho_{0t}U_t}$$

$$\rho_{0t}u_tU_t = \rho_{0p}u_pU_p \quad (6.46)$$

(6.46)式に、(6.37)式と(6.38)式を代入すると

$$\rho_{0t}u_t(C_t + S_t u_t) = \rho_{0p}u_p(C_p + S_p u_p) \quad (6.47)$$

(6.47)式に $u_p = v_i - u_t$ を代入して u_p を消去すると

$$\rho_{0t}u_t(C_t + S_t u_t) = \rho_{0p}C_p(v_i - u_t) + \rho_{0p}S_p(v_i - u_t)^2$$

u_t について整理すると

$$(\rho_{0t}S_t - \rho_{0p}S_p)u_t^2 + (\rho_{0t}C_t + \rho_{0p}C_p + 2\rho_{0p}S_p v_i)u_t - \rho_{0p}v_i(C_p + S_p v_i) = 0 \quad (6.48)$$

よって

$$u_t = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (6.49)$$

$$A = \rho_{0t}S_t - \rho_{0p}S_p \quad (6.50)$$

$$B = \rho_{0t}C_t + \rho_{0p}C_p + 2\rho_{0p}S_p v_i \quad (6.51)$$

$$C = \rho_{0p}v_i(C_p + S_p v_i) \quad (6.52)$$

より u_t を求めることができる (衝突体と標的の衝撃を受けていない部分の密度 ρ_{0t} 、 ρ_{0p} は既知である)。 u_t が求めれば、衝突圧力 P 、衝撃波速度 U 等全ての衝撃後の状態を示す物理量を見積もることができる (Melosh 1989)。

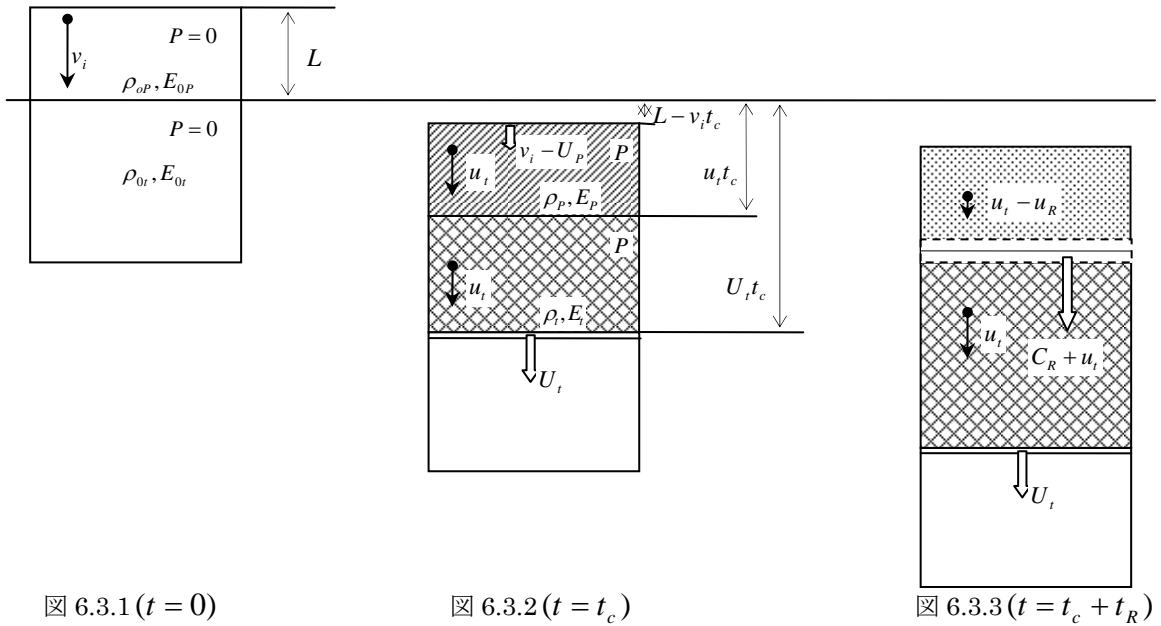


図 6.3.1 ($t = 0$)

図 6.3.2 ($t = t_c$)

図 6.3.3 ($t = t_c + t_R$)

図 6.3

6.5 状態方程式

与えられている 1 つの閉じた系を考えたとき、その熱力学的な状態を完全に表すためには、物質の状態変数が必要である。この状態変数を他の状態変数の組の一価関数として表すことができるとき、この関数関係を状態方程式と呼ぶ (ファン 1970)。

ここでは圧力 P の計算に Mie-Gruneisen 状態方程式と、先に求めたユゴニオ方程式を用いた Rankine-Hugoniot 状態方程式を用いる。

< Mie-Gruneisen 状態方程式 >

$$P = \gamma \rho E \quad (6.53)$$

γ : Gruneisen パラメーター、 E : 内部エネルギー

< Rankine-Hugoniot 状態方程式 >

圧力は次のように表される。

$$P = \left(1 - \frac{1}{2} \gamma \eta\right) P_H + \gamma \rho (E - E_H) \quad (6.54)$$

ここで、 $\eta = \rho / \rho_0 - 1$ である。

また、 P_H と E_H は(6.36)式の C と S を用いて

$$P_H = \begin{cases} \frac{\rho_0 C^2 \eta (1 + \eta)}{\{1 - (S - 1)\mu\}^2} & (\eta > 0) \\ 0 & (\eta < 0) \end{cases} \quad (6.55)$$

$$E_H = \frac{1}{2} \frac{P_H}{\rho_0} \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right) \quad (6.56)$$

で与えられる (Melosh 1989)。
ただし、 $E < E_H$ のとき圧力は

$$P(\rho, E) = \left(1 - \frac{1}{2} \Gamma \eta \right) P_H \quad (6.57)$$

であるとする。

第7章 数値計算法

7.1 Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法は、数値解析において常微分方程式の近似解を求める方法である。ここでは、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

に初期条件 (x_0, y_0) が与えられたとして考える。

上式の 1 階微分方程式において、 x が x_0 から h だけ増加した点 $x_1 = x_0 + h$ における値 y_1 は、次のような公式により計算される。

$$k_1 = hf(x_0, y_0) \tag{7.1}$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \tag{7.2}$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \tag{7.3}$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) \tag{7.4}$$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7.5}$$

$$y_1 = y_0 + k \tag{7.6}$$

ここで k は y の増加分である。

この y_1 を y_0 と置き直して、 x がまた h だけ増加した値を求めるという操作を繰り返す(図 7.1)。各公式はそれぞれ次のような操作により導出される。

(7.1) : 点 (x_0, y_0) から、傾き $f(x_0, y_0)$ で h だけ進むと y は k_1 だけ変化する。

(7.2) : (7.1) の線上の点 $(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$ で傾きを求め、その傾きで点 (x_0, y_0) から x_1 まで進むと y は k_2 だけ変化する。

(7.3) : 同様にして、点 (x_0, y_0) から傾き $(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$ で x_1 まで進むと、 y は k_3 だけ変化する。

(7.4) : 同様にして、点 (x_0, y_0) から傾き $(x_0 + h, y_0 + k_3)$ で x_1 まで進むと、 y は k_4 だけ変化する。

(7.5) : (7.1)~(7.4) の加重平均として k を求める。

(7.6) : 点 (x_1, y_1) を得る。

これをコンピュータにより解くことで、モデル上での Δt 秒後の各粒子の座標を求めることができる。(杉江 1986)。

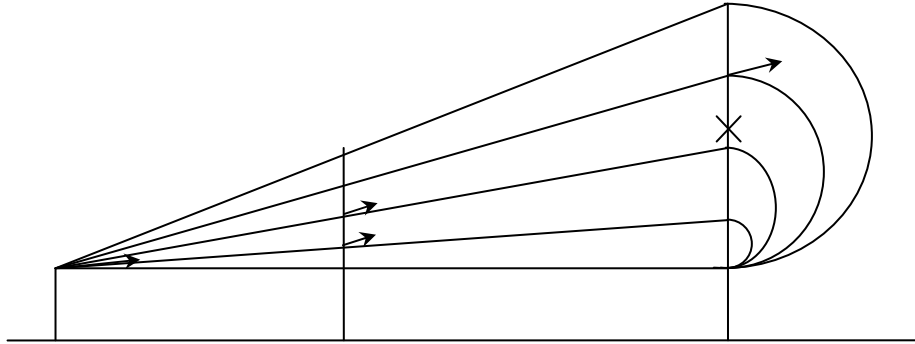


図 7.1

7.2 系の中でのエネルギー保存

数値計算は、Rung—Kutta 法の式を用いて時間間隔 Δt ごとに繰り返し行う。その際、系全体のエネルギーは時刻 t のときと、時刻 $t + \Delta t$ のときとで等しくなければならない。系全体のエネルギーを toE とすると、次のように表される。

$$toE[t] = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} M_i (v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2) + M_i u_i \right\}$$

エネルギー保存の法則より toE は常に一定でなければならないが、コンピュータで桁の大きい数値を計算すると数値の誤差が出やすい。よって基準を設け、ここでの数値計算が妥当であるかどうかを判断する必要がある。

そこで、 $t = 0$ のときの系全体のエネルギーを $toE[0]$ とすると、 toE の増減率 $ratE$ は

$$ratE = \frac{|toE[t] - toE[0]|}{toE[0]} < \alpha$$

となり、 α が 3% 以内であれば、エネルギーは保存されたものとみなして計算を続行する (木村 2000)。

第8章 テストシミュレーション

8.1 テストシミュレーションによるコードの評価

本研究では、小惑星の衝突を3次元でシミュレーションするためのプログラムを作成した。プログラムの精度を検証するため、SPH法を用いて行った弾丸の衝突実験のシミュレーション (Libersky et al. 1993) を再現し、結果を比較することで、シミュレーションコードの評価を行う。

8.2 テストシミュレーション

8.2.1 シミュレーションモデル

円柱の鉄 (ARMCO iron) を速度 221 m/s で平面上に衝突させる。シミュレーションに用いた鉄の大きさは図 8.1 の通りである (Libersky et al. 1993)。

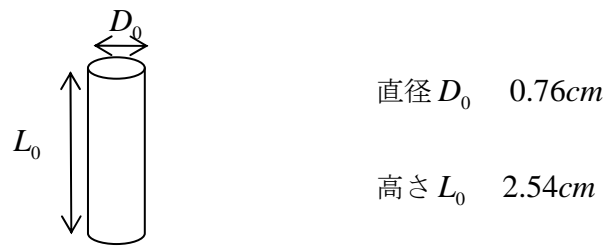


図 8.1

シミュレーションを行うため、弾丸を xyz 座標系に置く (図 8.2)。弾丸は z 軸方向に速度 v_z で衝突するとする。

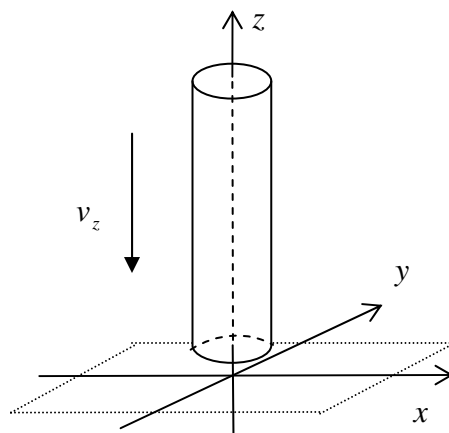


図 8.2

8.2.2 粒子の配列

弾丸は粒子の集合体として考え、粒子は0.076cm 間隔で配置する。衝突前の弾丸の $x-y$ 断面、 $y-z$ 断面、 $z-x$ 断面での粒子の配列はそれぞれ図 8.3.1、図 8.3.2、図 8.3.3 のようにする。

8.2.3 各値

シミュレーションに用いた鉄の特性はそれぞれ次の通りである (Libersky et al. 1991)。

密度 ρ	7.89 g/cm^3
体積弾性率 K_0	$1.7 \times 10^{11} \text{ Pa}$
剛性率 μ_0	$8.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$
降伏強度 Ys_0	$5.0 \times 10^8 \text{ Pa}$
Gruneisen パラメーター γ	1.81
C (6.36 式)	3.6 km/s
S (6.36 式)	1.8

8.2.4 状態方程式

状態方程式は、6.5 で求めた Mie-Gruneisen 状態方程式(6.53 式)と Rankine-Hugoniot 状態方程式(6.54 式、6.57 式)を用い、状態方程式の異なる計算結果の比較を行う。

< Mie-Gruneisen 状態方程式 >

$$P = \gamma \rho E$$

< Rankine-Hugoniot 状態方程式 >

$$P(\rho, E) = \left(1 - \frac{1}{2} \Gamma \eta\right) P_H + \Gamma \rho (E - E_H)$$

ただし $E < E_H$ のときは

$$P(\rho, E) = \left(1 - \frac{1}{2} \Gamma \eta\right) P_H$$

图8.3.1

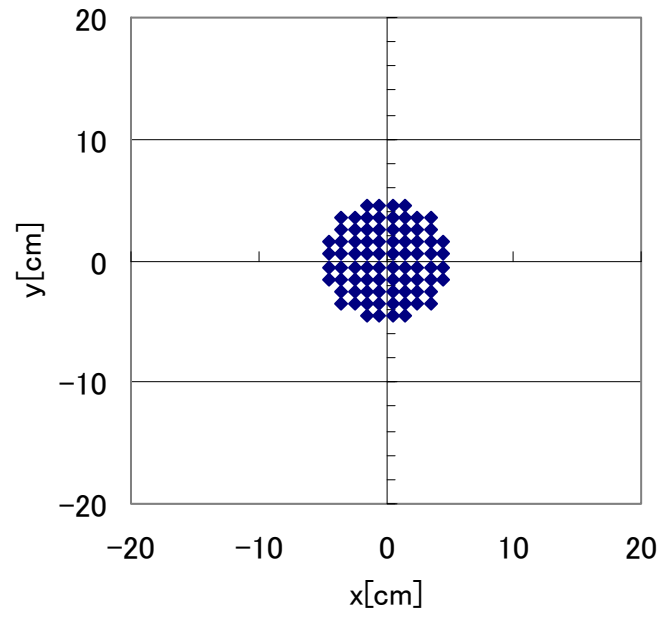


图8.3.2

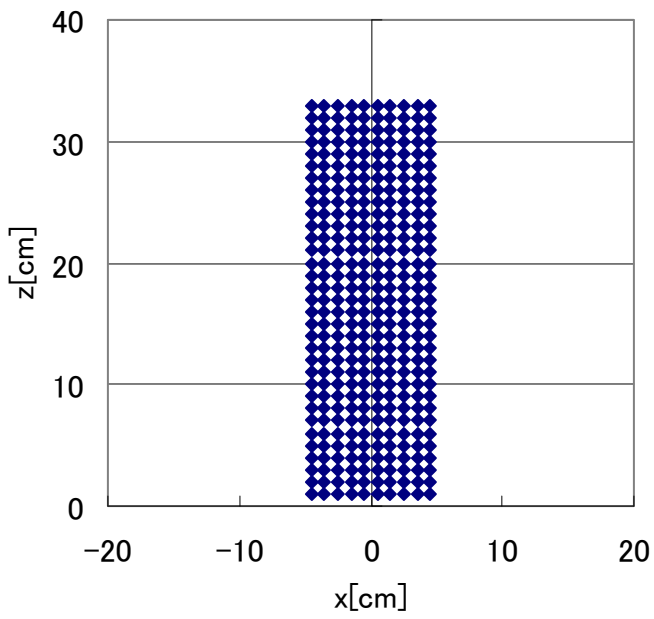
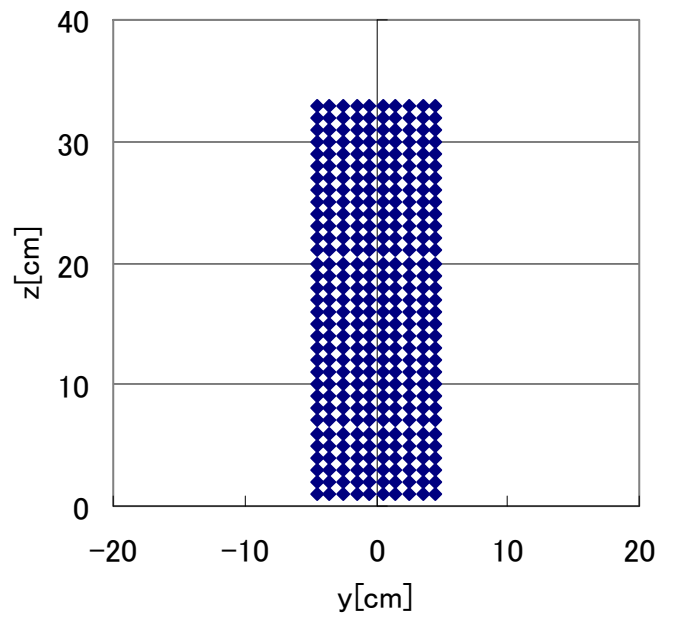


图8.3.3



8.2.5 数値の無次元化

桁の大きい数値をコンピュータで計算する場合に考えられる桁落ちなどを回避するため、コンピュータに入力する数値は無次元化し、無次元化数にて数値計算を実行する。よって、8.2.2 に記した数値を以下のように無次元化する。ここで、平均化関数の基底長さは $h = 0.076[cm/s]$ とする。

1. 長さ

$$h = 0.076[cm] \equiv 1 \text{ とすると}$$

$$[L] = 7.6 \times 10^{-4}[m]$$

2. 質量

$$\rho = 7.89[g/cm^3] \equiv 1 \text{ とすると}$$

$$[M] = \rho h^3$$

$$= 7.89 \times 10^3[kg/m^3] \times (7.6 \times 10^{-4}[m])^3$$

$$\cong 3.4 \times 10^{-6}[kg]$$

3. 時間

$$v = 221[m/s] \equiv 1 \text{ とすると}$$

$$[T] = \frac{h}{v}$$

$$= \frac{7.6 \times 10^{-4}[m]}{221[m/s]}$$

$$\cong 3.4 \times 10^{-6}[s]$$

4. 体積弾性率

$$k_0 = 1.7 \times 10^{11}[Pa]$$

$$K = K_0 \times \frac{[L][T]^2}{[M]}$$

$$\cong 440$$

4. 剛性率

$$\mu_0 = 8.0 \times 10^{10}[Pa]$$

$$\mu = \mu_0 \times \frac{[L][T]^2}{[M]}$$

$$\cong 210$$

5. 降伏強度

$$Y_{s_0} = 5.0 \times 10^8 [Pa]$$

$$Y_s = Y_{s_0} \times \frac{[L][T]^2}{[M]}$$

$$\cong 1.3$$

6. 音速度

$$C_0 = 3.6 [m/s]$$

$$C = C_0 \times \frac{[T]}{[L]}$$

$$\cong 0.016$$

以上の無次元化した数値により、テストシミュレーションを行う。

8.3 計算結果

Mie-Gruneisen 状態方程式を用いた場合の計算結果を図 8.4 に、Rankine-Hugoniot 状態方程式を用いた場合の計算結果を図 8.5 に示す。

8.4 議論

Libersky et al.(1993)の計算結果と比較すると、図 8.4、図 8.5 とともに弾丸の下方の変形が小さい。物体にある応力が加えられて変形が起るとき、弾性変形をするか塑性変形をするかは物体の降伏強度により決定される。降伏強度が大きいほど、塑性変形をするために必要な応力は大きくなる。

ここでは、実際の天体の降伏強度を特定することができないため、弾丸の降伏強度として ARMCO iron の値を用いている。そこで、降伏強度のみを以下の値に変えてシミュレーションを行った。

$$Y_{s_0} = 1.0 \times 10^8 [Pa] \quad (\text{工業用純鉄、99.96\%Fe})$$

$$Y_{s_0} = 2.4 \times 10^8 [Pa] \quad (\text{一般構造用圧延鋼材 (SS400)、Fe-0.1\%C})$$

計算結果を図 8.6 ($Y_{S_0} = 1.0 \times 10^8 [Pa]$, Gruneisen)、図 8.7 ($Y_{S_0} = 1.0 \times 10^8 [Pa]$, Hugoniot)、
図 8.8 ($Y_{S_0} = 2.4 \times 10^8 [Pa]$, Gruneisen)、図 8.9 ($Y_{S_0} = 2.4 \times 10^8 [Pa]$, Hugoniot) に示す。

図8.4

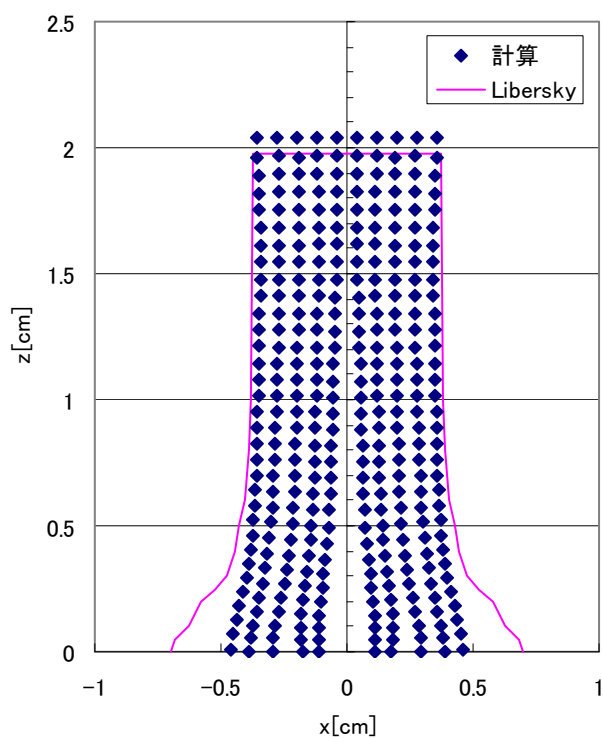


図8.5

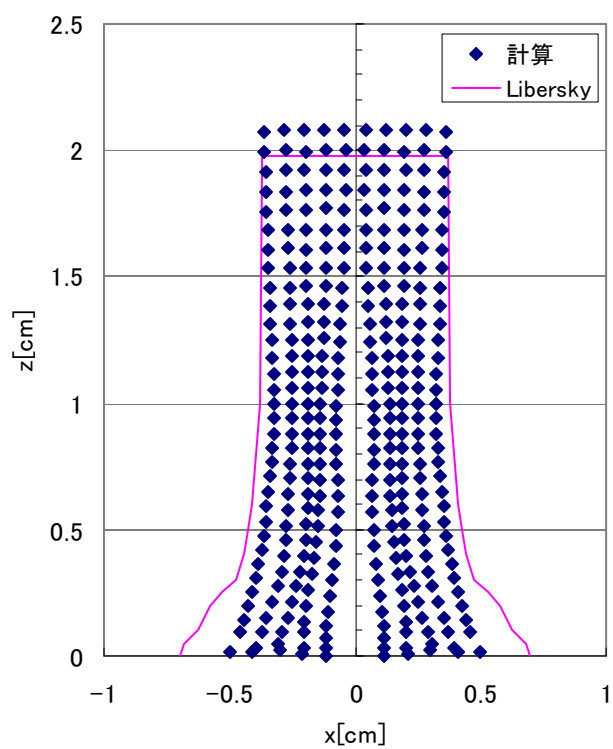


図8.6

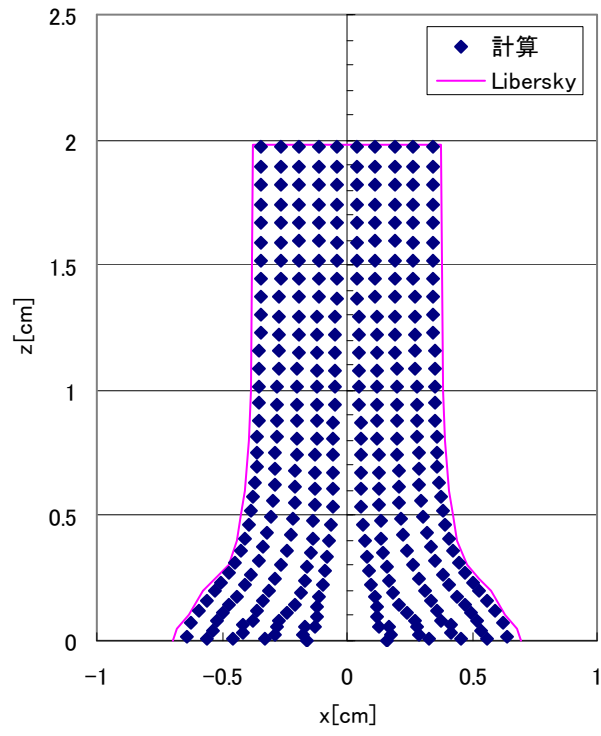


図8.7

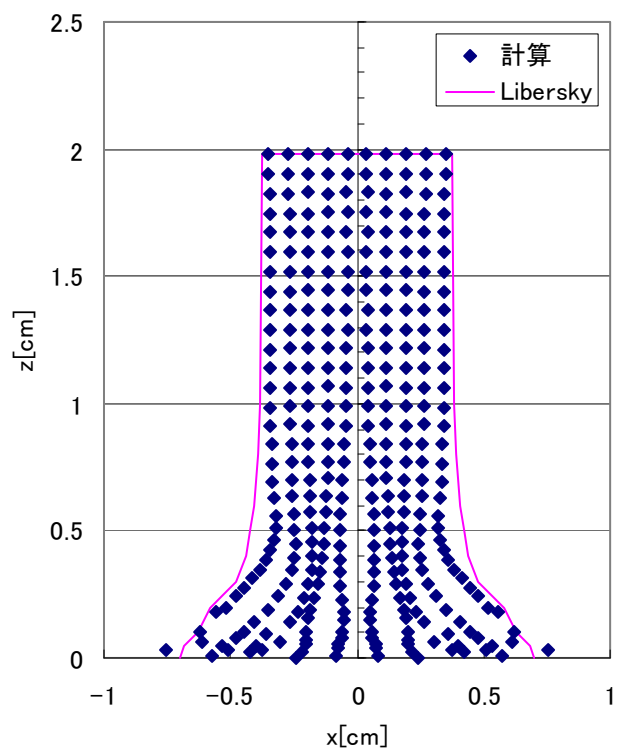


図8.8

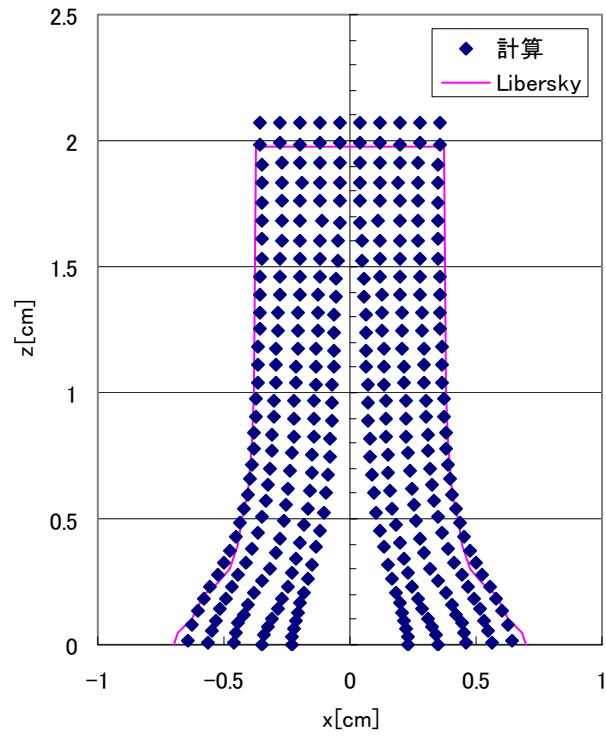
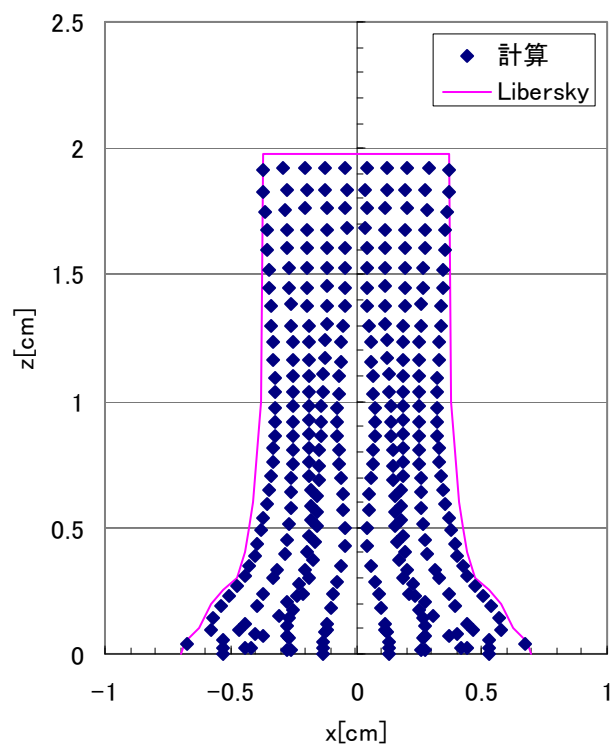


図8.9



8.4.1 降伏強度による違い

降伏強度が大きい弾丸ほど、 $x = 0$ を境として x 方向の粒子間距離が広がる傾向がある。 $x = 0$ 付近では、衝突によって特に強い引っ張り力がはたらく。したがって、降伏応力の大きい弾丸ほど弾性変形になりやすく、粒子が平均化関数の基底長さ以上に離れてしまっていると考えられる。

また $z = 0.5$ 付近では特に強い圧縮力がはたらき、降伏応力が大きいほど弾丸のくびれが小さくなっている。これも降伏応力が大きいほど塑性変形になりにくいためと考えられる。

以上のように、降伏強度の値の違いにより、特に強い力の働く部分では変形のしかたの違いが表れやすいことが分かる。

8.4.2 状態方程式による違い

Gruneisen 状態方程式では、 $Y_{s_0} = 1.0 \times 10^8 [Pa]$ とした弾丸(図 8.6)が最も Libersky の計算結果と一致しているが、同じ降伏強度で Hugoniot 状態方程式を用いた弾丸(図 8.7)は、 $z = 0.5$ での直径が Libersky の直径の約 75% しかない。同様に他の図でも、状態方程式の違いによる変形のしかたの違いは大きい。状態方程式の違いすなわち圧力の求め方の違いによって粒子同士が及ぼしあう力は異なり、その影響は無視できないことが分かる。

第9章 数値計算

9.1 シミュレーション概要

本研究では、2つの同一天体を以下の事項を変えて衝突させる。

9.1.1 衝突速度

エネルギー密度 Q (1.1.2) は標的の単位質量当たりの運動エネルギーであるから、天体が速度 $v[m/s]$ で衝突したときのエネルギー密度は

$$Q = \frac{1}{2} v^2$$

である。ここでは、エネルギー密度が以下の値となるような速度で衝突させる(表 9.1)。

エネルギー密度 $Q(J/kg)$	5×10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
速度 $v(m/s)$	100	141	447	1414	4472	14142

表 9.1

9.1.2 物質

図 1.1 (藤原 1997) のカタストロフィック破壊のしきい値と天体半径との関係は、鉄を用いた実験により求められたものであるが、実際には様々な物質の天体がある。よって、ここでは天体は鉄、岩石、氷の3通りを考える。ただし、鉄は ARMCO iron であるとし、岩石は玄武岩であるとする。

シミュレーションには表 9.2 の値をそれぞれ用いる。

	鉄	岩石	氷
密度 (kg/m^3)	7890	2860	910
体積弾性率 (GPa)	170	50	9.1
剛性率 (GPa)	80	30	9.0
降伏強度	500	200	10

(MPa)			
Gruneisen パラメーター	1.8	1.8	0.85
C (km/s)	3.8	2.6	1.28
S	1.58	1.62	1.56

表 9.2

これらの値を、8.2.3と同様にして無次元化し、無次元化数により数値計算を行う。

9.1.3 状態方程式

テストシミュレーションと同様に、(6.53)式と(6.54)式、(6.57)式を用いる。

9.2 シミュレーション

9.2.1 シミュレーションモデル

物性、大きさ、形状の等しい2つの天体A,Bを考える。ここでは簡単のため、天体を円柱型と考える。天体Aが天体Bに衝突するとして、天体Aを衝突体、天体Bを標的とする(図9.2)。また、天体の直径と高さは次のようにする(図9.3)。

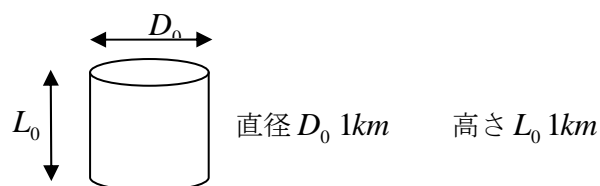
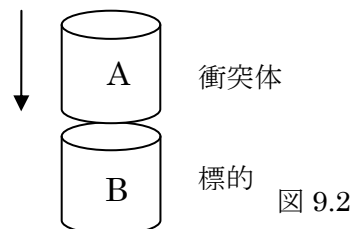


図 9.3

プログラム中では、 xyz 座標系に天体を置く(図9.4)。また、静止している標的に対して衝突体が速度 v_z で z 軸方向に衝突するとする。

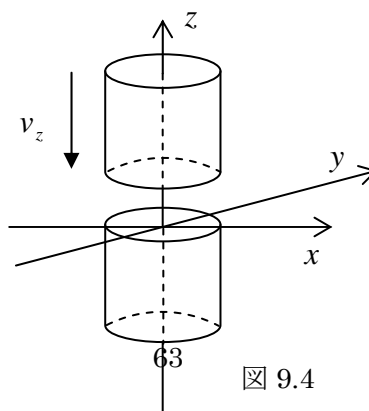


図 9.4

9.2.2 粒子の配列

テストシミュレーションと同様、天体を粒子の集合体と考える。粒子は $100m$ 間隔で並べるものとする。衝突前の天体の $x-y$ 断面 ($z=1$)、 $x-z$ 断面 ($y=0.5$)、 $y-z$ 断面 ($x=0.5$)での粒子の配列はそれぞれ図 9.5.1、図 9.5.2、図 9.5.3 のようにする。また、1 天体当たりの粒子は 800 個である。

9.3 計算結果

本研究では、3 種類の物質それぞれについてエネルギー密度 (衝突速度) を 6 通り、そのそれぞれについて状態方程式を 2 通り用いてシミュレーションした。無次元化時間 $T=10$ のときの数値計算の結果を xz 座標系にプロットしたものを図 9.6.1 (鉄, Gruneisen)、図 9.6.2 (岩石, Gruneisen)、図 9.6.3 (氷, Gruneisen)、図 9.7.1 (鉄, Hugoniot)、図 9.7.1 (岩石, Hugoniot)、図 9.7.1 (氷, Hugoniot) に示す(図は衝突体の外形)。

图9.5.1

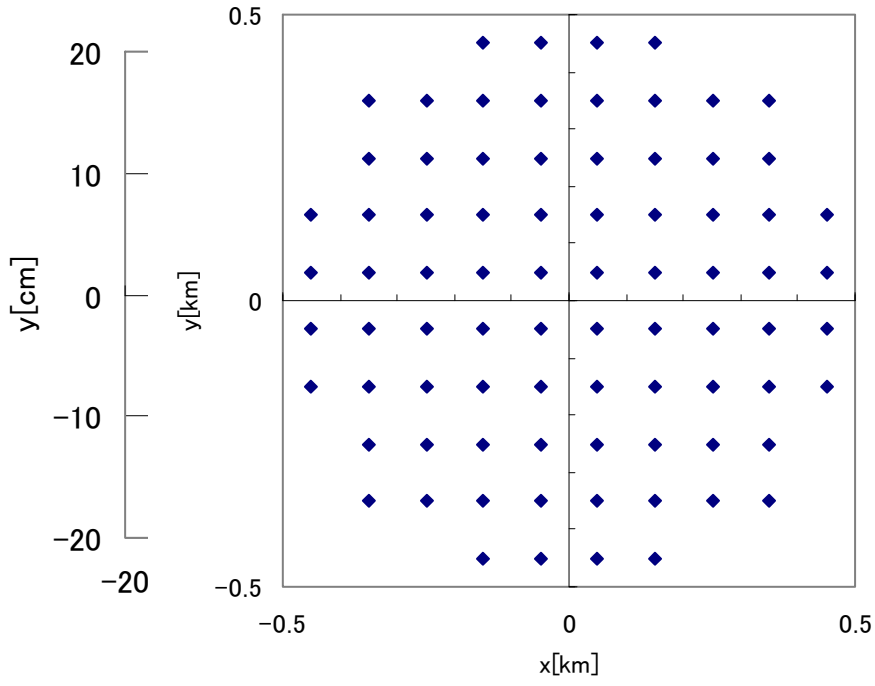


图9.5.2

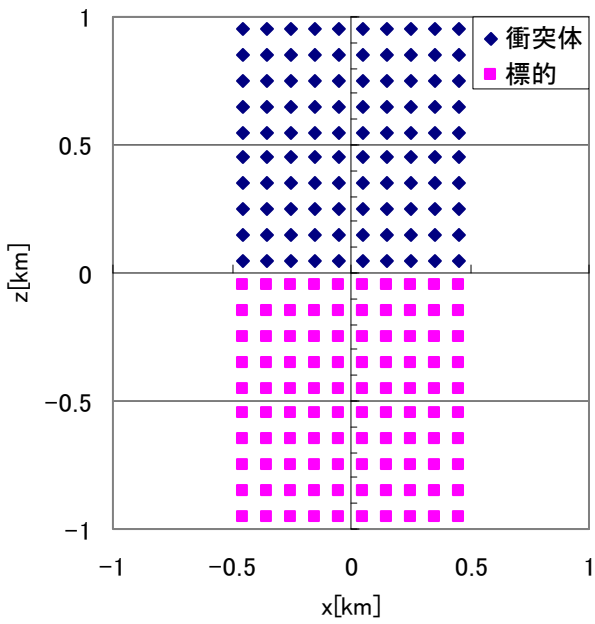


图9.5.3

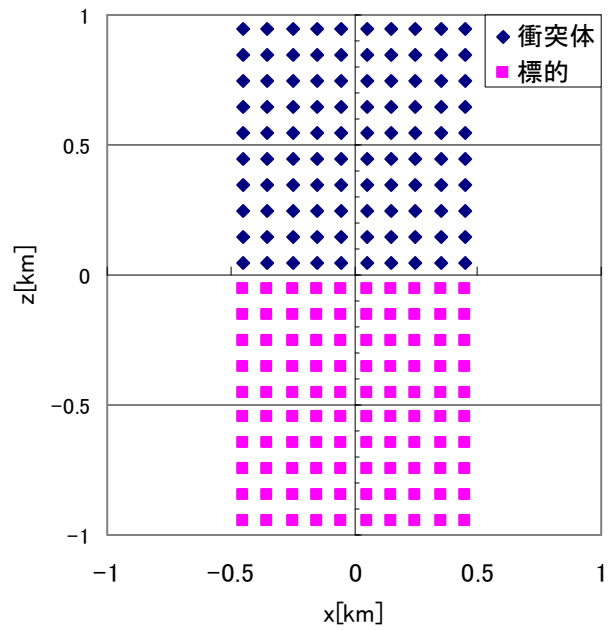


图9.6.1

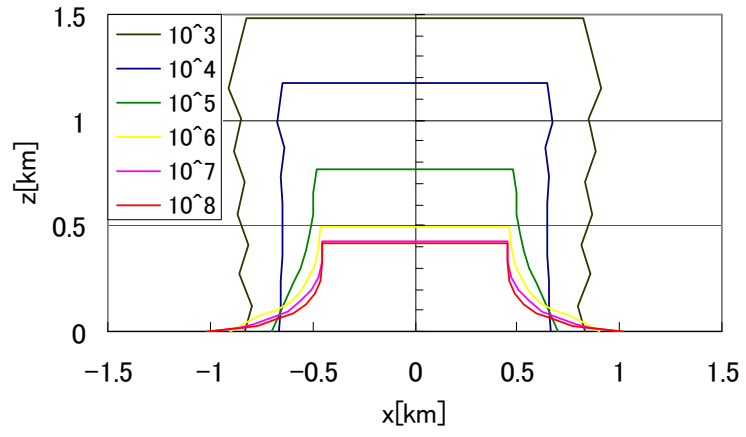


图9.6.2

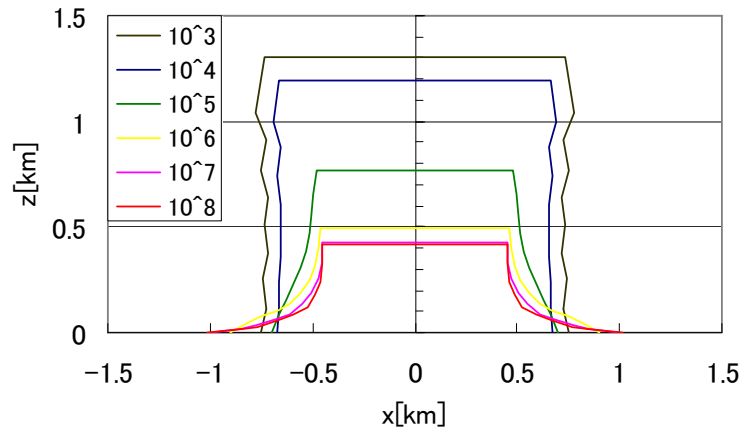


图9.6.3

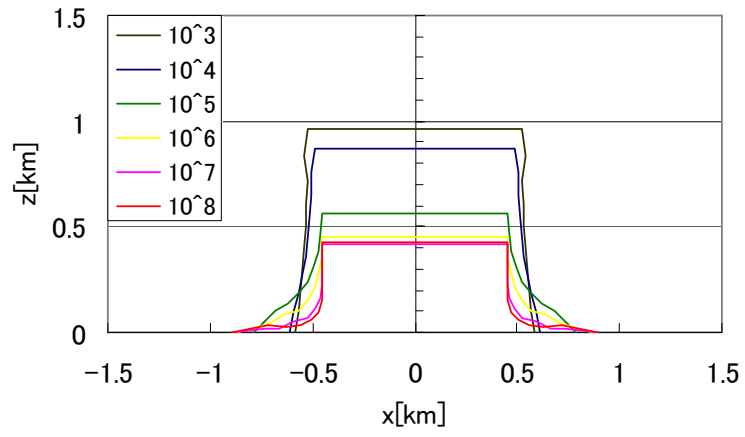


图9.7.1

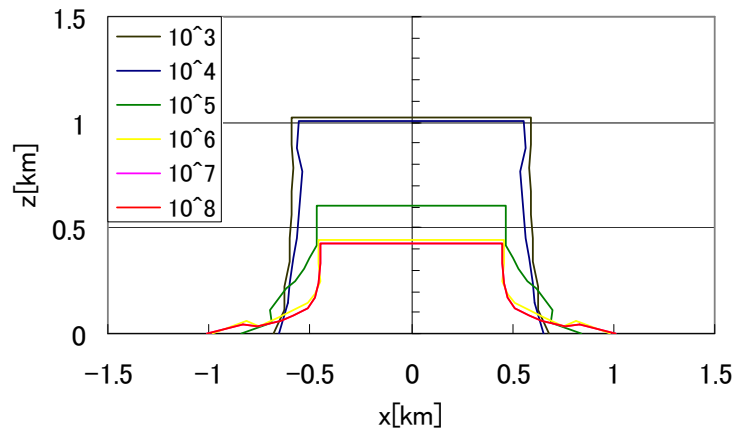


图9.7.2

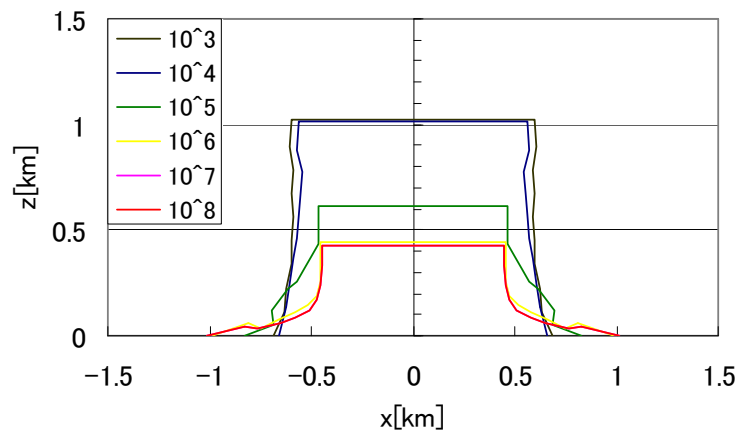
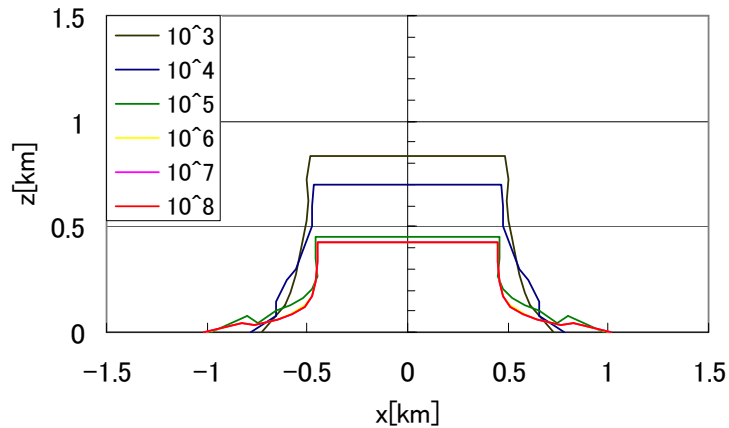


図9.7.3



第 10 章 議論

10.1 変形率

先に述べたように、衝突現象では標的である天体の衝突後の破片の大きさにより破壊の程度を決定する。しかし、本研究では、衝突により形成された破片そのものの運動はプログラムに記述していないため、シミュレーションによって破片の大きさや形状を求めることはできない。

そこで、天体が衝突前の形状に対してどの程度変形したかを变形率を用いて表すこととする。変形率は次のように定義し、それぞれの物質やエネルギー密度での変形率の比較を行う。

標的の $x-z$ 断面で、衝突により図 10.1 のように変形した場合、変形率 $= a/b$ とする（衝突前は $a/b = 1$ である）。

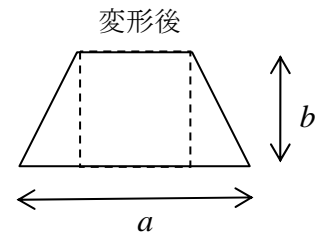


図 10.1

10.2 変形率の時間変化

無次元化時間 $[T] = 0.5, 10, 15, 20, 25, 30$ のときの変形率をまず求め、それぞれの物質の変形率の時間変化を図 10.2（鉄,Gruneisen）、図 10.3（岩石,Gruneisen）、図 10.4（氷,Gruneisen）、図 10.5（鉄,Hugoniot）、図 10.6（岩石,Hugoniot）、図 10.7（氷,Hugoniot）に示す。

10.3 エネルギー密度と変形率

弾塑性体の場合、衝突後ある程度まで変形すると、形状はほとんど変化しなくなる。そ

ここで、10.2 で求めた天体の変形率の時間変化が最も小さくなったとき、衝突による変形が終了したと考えるものとする。したがって、そのときの変形率をその物質のそのエネルギー密度での変形率とする。

上記の条件にしたがって決定した各物質の変形率は表 10.1 (Gruneisen)、表 10.2 (Hugoniot) の通りである。

エネルギー密度[J/kg]	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
鉄	1.29	1.14	1.79	3.05	5.47	5.91
岩石	1.10	1.16	1.78	3.08	5.49	5.95
氷	1.20	1.39	2.51	5.64	6.83	6.80

表 10.1

エネルギー密度[J/kg]	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
鉄	1.15	1.26	2.76	5.62	6.14	6.21
岩石	1.14	1.16	2.62	5.59	6.13	6.21
氷	1.73	2.16	5.24	6.06	6.20	6.22

表 10.2

表 10.1 と表 10.2 の値をグラフで表すと図 10.8 (Gruneisen)、図 10.9 (Hugoniot) のようになる。

図10.8

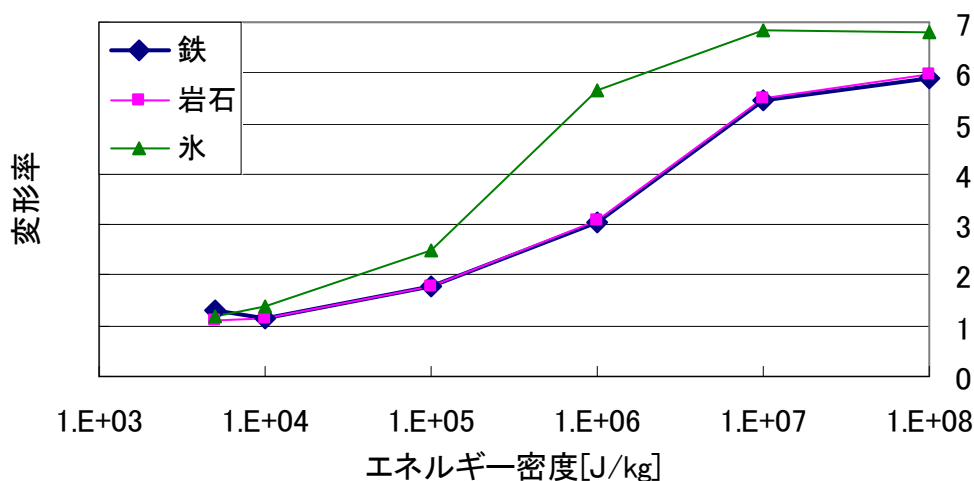
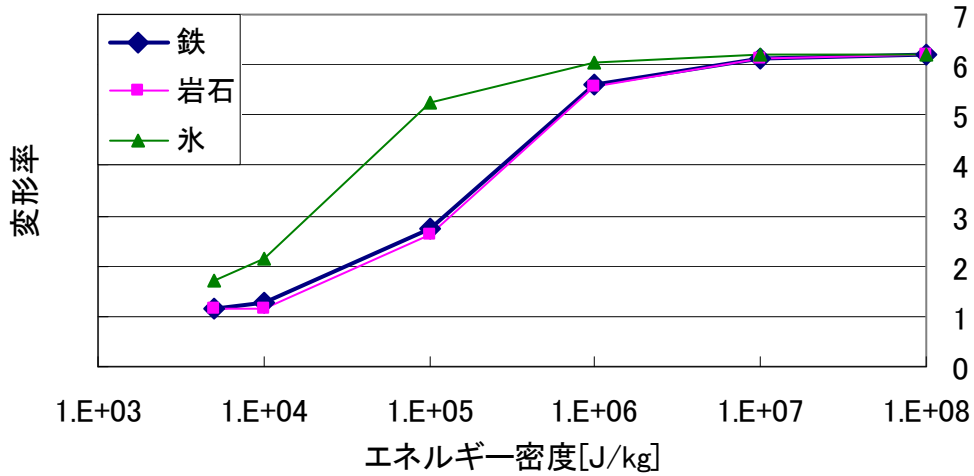


図10.9



また、カタストロフィック破壊のしきい値は破片の大きさにより決まるが、図 10.8 と図 10.9 において、各天体の変形率が 1.5 のときのエネルギー密度を仮にカタストロフィック破壊のしきい値として、第 1 章の図 1.1 に挿入すると図 10.10 のようになる（ここで、図 10.10 の‘鉄 G’は鉄を Gruneisen 状態方程式を用いて計算した値を、‘鉄 H’は鉄を Hugoniot 状態方程式を用いて計算した値を示している）。

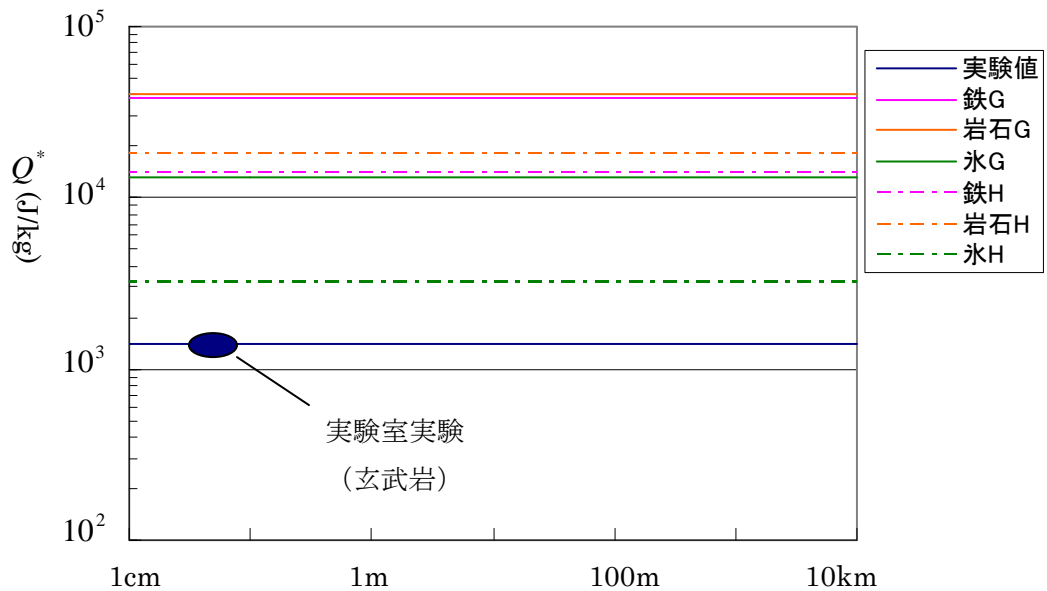


図 10.10 では、天体の自己重力作用を無視できる半径 10km 程度までであれば、天体の半径によらずカタストロフィック破壊のしきい値は一定であるとした。

以上より、以下のことが確認できる。

エネルギー密度が大きいほど変形率も大きくなるが、変形率が6～7に近づくとそれ以上の変形は見られなくなる。物質による違いは明らかであり、同じ変形率で見た場合、鉄と岩石に対して氷は変形に要するエネルギー密度は約1/10である。

また、図 9.6 と図 9.7 より、無次元化時間 $T=10$ では、低速度（エネルギー密度 $5 \times 10^3 \sim 10^4 J/kg$ ）で衝突させた場合は膨張しており、特に Hugoniot 状態方程式の方が顕著である。

10.4 今後の課題

天体现象を扱う数値シミュレーションでは天体の物性を表す値が必要であるが、これらは室内実験や観測などにより求められているため、その実験方法や条件などによって異なる値を示している場合がある。したがって、研究目的に最も適した値を選択することが重要であり、同時に、様々な条件を想定して数値シミュレーションを繰り返す必要があると考えられる。

また、本研究では天体の自己重力作用を無視するため直径 1km の天体でシミュレーションを行った。自己重力が作用する半径 100km 以上の天体の衝突現象については、それを考慮したシミュレーションが行われている。しかし、それ以下の大きさの天体については、天体の大きさと強度の両方を考慮したシミュレーション例は少ない。実際の小惑星は数 10km のものが一般的であり、これらの天体についても、自己重力作用以外で天体の大きさが破壊過程に何らかの影響を与えている可能性を考える必要がある。よって、これらを考慮したプログラムを作成することが必要であると考えられる。

さらに、本研究で用いたシミュレーションコードは、衝突速度によっては粒子のすり抜けや衝突現象とは無関係と考えられる粒子の振動などが見られた。これらは状態方程式を変えることで解決される場合もあり、状態方程式の選択は計算結果に大きく影響するといえる。よって、シミュレーションを行う条件に適した方程式をプログラムの中に導入することも必要であり、同時に、プログラムに適したシミュレーション条件の選択も必要であろう。

第 11 章 結論

物体に応力が加えられると、フックの法則にしたがってひずみが生じる。しかし、フックの法則の成り立つ限界である降伏点を超える応力が加えられると非線型的、かつ非可逆的な塑性変形が始まる。降伏点は物質固有のものであり、このような物体の特性をプログラムに加えていくことで、高速衝突する物体の運動を SPH 法を用いた数値シミュレーションとして表す。

本研究では、直径 1km の天体同士の衝突を、物質や衝突速度、状態方程式を変えてシミュレーションし、それぞれの物質で、エネルギー密度の違いにより変形率がどのように変化するかを求めた (図 10.8、図 10.9)。そこから、変形率が 1.5 となるときのエネルギー密度をカタストロフィック破壊のしきい値 Q^* と仮定して、各物質のしきい値を求めた (図 10.10)。

図 11.1 は、図 10.10 で示した Gruneisen 状態方程式を用いた結果と Hugoniot 状態方程



式を用いた結果の平均を各物質でとったものである。

図 11.1

‘実験値’は半径数 cm の玄武岩の弾丸を用いた室内実験より得られた値であり、本研究の数値シミュレーションは天体の直径を 1km に設定して行った。これらの条件の違いを考慮した上で、以下のことが確認できた。

- ・ 物質により破壊に要するしきい値は異なり、氷は鉄と岩石（玄武岩）の 1/10 のエネルギー密度で破壊する。
- ・ 圧力を導く状態方程式によってしきい値は異なり、Hugoniot 状態方程式を用いた場合の方が、^{10³}Gruneisen 状態方程式を用いた場合よりも小さいエネルギー密度で破壊する。

実験室実験
(玄武岩)

以上が本研究の成果である。

1cm

1m

100m

10km

1000km

天体半径

謝辞

本卒業論文の研究を行うにあたり、様々な場面において丁寧なご指導、ご助言をしてくださいました宮城教育大学教育学部理科教育講座（地学科）の高田淑子教授に深く感謝いたします。

ならびに、研究活動全体を通して暖かいご指導、ご援助をしてくださいました同研究室の齋藤弘一郎さん、三浦宏明君、相田知樹君、門脇駿君、桑原永介君に深く感謝いたします。

最後に、上記の皆様をはじめ、自分を支えてくださいました全ての関係者の皆様はこの場を借りて心から深く御礼申し上げます。

参考文献

- Benz.W&Asphaug.E (1993) 「Impact Simulations with Fracture.I.Method and Tests in ICARUS107,98-116 Academic Press
- 伊達宗行 (1993) 「物性物理学」 101-105 朝倉書店
- ファン.Y.C (1970) : 共訳 大橋義夫・村上澄男・神谷紀生 「固体の力学/理論」 93-96,447-455 培風館
- ジェーガー.J.C : 訳 飯田汲事 (1980) 「弾性・破壊・流動論」 1-5,96-97 共立出版
- 恒藤敏彦 (1983) 「弾性体と流体」 218-229 岩波書店
- Libersky.L.D and Petshek.A.G(1991) 「Smooth Particle Hydrodynamics with Strngth of Materials」 in Advanus in the Free-Lagrange Method. 248-257 Springer-Verlag
- Libersky.L.D and Petshek.A.G and Allahdadi.F.A(1993) 「High Strain Lagrangian Hydrodynamics」 A Three-Dimensional SPH Code for Dynamic Material Response 67-75
- 松井孝典(1993)「宇宙誌」 225-233 得間書店
- 松井孝典(1997)「比較惑星学」 87-118 岩波書店
- Melosh.H.J (1989) 「Stress Waves in Solids」 in Impact Cratering 37-57,229 Oxford Monographs on Geology and Geophysics No.11
- Monaghan.J.J(1992)「Smoothed Particle Hydrodynamics」 543-550
- 島津康男 (1971) 「地球の物理」 23-24 華房
- 杉江日出澄・岡崎明彦・足達義則・尾崎正弘 (1986) 「FORTRAN による数値計算法」 91-94 培風館
- 戸田盛和 (1994) 「流体力学30講」 1-26 朝倉書店
- 富田佳宏 (1998) 「数値弾塑性力学」 109-112 養賢堂
- Turcotte.D.L&Schubert.G (1982) 「Geodynamics-Applications of continuum Physics to geological problems」 in Elastic and Flexure. 105-129 J.Wiley & Sons

Wingate.A.C&Fisher.H.N (1991) 「Strength Modeling in SPHC」 Los Alamos National
Laboratory

矢部孝・観山正見・椛島成治 (1992) 「パソコンによるシミュレーション物理」 60-68 朝
倉書店

山口伯樹 (1975) 「弾・塑性力学」 2-5, 17-22, 42-47, 190-202 森北出版

吉田総仁 (1997) 「弾塑性力学の基礎」 10-11, 38-49, 140-141 共立出版

資料

- ・ SPH C-プログラム (Mie-Gruneisen 状態方程式)
- ・ SPH C-プログラム (Rankine-Hugoniot 状態方程式)

```

/*SPH C-Program*/
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include"def.h"

short i,j,l,m,n;
double Y[13][Num];
double dY[13][Num];
double Mass[Num];
double W[Num][Num];
double rho[Num];
double Ph[Num];
double P[Num];
double eh[Num];
double c[Num];
double Z,Q;
double d1[13][Num];
double d2[13][Num];
double d3[13][Num];
double d4[13][Num];
double Ya[13][Num];
double Exx,Eyy,Ezz,Exy,Eyz,Ezx;
double Rxy,Ryz,Rzx;
double toE[num1];
double ke[num1],ie[num1];
double ratE;
double f[Num];

```

```

double J2,Ys2;
double myu[Num];
float t1;
int a;

main()
{
    routin1();
    routin2();
    dataout();
    for(a=0;a<num1;++a)
        {
            t1=a*dltt;
            routin3();
            routin4();
            rk01();
            routin3();
            routin4();
            rk02();
            routin3();
            routin4();
            rk03();
            routin3();
            routin4();
            rk04();
            EnergyCons();
            routin3();
            dataout();
        }
}

routin1()
{
    for(m=0;m<5;++m)
        {

```

```

if(m<2)
{
    for(l=0;l<5;++l)
    {
        for(n=0;n<Nz2;++n)
        {
            i=m*5*Nz2+l*Nz2+n*1;
            Y[0][i]=1+0.5;
            Y[1][i]=m+0.5;
            Y[2][i]=n+1;
        }
    }
}
if(m==2)
{
    for(l=0;l<4;++l)
    {
        for(n=0;n<Nz2;++n)
        {
            i=m*5*Nz2+l*Nz2+n*1;
            Y[0][i]=1+0.5;
            Y[1][i]=m+0.5;
            Y[2][i]=n+1;
        }
    }
}
if(m>2)
{
    if(m==3)
    {
        for(l=0;l<4;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz2;++n)
            {
                i=m*5*Nz2-Nz2+l*Nz2+n*1;
                Y[0][i]=1+0.5;
            }
        }
    }
}

```

```

        Y[1][i]=m+0.5;
        Y[2][i]=n+1;
    }
}
else
{
    for(l=0;l<2;++l)
    {
        for(n=0;n<Nz2;++n)
        {
            i=m*5*Nz2-2*Nz2+l*Nz2+n*1;
            Y[0][i]=l+0.5;
            Y[1][i]=m+0.5;
            Y[2][i]=n+1;
        }
    }
}
}
for(m=0;m<5;++m)
{
    if(m<2)
    {
        for(l=0;l<5;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz1;++n)
            {
                i=m*5*Nz1+l*Nz1+n*1+Nz2*20;
                Y[0][i]=l+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=-n;
            }
        }
    }
    if(m==2)

```



```

{
  for(l=0;l<4;++l)
  {
    for(n=0;n<Nz1;++n)
    {
      i=m*5*Nz1+l*Nz1+n*1+Nz2*20;
      Y[0][i]=1+0.5;
      Y[1][i]=m+0.5;
      Y[2][i]=-n;
    }
  }
}
if(m>2)
{
  if(m==3)
  {
    for(l=0;l<4;++l)
    {
      for(n=0;n<Nz1;++n)
      {
        i=m*5*Nz1-Nz1+l*Nz1+n*1+Nz2*20;
        Y[0][i]=1+0.5;
        Y[1][i]=m+0.5;
        Y[2][i]=-n;
      }
    }
  }
  else
  {
    for(l=0;l<2;++l)
    {
      for(n=0;n<Nz1;++n)
      {
        i=m*5*Nz1-2*Nz1+l*Nz1+n*1+Nz2*20;
        Y[0][i]=1+0.5;
        Y[1][i]=m+0.5;

```

```

        Y[2][i]=-n;
    }
}
}
}
}
for(i=0;i<Num/4;++i)
{
    Y[0][i+Num/4]=-Y[0][i];
    Y[1][i+Num/4]=Y[1][i];
    Y[2][i+Num/4]=Y[2][i];
}
for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    Y[0][i+Num/2]=Y[0][i];
    Y[1][i+Num/2]=-Y[1][i];
    Y[2][i+Num/2]=Y[2][i];
}
}

```

routin2()

```

{
    for(i=0;i<Num/4;++i)
    {
        Y[3][i]=Vx;
        Y[4][i]=Vy;
        Y[5][i]=Vz1;
        Mass[i]=M1;
        Y[6][i]=u0;
        Y[7][i]=0.;
        Y[8][i]=0.;
        Y[9][i]=0.;
        Y[10][i]=0.;
        Y[11][i]=0.;
        Y[12][i]=0.;
        Mass[i+Num/4]=Mass[i];
    }
}

```

```

    if(i<200)
    {
        Mass[i]=M2;
        Mass[i+Num/4]=Mass[i];
        Y[5][i]=Vz2;
    }
}
for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    Mass[i+Num/2]=Mass[i];
}
}

```

```

routin30
{
    double r2;
    double Y0ij, Y1ij, Y2ij;
    for(i=0;i<Num/4;++i)
    {
        Y[0][i+Num/4]=-Y[0][i];
        Y[1][i+Num/4]=Y[1][i];
        Y[2][i+Num/4]=Y[2][i];
        Y[3][i+Num/4]=-Y[3][i];
        Y[4][i+Num/4]=Y[4][i];
        Y[5][i+Num/4]=Y[5][i];
        Y[6][i+Num/4]=Y[6][i];
        Y[7][i+Num/4]=-Y[7][i];
        Y[8][i+Num/4]=Y[8][i];
        Y[9][i+Num/4]=Y[9][i];
        Y[10][i+Num/4]=-Y[10][i];
        Y[11][i+Num/4]=Y[11][i];
        Y[12][i+Num/4]=-Y[12][i];
    }
}

```

```

for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    Y[0][i+Num/2]=Y[0][i];
    Y[1][i+Num/2]=-Y[1][i];
    Y[2][i+Num/2]=Y[2][i];
    Y[3][i+Num/2]=Y[3][i];
    Y[4][i+Num/2]=-Y[4][i];
    Y[5][i+Num/2]=Y[5][i];
    Y[6][i+Num/2]=Y[6][i];
    Y[7][i+Num/2]=Y[7][i];
    Y[8][i+Num/2]=-Y[8][i];
    Y[9][i+Num/2]=Y[9][i];
    Y[10][i+Num/2]=-Y[10][i];
    Y[11][i+Num/2]=-Y[11][i];
    Y[12][i+Num/2]=Y[12][i];
}
for(i=0;i<Num/4;++i)
{
    rho[i]=0.;
    for(j=0;j<Num;++j)
    {
        Y0ij=Y[0][i]-Y[0][j];
        Y1ij=Y[1][i]-Y[1][j];
        Y2ij=Y[2][i]-Y[2][j];
        r2=pow(Y0ij,2)+pow(Y1ij,2)+pow(Y2ij,2);
        W[i][j]=pow((1./(pi*pow(h,2))),1.5)*exp(-r2/pow(h,2));
        rho[i]+=Mass[j]*W[i][j];
    }
    if(rho[i]<rho0)
    {
        P[i]=0.;
    }
    else
    {
        myu[i]=rho[i]/rho0-1;
        Ph[i]=rho0*pow(C,2)*myu[i]*(1+myu[i])/pow(1-(S-1)*myu[i],2);
    }
}

```

```

    eh[i]=0.5*(Ph[i]/rho0)*(myu[i]/(1+myu[i]));
if(Y[6][i]<eh[i])
{
    P[i]=(1-0.5*myu[i]*1.81)*Ph[i];
}
else
{
    P[i]=(1-0.5*myu[i]*1.81)*Ph[i]+1.81*rho[i]*(Y[6][i]-eh[i]);
}
}
J2=pow(Y[7][i],2)+pow(Y[8][i],2)+pow(Y[9][i],2)+
+pow(Y[10][i],2)+pow(Y[11][i],2)+pow(Y[12][i],2)+
+Y[7][i]*Y[8][i]+Y[8][i]*Y[9][i]+Y[9][i]*Y[7][i];
f[i]=1.;
Ys2=pow(Ys,2);
if(Ys2<J2*3.)
{
    f[i]=Ys/sqrt(J2*3.);
}
Y[7][i]=f[i]*Y[7][i];
Y[8][i]=f[i]*Y[8][i];
Y[9][i]=f[i]*Y[9][i];
Y[10][i]=f[i]*Y[10][i];
Y[11][i]=f[i]*Y[11][i];
Y[12][i]=f[i]*Y[12][i];
}
for(i=0;i<Num/4;++i)
{
    rho[i+Num/4]=rho[i];
    c[i+Num/4]=c[i];
    P[i+Num/4]=P[i];
    f[i+Num/4]=f[i];
    Y[7][i+Num/4]=-Y[7][i];
    Y[8][i+Num/4]=Y[8][i];
    Y[9][i+Num/4]=Y[9][i];
    Y[10][i+Num/4]=-Y[10][i];

```

```

        Y[11][i+Num/4]=Y[11][i];
        Y[12][i+Num/4]=-Y[12][i];
    }
    for(i=0;i<Num/2;++i)
    {
        rho[i+Num/2]=rho[i];
        c[i+Num/2]=c[i];
        P[i+Num/2]=P[i];
        f[i+Num/2]=f[i];
        Y[7][i+Num/2]=Y[7][i];
        Y[8][i+Num/2]=-Y[8][i];
        Y[9][i+Num/2]=Y[9][i];
        Y[10][i+Num/2]=-Y[10][i];
        Y[11][i+Num/2]=-Y[11][i];
        Y[12][i+Num/2]=Y[12][i];
    }
}

```

```

routin4()
{
    double rhoi2,rhoj2;
    double Y0ij,Y1ij,Y2ij,Y3ij,Y4ij,Y5ij;
    double w;
    double X;
    for(i=0;i<Num/4;++i)
    {
        dY[0][i]=Y[3][i];
        dY[1][i]=Y[4][i];
        dY[2][i]=Y[5][i];
        dY[3][i]=0.;
        dY[4][i]=0.;
        dY[5][i]=0.;
        dY[6][i]=0.;
        dY[7][i]=0.;
        dY[8][i]=0.;
        dY[9][i]=0.;
    }
}

```

```

dY[10][i]=0.;
dY[11][i]=0.;
dY[12][i]=0.;
for(j=0;j<Num;++j)
{
  Y0ij=Y[0][i]-Y[0][j];
  Y1ij=Y[1][i]-Y[1][j];
  Y2ij=Y[2][i]-Y[2][j];
  Y3ij=Y[3][i]-Y[3][j];
  Y4ij=Y[4][i]-Y[4][j];
  Y5ij=Y[5][i]-Y[5][j];
  rhoi2=pow(rho[i],2);
  rhoj2=pow(rho[j],2);
  X=Y3ij*Y0ij+Y4ij*Y1ij+Y5ij*Y2ij;
  if(X<0)
  {
    Z=X*h/(pow(Y0ij,2)+pow(Y1ij,2)+pow(Y2ij,2)+0.01*pow(h,2));
    Q=(2/(rho[i]+rho[j]))*(2*pow(Z,2)-(1*Z*(c[i]+c[j])/2));
  }
  else
  {
    Z=0.;
    Q=0.;
  }

  w=-W[i][j]*2/pow(h,2);
  dY[3][i]+=(Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y0ij¥
    -(Y[7][i]/rhoi2+Y[7][j]/rhoj2)*Y0ij¥
    -(Y[10][i]/rhoi2+Y[10][j]/rhoj2)*Y1ij¥
    -(Y[12][i]/rhoi2+Y[12][j]/rhoj2)*Y2ij);
  dY[4][i]+=(Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y1ij¥
    -(Y[10][i]/rhoi2+Y[10][j]/rhoj2)*Y0ij¥
    -(Y[11][i]/rhoi2+Y[11][j]/rhoj2)*Y2ij¥
    -(Y[8][i]/rhoi2+Y[8][j]/rhoj2)*Y1ij);
  dY[5][i]+=(Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y2ij¥
    -(Y[9][i]/rhoi2+Y[9][j]/rhoj2)*Y2ij¥

```

$$-(Y[12][i]/\rho_{i2}+Y[12][j]/\rho_{j2})*Y_{0ij}\$$$

$$-(Y[11][i]/\rho_{i2}+Y[11][j]/\rho_{j2})*Y_{1ij});$$

$$E_{xx}=(Mass[j]*w/\rho[j])*(Y_{3ij}*Y_{0ij});$$

$$E_{yy}=(Mass[j]*w/\rho[j])*(Y_{4ij}*Y_{1ij});$$

$$E_{zz}=(Mass[j]*w/\rho[j])*(Y_{5ij}*Y_{2ij});$$

$$E_{xy}=-0.5*(Mass[j]*w/\rho[j])*(Y_{3ij}*Y_{1ij}+Y_{4ij}*Y_{0ij});$$

$$E_{yz}=-0.5*(Mass[j]*w/\rho[j])*(Y_{4ij}*Y_{2ij}+Y_{5ij}*Y_{1ij});$$

$$E_{zx}=-0.5*(Mass[j]*w/\rho[j])*(Y_{5ij}*Y_{0ij}+Y_{3ij}*Y_{2ij});$$

$$R_{xy}=-0.5*(Mass[j]*w/\rho[j])*(Y_{3ij}*Y_{1ij}-Y_{4ij}*Y_{0ij});$$

$$R_{yz}=-0.5*(Mass[j]*w/\rho[j])*(Y_{4ij}*Y_{2ij}-Y_{5ij}*Y_{1ij});$$

$$R_{zx}=-0.5*(Mass[j]*w/\rho[j])*(Y_{5ij}*Y_{0ij}-Y_{3ij}*Y_{2ij});$$

$$dY[6][i]+=0.5*(P[i]/\rho_{i2}+P[j]/\rho_{j2}+Q)*Mass[j]*w\$\$$$

$$*(Y_{3ij}*Y_{0ij}+Y_{4ij}*Y_{1ij}+Y_{5ij}*Y_{2ij})\$\$$$

$$+(Y[7][i]*E_{xx}+Y[8][i]*E_{yy}+Y[9][i]*E_{zz}\$\$$$

$$+2*Y[10][i]*E_{xy}+2*Y[11][i]*E_{yz}+2*Y[12][i]*E_{zx})/\rho[j];$$

$$dY[7][i]+=2./3.*G*(2.*E_{xx}-E_{yy}-E_{zz})+2.*(Y[10][i]*R_{xy}-Y[12][i]*R_{zx});$$

$$dY[8][i]+=2./3.*G*(2.*E_{yy}-E_{zz}-E_{xx})+2.*(Y[11][i]*R_{yz}-Y[10][i]*R_{xy});$$

$$dY[9][i]+=2./3.*G*(2.*E_{zz}-E_{xx}-E_{yy})+2.*(Y[12][i]*R_{zx}-Y[11][i]*R_{yz});$$

$$dY[10][i]+=2.*G*E_{xy}-(Y[7][i]-Y[8][i])*R_{xy}+Y[12][i]*R_{yz}-Y[11][i]*R_{zx};$$

$$dY[11][i]+=2.*G*E_{yz}-(Y[8][i]-Y[9][i])*R_{yz}+Y[10][i]*R_{zx}-Y[12][i]*R_{xy};$$

$$dY[12][i]+=2.*G*E_{zx}-(Y[9][i]-Y[7][i])*R_{zx}+Y[11][i]*R_{xy}-Y[10][i]*R_{yz};$$

}

$$dY[0][i+Num/4]=-dY[0][i];$$

$$dY[1][i+Num/4]=dY[1][i];$$

$$dY[2][i+Num/4]=dY[2][i];$$

$$dY[3][i+Num/4]=-dY[3][i];$$

$$dY[4][i+Num/4]=dY[4][i];$$

$$dY[5][i+Num/4]=dY[5][i];$$

$$dY[6][i+Num/4]=dY[6][i];$$

$$dY[7][i+Num/4]=-dY[7][i];$$

$$dY[8][i+Num/4]=dY[8][i];$$

$$dY[9][i+Num/4]=dY[9][i];$$

$$dY[10][i+Num/4]=-dY[10][i];$$

$$dY[11][i+Num/4]=dY[11][i];$$

$$dY[12][i+Num/4]=-dY[12][i];$$


```

    }
    for(i=0;i<Num/2;++i)
    {
        dY[0][i+Num/2]=dY[0][i];
        dY[1][i+Num/2]=-dY[1][i];
        dY[2][i+Num/2]=dY[2][i];
        dY[3][i+Num/2]=dY[3][i];
        dY[4][i+Num/2]=-dY[4][i];
        dY[5][i+Num/2]=dY[5][i];
        dY[6][i+Num/2]=dY[6][i];
        dY[7][i+Num/2]=dY[7][i];
        dY[8][i+Num/2]=-dY[8][i];
        dY[9][i+Num/2]=dY[9][i];
        dY[10][i+Num/2]=-dY[10][i];
        dY[11][i+Num/2]=-dY[11][i];
        dY[12][i+Num/2]=dY[12][i];
    }
}

rk010
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d1[i][j]=dltt*dY[i][j];
            Ya[i][j]=Y[i][j]+0.5*d1[i][j];
        }
    }
}

```

```

rk020
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {

```

```

    for(j=0;j<Num;++j)
    {
        d2[i][j]=dltt*dY[i][j];
        Ya[i][j]=Y[i][j]+0.5*d2[i][j];
    }
}

```

```

rk03()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d3[i][j]=dltt*dY[i][j];
            Ya[i][j]=Y[i][j]+d3[i][j];
        }
    }
}

```

```

rk04()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d4[i][j]=dltt*dY[i][j];
            Y[i][j]=Y[i][j]+(1./6.)*(d1[i][j]+2*d2[i][j]+2*d3[i][j]+d4[i][j]);
        }
    }
}

```

EnergyCons()

```

{
  toE[a]=0.0;
  ke[a]=0.0;
  ie[a]=0.0;
  for(i=0;i<Num;++i)
    {
      ke[a]+=0.5*Mass[i]*(pow(Y[3][i],2)+pow(Y[4][i],2)+pow(Y[5][i],2));
      ie[a]+=Mass[i]*Y[6][i];
    }
  toE[a]+=0.5*Mass[i]*(pow(Y[3][i],2)+pow(Y[4][i],2)+pow(Y[5][i],2))+Mass[i]*Y[6][i];
  ratE=100*(toE[a]-toE[0])/toE[0];
}

```

```

dataout()
{
  for(i=0;i<Num;++i)
    {
      printf("%f,%d,%f,%f,%f\n",t1,i,Y[0][i],Y[1][i],Y[2][i]);
    }
}

```

```

/*SPH C-Program*/
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include"def.h"

short i,j,l,m,n;
double Y[13][Num];
double dY[13][Num];
double Mass[Num];
double W[Num][Num];
double rho[Num];
double P[Num];
double c[Num];
double Z,Q;
double d1[13][Num];
double d2[13][Num];
double d3[13][Num];
double d4[13][Num];
double Ya[13][Num];
double Exx,Eyy,Ezz,Exy,Eyz,Ezx;
double Rxy,Ryz,Rzx;
double toE[num1];
double ke[num1],ie[num1];
double ratE;
double f[Num];
double J2,Ys2;
float t1;

```

```
int a,b;
```

```
main()
{
    routin1();
    routin2();
    dataout();
    for(a=0;a<num1;++a)
    {
        t1=a*dltt;
        routin3();
        routin4();
        rk01();
        routin3();
        routin4();
        rk02();
        routin3();
        routin4();
        rk03();
        routin3();
        routin4();
        rk04();
        EnergyCons();
        routin3();
        dataout();
    }
}
```

```
routin1()
{
    for(m=0;m<5;++m)
    {
        if(m<2)
        {
            for(l=0;l<5;++l)
```

```

    {
        for(n=0;n<Nz2;++n)
            {
                i=m*5*Nz2+l*Nz2+n*1;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=n+1;
            }
    }
}
if(m==2)
{
    for(l=0;l<4;++l)
    {
        for(n=0;n<Nz2;++n)
            {
                i=m*5*Nz2+l*Nz2+n*1;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=n+1;
            }
    }
}
if(m>2)
{
    if(m==3)
    {
        for(l=0;l<4;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz2;++n)
                {
                    i=m*5*Nz2-Nz2+l*Nz2+n*1;
                    Y[0][i]=1+0.5;
                    Y[1][i]=m+0.5;
                    Y[2][i]=n+1;
                }
        }
    }
}

```

```

        }
    }
else
{
    for(l=0;l<2;++l)
    {
        for(n=0;n<Nz2;++n)
        {
            i=m*5*Nz2-2*Nz2+l*Nz2+n*1;
            Y[0][i]=l+0.5;
            Y[1][i]=m+0.5;
            Y[2][i]=n+1;
        }
    }
}
}
for(m=0;m<5;++m)
{
    if(m<2)
    {
        for(l=0;l<5;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz1;++n)
            {
                i=m*5*Nz1+l*Nz1+n*1+Nz2*20;
                Y[0][i]=l+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=-n;
            }
        }
    }
    if(m==2)
    {
        for(l=0;l<4;++l)
        {

```

```

for(n=0;n<Nz1;++n)
{
    i=m*5*Nz1+l*Nz1+n*1+Nz2*20;
    Y[0][i]=1+0.5;
    Y[1][i]=m+0.5;
    Y[2][i]=-n;
}
}
}
if(m>2)
{
    if(m==3)
    {
        for(l=0;l<4;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz1;++n)
            {
                i=m*5*Nz1-Nz1+l*Nz1+n*1+Nz2*20;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=-n;
            }
        }
    }
    else
    {
        for(l=0;l<2;++l)
        {
            for(n=0;n<Nz1;++n)
            {
                i=m*5*Nz1-2*Nz1+l*Nz1+n*1+Nz2*20;
                Y[0][i]=1+0.5;
                Y[1][i]=m+0.5;
                Y[2][i]=-n;
            }
        }
    }
}

```



```

        }
    }
}
for(i=0;i<Num/4;++i)
{
    Y[0][i+Num/4]=-Y[0][i];
    Y[1][i+Num/4]=Y[1][i];
    Y[2][i+Num/4]=Y[2][i];
}
for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    Y[0][i+Num/2]=Y[0][i];
    Y[1][i+Num/2]=-Y[1][i];
    Y[2][i+Num/2]=Y[2][i];
}
}

```

routin2()

```

{
    for(i=0;i<Num/4;++i)
    {
        Y[3][i]=Vx;
        Y[4][i]=Vy;
        Y[5][i]=Vz1;
        Mass[i]=M1;
        Y[6][i]=u0;
        Y[7][i]=0.;
        Y[8][i]=0.;
        Y[9][i]=0.;
        Y[10][i]=0.;
        Y[11][i]=0.;
        Y[12][i]=0.;
        Mass[i+Num/4]=Mass[i];

        if(i<200)
        {

```

```

        Mass[i]=M2;
        Mass[i+Num/4]=Mass[i];
        Y[5][i]=Vz2;
    }
}
for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    Mass[i+Num/2]=Mass[i];
}
}

```

routin30

```

{
    double r2;
    double Y0ij,Y1ij,Y2ij;
    for(i=0;i<Num/4;++i)
    {
        Y[0][i+Num/4]=-Y[0][i];
        Y[1][i+Num/4]=Y[1][i];
        Y[2][i+Num/4]=Y[2][i];
        Y[3][i+Num/4]=-Y[3][i];
        Y[4][i+Num/4]=Y[4][i];
        Y[5][i+Num/4]=Y[5][i];
        Y[6][i+Num/4]=Y[6][i];
        Y[7][i+Num/4]=-Y[7][i];
        Y[8][i+Num/4]=Y[8][i];
        Y[9][i+Num/4]=Y[9][i];
        Y[10][i+Num/4]=-Y[10][i];
        Y[11][i+Num/4]=Y[11][i];
        Y[12][i+Num/4]=-Y[12][i];
    }
    for(i=0;i<Num/2;++i)
    {
        Y[0][i+Num/2]=Y[0][i];
        Y[1][i+Num/2]=-Y[1][i];
        Y[2][i+Num/2]=Y[2][i];
    }
}

```

```

Y[3][i+Num/2]=Y[3][i];
Y[4][i+Num/2]=-Y[4][i];
Y[5][i+Num/2]=Y[5][i];
Y[6][i+Num/2]=Y[6][i];
Y[7][i+Num/2]=Y[7][i];
Y[8][i+Num/2]=-Y[8][i];
Y[9][i+Num/2]=Y[9][i];
Y[10][i+Num/2]=-Y[10][i];
Y[11][i+Num/2]=-Y[11][i];
Y[12][i+Num/2]=Y[12][i];
}
for(i=0;i<Num/4;++i)
{
rho[i]=0.;
for(j=0;j<Num;++j)
{
Y0ij=Y[0][i]-Y[0][j];
Y1ij=Y[1][i]-Y[1][j];
Y2ij=Y[2][i]-Y[2][j];
r2=pow(Y0ij,2)+pow(Y1ij,2)+pow(Y2ij,2);
W[i][j]=pow((1./(pi*pow(h,2))),1.5)*exp(-r2/pow(h,2));
rho[i]+=Mass[j]*W[i][j];
c[i]=sqrt(k0/rho0);
}
if(rho[i]<rho0)
{
P[i]=0.;
}
else
{
P[i]=G*rho[i]*Y[6][i];
}
J2=pow(Y[7][i],2)+pow(Y[8][i],2)+pow(Y[9][i],2)+
pow(Y[10][i],2)+pow(Y[11][i],2)+pow(Y[12][i],2)+
Y[7][i]*Y[8][i]+Y[8][i]*Y[9][i]+Y[9][i]*Y[7][i];
f[i]=1.;
}

```

```

Ys2=pow(Ys,2);
if(Ys2<J2*3.)
{
    f[i]=Ys/sqrt(J2*3.);
}
Y[7][i]=f[i]*Y[7][i];
Y[8][i]=f[i]*Y[8][i];
Y[9][i]=f[i]*Y[9][i];
Y[10][i]=f[i]*Y[10][i];
Y[11][i]=f[i]*Y[11][i];
Y[12][i]=f[i]*Y[12][i];
}
for(i=0;i<Num/4;++i)
{
    rho[i+Num/4]=rho[i];
    c[i+Num/4]=c[i];
    P[i+Num/4]=P[i];
    f[i+Num/4]=f[i];
    Y[7][i+Num/4]=-Y[7][i];
    Y[8][i+Num/4]=Y[8][i];
    Y[9][i+Num/4]=Y[9][i];
    Y[10][i+Num/4]=-Y[10][i];
    Y[11][i+Num/4]=Y[11][i];
    Y[12][i+Num/4]=-Y[12][i];
}
for(i=0;i<Num/2;++i)
{
    rho[i+Num/2]=rho[i];
    c[i+Num/2]=c[i];
    P[i+Num/2]=P[i];
    f[i+Num/2]=f[i];
    Y[7][i+Num/2]=Y[7][i];
    Y[8][i+Num/2]=-Y[8][i];
    Y[9][i+Num/2]=Y[9][i];
    Y[10][i+Num/2]=-Y[10][i];
    Y[11][i+Num/2]=-Y[11][i];
}

```

```

        Y[12][i+Num/2]=Y[12][i];
    }
}

routin4()
{
    double rhoi2,rhoj2;
    double Y0ij,Y1ij,Y2ij,Y3ij,Y4ij,Y5ij;
    double w;
    double X;
    for(i=0;i<Num/4;++i)
    {
        dY[0][i]=Y[3][i];
        dY[1][i]=Y[4][i];
        dY[2][i]=Y[5][i];
        dY[3][i]=0.;
        dY[4][i]=0.;
        dY[5][i]=0.;
        dY[6][i]=0.;
        dY[7][i]=0.;
        dY[8][i]=0.;
        dY[9][i]=0.;
        dY[10][i]=0.;
        dY[11][i]=0.;
        dY[12][i]=0.;
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            Y0ij=Y[0][i]-Y[0][j];
            Y1ij=Y[1][i]-Y[1][j];
            Y2ij=Y[2][i]-Y[2][j];
            Y3ij=Y[3][i]-Y[3][j];
            Y4ij=Y[4][i]-Y[4][j];
            Y5ij=Y[5][i]-Y[5][j];
            rhoi2=pow(rho[i],2);
            rhoj2=pow(rho[j],2);
            X=Y3ij*Y0ij+Y4ij*Y1ij+Y5ij*Y2ij;

```

```

if(X<0)
{
Z=X*h/(pow(Y0ij,2)+pow(Y1ij,2)+pow(Y2ij,2)+0.01*pow(h,2));
Q=(2/(rho[i]+rho[j]))*(2*pow(Z,2)-(1*Z*(c[i]+c[j])/2));
}
else
{
Z=0.;
Q=0.;
}

w=-W[i][j]*2/pow(h,2);
dY[3][i]+=(Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y0ij¥
-(Y[7][i]/rhoi2+Y[7][j]/rhoj2)*Y0ij¥
-(Y[10][i]/rhoi2+Y[10][j]/rhoj2)*Y1ij¥
-(Y[12][i]/rhoi2+Y[12][j]/rhoj2)*Y2ij);
dY[4][i]+=(Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y1ij¥
-(Y[10][i]/rhoi2+Y[10][j]/rhoj2)*Y0ij¥
-(Y[11][i]/rhoi2+Y[11][j]/rhoj2)*Y2ij¥
-(Y[8][i]/rhoi2+Y[8][j]/rhoj2)*Y1ij);
dY[5][i]+=(Mass[j]*w)*((P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Y2ij¥
-(Y[9][i]/rhoi2+Y[9][j]/rhoj2)*Y2ij¥
-(Y[12][i]/rhoi2+Y[12][j]/rhoj2)*Y0ij¥
-(Y[11][i]/rhoi2+Y[11][j]/rhoj2)*Y1ij);
Exx=-(Mass[j]*w/rho[j])*(Y3ij*Y0ij);
Eyy=-(Mass[j]*w/rho[j])*(Y4ij*Y1ij);
Ezz=-(Mass[j]*w/rho[j])*(Y5ij*Y2ij);
Exy=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y3ij*Y1ij+Y4ij*Y0ij);
Eyz=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y4ij*Y2ij+Y5ij*Y1ij);
Ezx=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y5ij*Y0ij+Y3ij*Y2ij);
Rxy=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y3ij*Y1ij-Y4ij*Y0ij);
Ryz=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y4ij*Y2ij-Y5ij*Y1ij);
Rzx=-0.5*(Mass[j]*w/rho[j])*(Y5ij*Y0ij-Y3ij*Y2ij);
dY[6][i]+=0.5*(P[i]/rhoi2+P[j]/rhoj2+Q)*Mass[j]*w¥
*(Y3ij*Y0ij+Y4ij*Y1ij+Y5ij*Y2ij)¥
+(Y[7][i]*Exx+Y[8][i]*Eyy+Y[9][i]*Ezz)¥

```

$$+2*Y[10][i]*E_{xy}+2*Y[11][i]*E_{yz}+2*Y[12][i]*E_{zx})/\rho[j];$$

$$\begin{aligned} dY[7][i] &+= 2./3.*myu*(2.*E_{xx}-E_{yy}-E_{zz})+2.*(Y[10][i]*R_{xy}-Y[12][i]*R_{zx}); \\ dY[8][i] &+= 2./3.*myu*(2.*E_{yy}-E_{zz}-E_{xx})+2.*(Y[11][i]*R_{yz}-Y[10][i]*R_{xy}); \\ dY[9][i] &+= 2./3.*myu*(2.*E_{zz}-E_{xx}-E_{yy})+2.*(Y[12][i]*R_{zx}-Y[11][i]*R_{yz}); \\ dY[10][i] &+= 2.*myu*(E_{xy}-(Y[7][i]-Y[8][i])*R_{xy}+Y[12][i]*R_{yz}-Y[11][i]*R_{zx}); \\ dY[11][i] &+= 2.*myu*(E_{yz}-(Y[8][i]-Y[9][i])*R_{yz}+Y[10][i]*R_{zx}-Y[12][i]*R_{xy}); \\ dY[12][i] &+= 2.*myu*(E_{zx}-(Y[9][i]-Y[7][i])*R_{zx}+Y[11][i]*R_{xy}-Y[10][i]*R_{yz}); \end{aligned}$$

}

$$dY[0][i+Num/4]=-dY[0][i];$$

$$dY[1][i+Num/4]=dY[1][i];$$

$$dY[2][i+Num/4]=dY[2][i];$$

$$dY[3][i+Num/4]=-dY[3][i];$$

$$dY[4][i+Num/4]=dY[4][i];$$

$$dY[5][i+Num/4]=dY[5][i];$$

$$dY[6][i+Num/4]=dY[6][i];$$

$$dY[7][i+Num/4]=-dY[7][i];$$

$$dY[8][i+Num/4]=dY[8][i];$$

$$dY[9][i+Num/4]=dY[9][i];$$

$$dY[10][i+Num/4]=-dY[10][i];$$

$$dY[11][i+Num/4]=dY[11][i];$$

$$dY[12][i+Num/4]=-dY[12][i];$$

}

for(i=0;i<Num/2;++i)

{

$$dY[0][i+Num/2]=dY[0][i];$$

$$dY[1][i+Num/2]=-dY[1][i];$$

$$dY[2][i+Num/2]=dY[2][i];$$

$$dY[3][i+Num/2]=dY[3][i];$$

$$dY[4][i+Num/2]=-dY[4][i];$$

$$dY[5][i+Num/2]=dY[5][i];$$

$$dY[6][i+Num/2]=dY[6][i];$$

$$dY[7][i+Num/2]=dY[7][i];$$

$$dY[8][i+Num/2]=-dY[8][i];$$

$$dY[9][i+Num/2]=dY[9][i];$$

$$dY[10][i+Num/2]=-dY[10][i];$$

```

        dY[11][i+Num/2]=-dY[11][i];
        dY[12][i+Num/2]=dY[12][i];
    }
}

rk01()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d1[i][j]=dltt*dY[i][j];
            Ya[i][j]=Y[i][j]+0.5*d1[i][j];
        }
    }
}

rk02()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d2[i][j]=dltt*dY[i][j];
            Ya[i][j]=Y[i][j]+0.5*d2[i][j];
        }
    }
}

rk03()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)

```



```

    {
        d3[i][j]=dltt*dY[i][j];
        Ya[i][j]=Y[i][j]+d3[i][j];
    }
}

```

```

rk04()
{
    for(i=0;i<13;++i)
    {
        for(j=0;j<Num;++j)
        {
            d4[i][j]=dltt*dY[i][j];
            Y[i][j]=Y[i][j]+(1./6.)*(d1[i][j]+2*d2[i][j]+2*d3[i][j]+d4[i][j]);
        }
    }
}

```

```

EnergyCons()
{
    toE[a]=0.0;
    ke[a]=0.0;
    ie[a]=0.0;
    for(i=0;i<Num;++i)
    {
        ke[a]+=0.5*Mass[i]*(pow(Y[3][i],2)+pow(Y[4][i],2)+pow(Y[5][i],2));
        ie[a]+=Mass[i]*Y[6][i];
    }
    toE[a]+=0.5*Mass[i]*(pow(Y[3][i],2)+pow(Y[4][i],2)+pow(Y[5][i],2))+Mass[i]*Y[6][i];
    ratE=100*(toE[a]-toE[0])/toE[0];
}

```

```

dataout()

```

```
{
  for(i=0;i<Num;++i)
  {
    printf("%f,%d,%f,%f,%f\n",t1,i,Y[0][i],Y[1][i],Y[2][i]);
  }
}
```