与えられた構造の有限岩澤加群を持つ $\mathbb{Z}_p$-拡大の構成とその応用

尾崎　学　　島根大学 (総合理工)

1　序

岩澤理論は代数体の $\mathbb{Z}_p$-拡大に付随する様々な数論的対象を扱う理論である. 特に岩澤加群はその主役と言える. 本報告では与えられた構造の岩澤加群を持つ $\mathbb{Z}_p$-拡大を構成することの試みについて, いくつかの結果を得たので報告する.

k を有限次代数体, p を素数, K/k を $\mathbb{Z}_p$-拡大 (即ち $\mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathbb{Z}_p$ なる Galois 拡大) とすると, K/k の中間体の列,

$$k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq k_2 \subseteq \cdots \subseteq k_n \subseteq \cdots \subseteq K = \bigcup_{n \geq 0} k_n$$

で, k_n/k が p^n 次巡回拡大となるものが各 n に対して唯一つ存在する (この k_n を K/k の n**-th layer** と呼ぶ). $A(k_n)$ を k_n のイデアル類群の Sylow p-部分群とするとき, ノルム写像 $A(k_m) \to A(k_n)$ $(m \geq n)$ に関する $\{A(k_n)\}$ の射影的極限 $X_K = \varprojlim A(k_n)$ を K/k の**岩澤加群**と呼ぶ. 各 $n \geq 0$ に対して, $A(k_n)$ には $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k_n/k)]$ が作用している. この作用はノルム写像 $A(k_m) \to A(k_n)$ と自然な写像 $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k_m/k)] \to \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k_n/k)]$ に関して可換なので, 完備群環 $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]] := \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(k_n/k)]$ が岩澤加群 X_K に作用する. よって X_K は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]]$- 加群になる. 以下 $\mathbb{Z}_p$-拡大 K/k に対して $\Lambda_{K/k} = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K/k)]]$ と置く.

次の定理が X_K の $\Lambda_{K/k}$-加群構造に関する基本定理である：

定理 (岩澤)　X_K は有限生成 torsion $\Lambda_{K/k}$-加群.

上で岩澤加群はイデアル類群から定義されたが, 類体論により岩澤加群は Galois 群と見ることもできる：
$X_K = \mathrm{Gal}(L(K)/K)$, $L(K)/K$:最大不分岐 pro-p abel 拡大. $\mathrm{Gal}(K/k)$ の作用は, $\gamma \in \mathrm{Gal}(K/k)$, $x \in \mathrm{Gal}(L(K)/K)$ に対して, $\gamma x = \tilde{\gamma} x \tilde{\gamma}^{-1}$ ($\tilde{\gamma} \in \mathrm{Gal}(L(K)/k)$ は γ の $L(K)$ への延長) で与えられる.

このように岩澤加群 X_K は $\mathbb{Z}_p$-拡大 K/k の数論において非常に重要な対象であり, その $\Lambda_{K/k}$-加群構造を調べることは岩澤理論における主要テーマと言って良い. 例えば, 岩澤 [3] は X_K の $\Lambda_{K/k}$-加群構造と X_K と $A(k_n)$ の関係を深く考察して次の有名な公式を示した：

岩澤の類数公式 (岩澤 [3](1959)) ある整数 $\lambda(K/k), \mu(K/k) \geq 0$ と $\nu(K/k)$ で, 十分大なるすべての n に対して

$$\#A(k_n) = p^{\lambda(K/k)n+\mu(K/k)p^n+\nu(K/k)}$$

となるものが存在する.

この公式中の $\lambda(K/k), \mu(K/k)$ と $\nu(K/k)$ を**岩澤不変量**と呼ぶ. 岩澤不変量 $\lambda(K/k), \mu(K/k)$ は岩澤加群 X_K の構造不変量で,

$$\lambda(K/k) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} X_K$$

$$\mu(K/k) = 0 \Longleftrightarrow X_K \text{は } \mathbb{Z}_p \text{ 上有限生成}$$

が成立する.

この岩澤加群と岩澤不変量に関して次のような問題が考えられる：

問題 A $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ (位相群), $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とする. このとき任意の有限生成 torsion Λ-加群 X に対して, $\underline{X_K \simeq X}$ となる $\mathbb{Z}_p$-拡大は存在するか？
ここで上の下線部は, 「適当な同型 $\mathrm{Gal}(K/k) \simeq \Gamma$ で $\Lambda_{K/k}$ と Λ を同一視したとき, X_K と X が Λ-加群として同型」という意味である.

問題 B 任意に与えられた岩澤不変量をもつ $\mathbb{Z}_p$-拡大は存在するか？

ここで, ν-不変量を除けば問題 B は問題 A よりも弱いことを注意しておく.

筆者の知る限りでは, 上のような問題はこれまでに研究されたことは無い様である. ただし, 問題 B に関しては次のことが知られている.

定理 (岩澤 ([4], etc.)) 任意の素数 p と正数 N に対して, $\lambda(K/k) > N$, 或いは $\mu(K/k) > N$ となる $\mathbb{Z}_p$-拡大 K/k がそれぞれ存在する.

この報告でははは問題Aに関して得た部分的結果について解説し (第 2 節), その単項化問題への応用にも触れる (第 3 節).

2　主結果とその証明の概略

問題Aで, 与えられた X の位数が有限の場合は, この問題は肯定的に解かれる：

定理１　$\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ (位相群), $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とする. このとき任意の有限位数の Λ-加群 X に対して, $X_K \simeq X$ となる総実代数体の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大 K/k が存在する. つまり, 問題 A は $\#X < \infty$ のときは肯定的に解決される.

注意　K/k が総実代数体の $\mathbb{Z}_p$-拡大のときは, 常に X_K は有限位数と予想されている (Greenberg 予想 ([2] 参照)). 従ってこの予想の下では, 総実代数体の $\mathbb{Z}_p$-拡大の岩澤加群として, 可能性のあるすべての Λ-加群が実際に現れる.

証明の概略

$\#X < \infty$ より, ある m, n に対して X は $\mathbb{Z}_p/p^m[\Gamma_n]$-加群になる ($\Gamma_n = \Gamma/\Gamma^{p^n} \simeq \mathbb{Z}/p^n$).

補題　定理１を示すには次を示せば十分：
ある総実代数体の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大 K/k で,
(i) Γ_n-加群として $A(k_n) \simeq X$(適当な同型 $\Gamma \simeq \mathrm{Gal}(K/k)$ で $A(k_n)$ を Γ_n-加群と見た上で).
(ii)　$\#A(k_n) = \#A(k_{n+1})$
(iii) K/k の分岐素点は完全分岐

証明　条件 (ii),(iii) より, $X_K \simeq A(k_n)$ (福田 [1]), 従って条件 (i) より, $X_K \simeq X$　□

(i) の条件に関連して, 次のような結果が知られている：

定理 (Yahagi[7](1976))　任意の有限アーベル p-群 A に対して $A(F) \simeq A$ ($A(F)$: F のイデアル類群の Sylow p-部分群) となる有限次代数体 F が存在する.

この定理の構成手法をイデアル類群への Galois 作用もコントロールできるように発展させて, 補題の条件を満たす $\mathbb{Z}_p$-拡大を構成する.

X は $\mathbb{Z}_p/p^m[\Gamma_n]$-加群だから, 完全系列

$$0 \longrightarrow R_n \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m[\Gamma_n]^{\oplus r} \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

が存在する.

$$\tilde{R}_n=\{(x_i)_{1\le i\le r+1}\in\mathbb{Z}/p^m[\Gamma_n]^{\oplus r+1}|(x_i)_{1\le i\le r}\in R_n,\ x_{n+1}\equiv\sum_{j=1}^{n}x_j\ \ (\gamma_n-1)\}$$

$(\mathrm{Gal}(k_n/k)=\langle\gamma_n\rangle)$ とおき, $\tilde{X}$ を完全系列

$$0\longrightarrow\tilde{R}_n\longrightarrow\mathbb{Z}/p^m[\Gamma_n]^{\oplus r+1}\longrightarrow\tilde{X}\longrightarrow 0$$

で定義する. このとき $\tilde{X}\simeq X\oplus\mathbb{Z}/p^m$.

$\mathbb{Q}_t$ を $\mathbb{Q}$ 上の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ の t-th layer とする. 結論を言えば, k としては十分大きい N に対する, $\mathbb{Q}_N$ の適当な導手 $\mathfrak{m}=\prod_{i=1}^{r+1}\mathfrak{l}_i$ の p^m 次巡回拡大体をとることができる. ここで $\mathfrak{l}_i$ は $\mathbb{Q}_N$ の相異なる素イデアル. この $\mathfrak{m}$ 及び k の選び方について以下で説明していく.

今後, 同型 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}_N)\simeq\Gamma$ を１つ固定してこの 2 つの群を同一視する. L_t を $\mathbb{Q}_{N+t}$ のアーベル p-拡大体 M で $M/\mathbb{Q}_{N+t}$ の導手が $\mathfrak{m}$ を割っていて, かつ $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}_{N+t})$ の exponent が p^m 以下となる最大のものとする. このとき, 類体論により Γ-加群の完全系列

$$\mathcal{O}_{N+t}^\times/p^m\longrightarrow(\mathcal{O}_{N+t}/\mathfrak{m})^\times/p^m\longrightarrow\mathrm{Gal}(L_t/\mathbb{Q}_{N+t})\longrightarrow 0$$

が存在するが ($\mathcal{O}_{N+t}$ は $\mathbb{Q}_{N+t}$ の整数環), ここで素イデアル $\mathfrak{l}_i$ $(1\le i\le r+1)$ が $\mathbb{Q}_{N+t}(\mu_{p^m})/\mathbb{Q}_N$ で完全分解しているとすれば, 上の完全系列の 2 番目の項は $\mathbb{Z}/p^m[\Gamma_t]^{\oplus r+1}$ と同型である：

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}_{N+t}/\mathfrak{m})^\times/p^m&\simeq\bigoplus_{1\le i\le r+1,\ \gamma\in\Gamma_t}(\tilde{\mathcal{O}}_{N+t}/\tilde{\gamma}\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{i}})^\times/p^m\\&\simeq\bigoplus_{1\le i\le r+1,\ \gamma\in\Gamma_t}\mu_{p^m}\mod\tilde{\gamma}\tilde{\mathfrak{L}}_i\\&\simeq\mathbb{Z}/p^m[\Gamma_t]^{\oplus r+1}\end{aligned}$$

ここで, $\tilde{\mathcal{O}}_{N+t}$ は $\mathbb{Q}_{N+t}(\mu_{p^m})$ の整数環, $\tilde{\gamma}\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{N+t}(\mu_{p^m})/\mathbb{Q}_N(\mu_{p^m}))$ は自然な同型 $\Gamma_t\simeq\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{N+t}(\mu_{p^m})/\mathbb{Q}_N(\mu_{p^m}))$ による $\gamma\in\Gamma_t$ の像 (N を $\mu_{p^m}\subseteq\mathbb{Q}_N(\mu_p)$ となるよう十分大きく選んでおく), $\tilde{\mathfrak{L}}_i$ は $\mathfrak{l}_i$ の上にある固定された $\mathbb{Q}_{N+t}(\mu_{p^m})$ の素イデアルで, 最後の同型は

$$(\zeta_{i,\gamma}\mod\tilde{\gamma}\tilde{\mathfrak{L}}_i)_{1\le i\le r+1,\ \gamma\in\Gamma_t}\mapsto(\sum_{\gamma\in\Gamma_t}\varphi(\zeta_{i,\gamma})\gamma)_{1\le i\le r+1}$$

$$(\varphi:\ \mu_{p^m}\simeq\mathbb{Z}/p^m\text{は固定された同型})$$

で与えられる．よって完全系列

$$\mathcal{O}_{N+t}^{\times}/p^m \xrightarrow{\rho_t} \mathbb{Z}/p^m[\Gamma_t]^{\oplus r+1} \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_t/\mathbb{Q}_{N+t}) \longrightarrow 0$$

を得る．ここで ρ_t は具体的に次で与えられる：

$$\rho_t : \mathcal{O}_{N+t}^{\times}/p^m \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m[\Gamma_t]^{\oplus r+1},\ \rho_t(\varepsilon) = \left(\sum_{\gamma\in\Gamma_t} \varphi\left(\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{\gamma}\tilde{\mathfrak{L}}_i} \right) \right) \gamma \right)_{i=1}^{r+1}.$$

ここに，$\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{\gamma}\tilde{\mathfrak{L}}_i}\right) \in \mu_{p^m}$ は $\mathbb{Q}_{N+t}(\mu_{p^m})$ における p^m 冪剰余記号.

命題 1　(1)　任意の Γ_t-準同型 $f : \mathcal{O}_{N+t}^{\times}/p^m \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m[\Gamma_t]^{\oplus r+1}$ に対して，$\mathfrak{l}_i$ $(1 \le i \le r+1)$ (及び $\tilde{\mathfrak{L}}_i$) をうまく選ぶと $\rho_t = f$ となる．
(2)　$\mathcal{O}_{N+t}^{\times}/p^m \simeq \mathbb{Z}/p^m[\Gamma_t]^{\oplus p^N-1} \oplus \mathbb{Z}/p^m[\Gamma_t]/\sum_{\gamma\in\Gamma_t}\gamma$

$\pi : \mathbb{Z}/p^m[\Gamma_{n+1}]^{\oplus r+1} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m[\Gamma_n]^{\oplus r+1}$ を自然な全射とし，$\tilde{R}_{n+1} := \pi^{-1}(\tilde{R}_n)$ とおく．ここで，$\mathbb{Z}/p^m[\Gamma_{n+1}]^{\oplus r+1}/\tilde{R}_{n+1} \simeq \tilde{X}$ に注意.

命題 1 より，$p^N - 1$ が $\tilde{R}_{n+1}$ の $\mathbb{Z}/p^m[\Gamma_n]$ 上の最小生成系の位数より大きいとき，$\mathfrak{l}_i$ $(1 \le i \le r+1)$ をうまく選ぶと

$$\mathrm{Im}\rho_{n+1} = \tilde{R}_{n+1},\ \mathrm{Gal}(L_{n+1}/\mathbb{Q}_{N+n+1}) \simeq \tilde{X}$$

となる．このとき $\mathrm{Im}\rho_n = \tilde{R}_n,\ \mathrm{Gal}(L_n/\mathbb{Q}_{N+n}) \simeq \tilde{X}$ となることを示すことができる．ここで，埋め込み $X \hookrightarrow \tilde{X},\ (x_1, x_2, \ldots, x_r) \mod R_n \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_r, \sum_{j=1}^{r} x_j) \mod \tilde{R}_n$ で $X \subseteq \tilde{X}$ と見なす．$t = n, n+1$ に対して，L_t の $X \subseteq \tilde{X} \simeq \mathrm{Gal}(L_t/\mathbb{Q}_{N+t})$ による固定部分体を M_t とおくと次が成立する：

命題 2　(1)　$t = n, n+1$ とする．$M_t/\mathbb{Q}_{N+t}$ の導手は $\mathfrak{m}$ の p^m 次巡回拡大で，$\mathfrak{l}_i$ $(1 \le i \le r+1)$ 上の $\mathbb{Q}_{N+t}$ 上の素イデアルはすべて完全分岐.
(2)　$t = n, n+1$ とする．L_t/M_t は不分岐拡大で $\mathrm{Gal}(L_t/M_t) \simeq X$．さらに L_t は $M_t/\mathbb{Q}_{N+t}$ の genus p-class field, 即ち M_t の不分岐アーベル p-拡大体で $\mathbb{Q}_{N+t}$ 上アーベル拡大体となる最大のもの．したがって，$\mathrm{Gal}(L_t/M_t) \simeq A(M_t)/(\sigma - 1)$ $(\langle\sigma\rangle = \mathrm{Gal}(M_t/\mathbb{Q}_{N+t}))$.
(3)　ある導手 $\mathfrak{m}$ の p^m 次巡回拡大 $k/\mathbb{Q}_N$ で $M_n = k_n$, $M_{n+1} = k_{n+1}$ (k_m:k の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大の m-th layer) となるものが (一意に) 存在する (k は総実であることに注意).

この命題と補題により，もしも $t = n, n+1$ に対して L_t が $M_t = k_t$ のの Hilbert p-類体であれば，k 上の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大が求める $\mathbb{Z}_p$-拡大にな

る．そのためには, $\mathrm{Gal}(L_t/k_t) \simeq A(k_t)/(\sigma-1)$ より, $A(k_t)/(\sigma-1)$ が $\mathrm{Gal}(k_t/\mathbb{Q}_{N+t})$-不変なイデアル類で生成されていれば, $A(k_t)/(\sigma-1) = A(k_t)$ となるのでよい．もし,

$$\mathrm{Gal}(L_{n+1}/k_{n+1}) = \left\langle \left(\frac{L_{n+1}/k_{n+1}}{\overline{\mathfrak{L}}}\right) \middle| \ \overline{\mathfrak{L}}|\mathfrak{m}:\ k_{n+1}\text{ の素イデアル} \right\rangle$$

であれば, この条件は満たされている ($\overline{\mathfrak{L}}$ は $k_{n+1}/\mathbb{Q}_{N+n+1}$ で完全分岐しているから)．実際に, $i=1$ から順に $\mathfrak{l}_i$ $(1 \leq i \leq r+1)$ をうまく帰納的に選ぶことによって上の条件 (及び前提の条件 $\mathrm{Im}\rho_{n+1} = \tilde{R}_{n+1}$) が満たされるようにできる．このようにして, 定理 1 が示される．

3 単項化問題への応用

F を有限次代数体, H を F の Hilbert 類体とすると, 単項化定理により F のすべてのイデアルは H で単項化する．言い換えれば, イデアルの持ち上げから生ずる自然な写像 $\mathrm{Cl}(F) \longrightarrow \mathrm{Cl}(H)$ は零写像である ($\mathrm{Cl}(*)$ はイデアル類群)．ところが, 必ずしも Hilbert 類体まで持ち上げなくとも, H/F のある真の中間体 M で既に自然な写像 $\mathrm{Cl}(F) \longrightarrow \mathrm{Cl}(M)$ が零写像になることもある．岩澤 [5] では, $\mathbb{Z}_p$-拡大の理論を用いて, そのような代数体 F の無限族を構成している．

定理 (岩澤 [5](1989))
任意の素数 p に対し, 次をみたす代数体 F が無数に存在する:
(i) $\mathrm{Cl}(F)[p^\infty] \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus r},\ r \geq 2,$
(ii) F のある p 次不分岐巡回拡大 F'/F に於いて, $\mathrm{Cl}(F)[p^\infty]$ が単項化する．

上の定理の F に対し, M を F' とすべての素数 $l \neq p$ についての F の Hilbert l-類体との合成体とすれば, $F \subseteq M \subsetneq H$ で, $\mathrm{Cl}(F)$ は M で単項化する．

筆者はこの岩澤先生の手法を用いて, 上の定理の条件 (i) の「$r \geq 2$」を, 任意の N について「$r \geq N$」で置き換えても, 定理が成立することを示していた ([6])．今回の定理 1 の構成手法を応用することによって, さらに一般に次を示すことができる:

定理 2　p を素数とする．任意の有限アーベル p-群 A に対して次の性質 (i),(ii) を持つ代数体 F が存在する：

(i) $\mathrm{Cl}(F)[p^\infty] \simeq A$,
(ii) ある不分岐 p^e 次巡回拡大 F'/F (p^e:A の exponent) が存在して, $\mathrm{Cl}(F)[p^\infty]$ は F' で単項化する.

証明　$A = A' \oplus \mathbb{Z}/p^e$ とする. 定理 1 で $X = A'$, $n = 0$(つまり Γ-作用は自明), $m = e$ として k を構成する. このとき F を $k_e/\mathbb{Q}_N$ (N は定理 1 の証明中と同じ) の中間体で $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}_N) \simeq \mathbb{Z}/p^e$, $F \neq k$, $\mathbb{Q}_{N+e}$ なるものとする. このとき k_e/F は不分岐 p^e 次巡回拡大になる. $L_e := L_0k_e = L_0\mathbb{Q}_{N+e}$ は k_e のヒルベルト p-類体で $L_0/\mathbb{Q}_N$ はアーベル拡大 (命題 2 (2)) だから, $L_e/\mathbb{Q}_N$ はアーベル拡大. 従って L_e/F は不分岐アーベル拡大になるから, L_e は F の Hilbert$p$-類体でもある. $L_e = L_0F$, $L_0 \cap F = \mathbb{Q}_N$ なので ($F/\mathbb{Q}_N$ では p 上の素点が完全分岐するが L_0/F では不分岐だから), $\mathrm{Gal}(L_e/F) = \mathrm{Gal}(L_0F/F) \simeq \mathrm{Gal}(L_0/\mathbb{Q}_N) \simeq A' \oplus \mathbb{Z}/p^e = A$. 故にこの F は (i) を持たしている. 次に $\mathrm{Cl}(F)[p^\infty]$ は不分岐 p^e 次巡回拡大 k_e/F で単項化することを示す. 類体論から生ずる可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cl}(k_e)[p^\infty] & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Gal}(L_e/k_e) \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Ver}} \\
\mathrm{Cl}(F)[p^\infty] & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Gal}(L_e/F) \simeq A
\end{array}$$

(横写像は Artin 写像, 左縦写像はイデアルの持ち上げから生ずる自然な準同型, 右縦写像は $\mathrm{Gal}(L_e/F)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(L_e/F)$ から $\mathrm{Gal}(L_e/k_e)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(L_e/k_e)$ への移送写像.) において, 右縦写像はこの場合 p^e 倍写像と一致しているから零写像, 従って左縦写像も零写像となり, (ii) も満たされている.　$\square$

参考文献

[1] T. Fukuda, Remarks on $\mathbb{Z}_p$-extensions of number fields, *Proc. Japan Acad.* **70**A (1994), 264–266.

[2] R. Greenberg, On the Iwasawa invariants of totally real number fields, *Amer. J. of Math.* **98** (1976), 263–284.

[3] K. Iwasawa, On Γ-extensions of algebraic number fields., *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 183-226.

[4] K. Iwasawa, On the μ-invariants of $\mathbb{Z}_\ell$-extensions, *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo*, (1973), 1–11.

[5] K. Iwasawa, A note on capitulation problem for number fields II, *Proc. Japan Acad.* **65** (1989), 183–186.

[6] M. Ozaki, Iwasawa invariants of p-extensions of totally real number fields, preprint

[7] O. Yahagi, Construction of Number fields with prescribed l-class groups, *Tokyo J. of Math.* **1** (1978), 275–283.

尾崎 学 (Manabu Ozaki)
島根大学 総合理工学部 数理・情報システム学科
〒 690-8504 島根県松江市西川津町 1060
e-mail: `ozaki@math.shimane-u.ac.jp`