重さ半整数の Siegel モジュラー形式と Jacobi 形式

高瀬幸一

未定稿 ver.2011.8.22

目 次

0　はじめに

$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$ は $(z, w) \in \mathfrak{H}_n \times \mathbb{C}^n$ に対して

$$\sigma(z, w) = (\sigma(z),\, wJ(\sigma, z)^{-1})$$

により作用する．但し

$$\sigma(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}, \qquad J(\sigma, z) = cz + d$$

である．そこで偶数 $0 < k \in \mathbb{Z}$ をとり，$\mathfrak{H}_n \times \mathbb{C}^n$ 上の正則関数 F は次のような変換公式を満たすとする；

1) 任意の $x, y \in \mathbb{Z}^n$ に対して $F(z, w+xz+y) = \mathbf{e}(-(\langle x, xz\rangle+2\langle x, w\rangle))F(z, w)$,
但し $\mathbf{e}(t) = \exp 2\pi\sqrt{-1}t$ 及び $\langle x, y\rangle = x\,{}^t y$ とする,

2) 任意の $\sigma \in Sp(n, \mathbb{Z})$ に対して $F|[\sigma]_k = F$，但し

$$(F|[\sigma]_k)(z, w) = F(\sigma(z), wJ(\sigma, z)^{-1}) \det J(\sigma, z)^{-k}\mathbf{e}(-\langle w\,{}^t c, wJ(\sigma, z)^{-1}\rangle)$$

$(\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})$ とおく.

このとき F は次のような Fourier 展開をもつ；

$$F(z, w) = \sum_{N\in \mathrm{Sym}_n^*(\mathbb{Z}), r\in\mathbb{Z}^n} a(N, r)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(Nz) + \langle r, w\rangle).$$

ここで

$$\mathrm{Sym}_n^*(\mathbb{Z}) = \{N \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q}) \mid \mathrm{tr}(NS) \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall S \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z})\}.$$

F が上の変換公式 1), 2) を満たし，更に

3) $a(N, r) \neq 0$ となるのは $N - 4^{-1}\,{}^t rr \geq 0$ の場合に限る

とき，F を重さ k, index 1 の Jacobi 形式と呼び，その全体を $J_{k,1}$ と書く.
$F \in J_{k,1}$ が上の条件 3) より強く

3)′ $a(N, r) \neq 0$ となるのは $N - 4^{-1}r\,{}^t r > 0$ の場合に限る

を満たすとき，F を Jacobi 尖点形式と呼び，その全体を $J_{k,1}^{\mathrm{cusp}}$ と書く．$F \in J_{k,1}$ に対して，変換公式 1) は F が $w \in \mathbb{C}^n$ の関数としてはテータ関数であることを意味するから，テータ関数の基底の一次結合となる．即ち Riemann のテータ級数

$$\vartheta_{m',m''}(z, w) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle p + m'/2, (p + m'/2)z\rangle + \langle p + m'/2, w + m''/2\rangle\right)$$

$(z \in \mathfrak{H}_n, w \in \mathbb{C}^n)$ を用いて $\theta_\mu(z, w) = \vartheta_{\mu,0}(2z, 2w)$ と定義すると

$$F(z, w) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n} F_\mu(z)\theta_\mu(z, w)$$

と書ける．そこで

$$\sigma(F)(z) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n} F_\mu(4z) \qquad (z \in \mathfrak{H}_n)$$

とおく．一方,

$$\theta(z) = \vartheta_{0,0}(2z, 0) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \mathbf{e}(\langle p, pz\rangle) \qquad (z \in \mathfrak{H}_n)$$

とおいて，$\mathfrak{H}_n$ 上の関数 h と $\sigma \in Sp(n,\mathbb{R})$ に対して

$$(h|[\sigma]_{k-1/2})(z) = h(\sigma(z))\frac{\theta(\sigma(z))}{\theta(z)} \det J(\sigma, z)^{-k}$$

とおく．ここで

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \pmod 4 \right\}$$

とくと，任意の $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(4)$ に対して

$$\left(\frac{\theta(\sigma(z))}{\theta(z)}\right)^2 = \operatorname{sign}(\det c) \det J(\sigma, z)$$

となる．そこで $\mathfrak{H}_n$ 上の正則関数 h が

1) 任意の $\sigma \in \Gamma_0(4)$ に対して $h|[\gamma]_{k-1/2} = h$,
2) h は Fourier 展開 $h(z) = \displaystyle\sum_{0 \le T \in \mathrm{Sym}_n^*(\mathbb{Z})} c(T)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(Tz)$ をもつ

を満たすとき，h を $\Gamma_0(4)$ に関する重さ $k-1/2$ の Siegel モジュラー形式と呼び，その全体を $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書く．条件 2) より強く

2)$'$ $c(T) \neq 0$ となるのは $T > 0$ の場合に限る

を満たすとき，h を尖点形式と呼び，その全体を $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書く．さて $h \in M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ であって

> $c(T) \neq 0$ となるのは $\exists \mu \in \mathbb{Z}^n$ s.t. $T \equiv -{}^t\mu\mu \pmod{4\mathrm{Sym}_n^*(\mathbb{Z})}$
> のときに限る

なるもの全体を $M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ と書き，

$$S_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4)) = S_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \cap M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$$

とおく．このとき Eichler-Zagier [3] ($n=1$ のとき) と Ibukiyama [9] ($n \geq 1$ のとき) により次の定理が示された；

定理 0.0.1 $F \mapsto \sigma(F)$ は $J_{k,1}$ から $M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ の上への複素線形同型写像で，$J_{k,1}^{\mathrm{cusp}}$ を $S_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ に対応させる．この対応は Hecke 作用素と可換である．

この講義の一つの目的は，このような対応のメカニズムを理解することである．

第 I 部
一般論

1　保型形式

1.1　保型形式の最も原始的な設定は次のように与えられるだろう；群 Γ が集合 $\mathcal{D}$ に左から作用しているとする．又，有限次元複素ベクトル空間 V と写像 $J:\Gamma\times\mathcal{D}\to GL_{\mathbb{C}}(V)$ があって

$$J(\gamma\gamma',z)=J(\gamma,\gamma'z)\circ J(\gamma',z)\qquad(\gamma,\gamma'\in\Gamma,z\in\mathcal{D})\tag{1}$$

を満たすとしよう（このような J を**保型因子**と呼ぶ）．このとき任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して $F(\gamma z)=J(\gamma,z)F(z)$ $(z\in\mathcal{D})$ なる関数 $F:\mathcal{D}\to V$ を Γ に関する $\mathcal{D}$ 上の**保型形式**と呼ぶ．これだけではたいした議論は展開できないが，関係式(1) から Γ は $\mathcal{D}\times V$ に左から $\gamma(z,v)=(\gamma z,J(\gamma,z)v)$ により作用することがわかる．そこで $X=\Gamma\backslash\mathcal{D},\mathcal{V}=\Gamma\backslash(\mathcal{D}\times V)$ とおけば，自然な全射

$$\pi:\mathcal{V}\to X\qquad((z,v)\pmod{\Gamma}\mapsto\dot{z}=z\pmod{\Gamma})$$

が考えられる．特に任意の $z\in\mathcal{D}$ の固定部分群 $\Gamma_z=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma z=z\}$ に対して $J(\gamma,z)=1_V$ $(\gamma\in\Gamma_z)$ であるならば，$v\mapsto(z,v)\pmod{\Gamma}$ は全単射 $V\tilde{\to}\pi^{-1}(\dot{z})$ を与えるから，$\pi:\mathcal{V}\to X$ は X 上のベクトル束を与える．このとき $F:\mathcal{D}\to V$ が Γ に関する $\mathcal{D}$ 上の保型形式であることと $\dot{z}\mapsto(z,F(z))\pmod{\Gamma}$ がベクトル束 $\pi:\mathcal{V}\to X$ の大域的切断であることは同値である．このように保型形式を幾何学的な側面からとらえることができて，それが当初の保型形式の捉え方だったように思える [1].

1.2　ここでは保型形式を群論的な側面から捉えてみよう．群 G が $\mathcal{D}$ に左から推移的に作用していて，Γ は G の部分群であるとする．又，保型因子 J は G まで延長されているとする，即ち写像 $J:G\times\mathcal{D}\to GL_{\mathbb{C}}(V)$ があって

$$J(gg',z)=J(g,g'z)\circ J(g',z)\qquad(g,g'\in G,z\in\mathcal{D})\tag{2}$$

を満たすとする．原点 $o\in\mathcal{D}$ の固定部分群を $K=\{g\in G\mid go=o\}$ とすると，K の V 上の表現 δ が $\delta(k)=J(k,o)$ により定義される．そこで Γ に関する保型形式 $F:\mathcal{D}\to V$ に対して，関数 $f_F:G\to V$ を $f_F(g)=J(g,o)^{-1}F(go)$ $(g\in G)$ により定義すると

1) 任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して $f_F(\gamma g)=f_F(g)$,
2) 任意の $k\in K$ に対して $f_F(gk)=\delta(k)^{-1}f_F(g)$

が成り立つ．このとき，もとの保型形式は $F(z)=J(g,o)f_F(g)$ $(z=go\in\mathcal{D},g\in G)$ により復元されるから，$\mathcal{D}$ 上の保型形式を群 G 上の関数として

捉えることができる．更に，V の共役空間を V^* として，$v \in V, \alpha \in V^*$ に対して $\langle v, \alpha\rangle = \alpha(v) \in \mathbb{C}$ とおく．K の表現 (δ, V) の反傾表現 $(\check{\delta}, V^*)$ は $\langle v, \check{\delta}(k)\alpha\rangle = \langle\delta(k^{-1})v, \alpha\rangle$ により定義される．そこで $\alpha \in V^*$ に対して $f_{F,\alpha}(g) = \langle f_F(g), \alpha\rangle$ $(g \in G)$ とおくと，任意の $k \in K$ に対して

$$f_{F,\alpha}(gk) = \langle f_F(g), \check{\delta}(k)\alpha\rangle = f_{F,\check{\delta}(k)\alpha}(g) \qquad (g \in G)$$

となる．これをもう少し表現論的な言い方をすると次のようになる；G 上の左 Γ-不変な複素数値関数のなす複素ベクトル空間 $L(\Gamma\backslash G)$ 上の G の右正則表現 ρ_r を考えると，複素線形写像

$$T : V^* \to L(\Gamma\backslash G) \qquad (\alpha \mapsto f_{F,\alpha})$$

は任意の $k \in K$ に対して $T\circ\check{\delta}(k) = \rho_r(k)\circ T$ が成り立つ．従って特に (δ, V) が K の既約表現ならば，$f_{F,\alpha}$ は K の右正則表現 $L(\Gamma\backslash G)$ の $\check{\delta}$-成分に属する．

ここまでの議論は原始的過ぎてあまり面白いこともないので，次節では少し解析的な趣向を凝らしてみよう．

2 ユニタリ表現と保型形式

2.1 まず G は局所コンパクト・ユニモジュラー群として，$K \subset G$ はコンパクト部分群とする．G の中心 $Z(G)$ の閉部分群 A をとり，G の閉部分群 Γ は A を開部分群として含むとする．従って Γ/A は離散群であり Γ はユニモジュラーである．G, K, A 上の Haar 測度 $d_G(x), d_K(k), d_A(a)$ をとり，$\int_K d_K(k) = 1$ と正規化しておく．G/A 上の Haar 測度 $d_{G/A}(\dot{x})$ を

$$\int_G \varphi(x)d_G(x) = \int_{G/A} d_{G/A}(\dot{x}) \int_A d_A(a)\varphi(xa) \qquad (\varphi \in C_c(G))$$

が成り立つように定める[1]．更に Γ 上の Haar 測度 $d_\Gamma(\gamma)$ を

$$\int_\Gamma \varphi(\gamma)d_\Gamma(\gamma) = \sum_{\dot{\gamma}\in\Gamma/A} \int_A \varphi(\gamma a)d_A(a) \qquad (\varphi \in C_c(\Gamma))$$

が成り立つように定め，$\Gamma\backslash G$ 上の右 G-不変測度 $d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$ を

$$\int_G \varphi(x)d_G(x) = \int_{\Gamma\backslash G} d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) \int_\Gamma d_\Gamma(\gamma)\varphi(\gamma x) \qquad (\varphi \in C_c(G))$$

が成り立つように定めると

$$\int_{G/A} \varphi(\dot{x})d_{G/A}(\dot{x}) = \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\dot{\gamma}\in\Gamma/A} \varphi(\dot{\gamma}\dot{x})d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) \qquad (\varphi \in C_c(G/A))$$

が成り立つ．

[1] $C_c(G)$ は G 上の複素数値連続関数でコンパクトな台を持つもの全体である．

2.2 以下，A のユニタリ指標 χ を一つ固定しておく．又，K の既約ユニタリ表現 (δ, V_δ) を固定して，$e_\delta(k) = \dim\delta \cdot \overline{\mathrm{tr}\,\delta(k)}$ $(k \in K)$ とおく．

まず G 上の複素数値可側関数 f であって

1) 任意の $a \in A$ に対して $f(ax) = \chi(a)^{-1} f(x)$,
2) $\displaystyle\int_{G/A} |f(x)| d_{G/A}(\dot{x}) < \infty$

なるものの成す複素ベクトル空間（を $\displaystyle\int_{G/A} |f(x)| d_{G/A}(\dot{x}) = 0$ なる f のなす部分空間で割った商空間）$L^1(G/A, \chi)$ は $|f| = \displaystyle\int_{G/A} |f(x)| d_{G/A}(\dot{x})$ をノルムとする複素 Banach 空間であり，更に畳込み積

$$(f * g)(x) = \int_{G/A} f(xy) g(y^{-1}) d_{G/A}(\dot{y})$$

を積とし，$f \mapsto f^*$ $(f^*(x) = \overline{f(x^{-1})})$ を対合とする対合的 Banach 環である．$L^1(G/A, \chi)$ の元 f であって G 上連続かつ G/A 上の関数 $|f|(\dot{x}) = |f(x)|$ がコンパクト台なるもの全体 $C_c(G/A, \chi)$ は $L^1(G/A, \chi)$ の稠密な部分代数となる．特に $L^1(G)$ は対合的 Banach 環であり $C_c(G)$ は $L^1(G)$ の稠密な部分代数である．又，$f \in C_c(G)$ に対して $f_\chi(x) = \displaystyle\int_A f(ax)\chi(a) d_A(a)$ $(x \in G)$ は $C_c(G/A, \chi)$ の元を与え $|f_\chi| \leq |f|$ かつ $f \mapsto f_\chi$ は全射 $C_c(G) \to C_c(G/A, \chi)$ を与えるから，連続に延長することにより全射 $L^1(G) \to L^1(G/A, \chi)$ $(f \mapsto f_\chi)$ が定義される．

さて G のユニタリ表現 (σ, E) に対して，$\sigma|_A = \chi$ とすると，$f \in L^1(G/A, \chi)$ と任意の $u, v \in E$ に対して

$$(\sigma(f)u, v) = \int_{G/A} f(x)(\sigma(x)u, v) d_{G/A}(\dot{x})$$

なる E 上の有界作用素 $\sigma(f)$ が定まる．このとき $f \mapsto \sigma(f)$ は対合的 Banach 環 $L^1(G/A, \chi)$ の表現となる．

次に $e_\delta * f = f * e_\delta = f$ なる $f \in L^1(G/A, \chi)$ の全体 $L^1(G/A, \chi; \delta)$ は $L^1(G/A, \chi)$ の部分代数となる．ここで

$$(e_\delta * f)(x) = \int_K e_\delta(k) f(k^{-1}x) d_K(k),$$
$$(f * e_\delta)(x) = \int_K f(xk^{-1}) e_\delta(k) d_K(k) \qquad (x \in G)$$

である．更に任意の $k \in K$ に対して $f(kxk^{-1}) = f(x)$ なる $f \in L^1(G/A, \chi; \delta)$ の全体 $L^1(G/A, \chi; \delta)^o$ は $L^1(G/A, \chi; \delta)$ の部分代数となる．

$$C_c(G/A, \chi; \delta) = L^1(G/A, \chi; \delta) \cap C_c(G/A, \chi),$$
$$C_c(G/A, \chi; \delta)^o = L^1(G/A, \chi; \delta)^o \cap C_c(G/A, \chi)$$

はそれぞれ $L^1(G/A,\chi;\delta), L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ の稠密な部分代数である．$C_c(G/A,\chi;\delta)^o$ を **K-タイプ δ の Hecke 作用素の環**と呼ぶ．$f \in C_c(G)$ で $e_\delta * f = f * e_\delta = f$ なるもの全体を $C(G;\delta)$ とし，任意の $k \in K$ に対して $f(kxk^{-1}) = f(x)$ なる $f \in C_c(G,\delta)$ の全体を $C(G;\delta)^o$ とおくと，$f \mapsto f_\chi$ は夫々 $C_c(G,\delta), C_c(G,\delta)^o$ から $C_c(G/A,\chi;\delta), C_c(G/A,\chi;\delta)^o$ への全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像である．ここで次の命題が基本的である；

命題 2.2.1 $L^1(G/A,\chi;\delta)$ の中心は $L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ に含まれる．更に，次は同値である；

1) $\pi|_A = \chi$ なる G の任意の既約ユニタリ表現 π に対して，$\pi|_K$ における δ の重複度は 1 以下,
2) $L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ は $L^1(G/A,\chi;\delta)$ の中心に一致する,
3) $L^1(G/A,\chi;\delta)^o$ は可換.

以下の議論では用いないが，命題2.2.1 は次のように一般化される [7, pp.12–15], [2, 3.6.2]；まず可換とも 1 をもつとも限らない $\mathbb{C}$-代数 L について，任意の r 個の元 $a_i \in L$ $(1 \leq i \leq r)$ に対して

$$[a_1, a_2, \cdots, a_r] = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(r)} = 0$$

となるとき，L は **r-可換** であるという．次が成り立つ；

1) L が r-可換ならば，任意の $s > r$ に対して L は s-可換である,
2) $\dim_{\mathbb{C}} L = n < \infty$ ならば L は $n+1$-可換である,
3) 複素係数 n 次正方行列のなす $\mathbb{C}$-代数 $M_n(\mathbb{C})$ が r-可換となる最小の r を $r(n)$ とすると，$r(n) \geq n$ である,
4) $r(n+1) - r(n) > 1$ である.

これを用いて次の命題が示される；

命題 2.2.2 $1 < n \in \mathbb{Z}$ に対して次は同値である；

1) $\pi|_A = \chi$ なる G の任意の既約ユニタリ表現 π にたいして，$\pi|_K$ における δ の重複度は n 以下,
2) $L^1(G/A,\chi;\delta)$ は n-可換.

2.3 G のユニタリ表現 π であって，それを K に制限したときに既約成分として δ を有限重複度 $(\neq 0)$ で含むとき，π を**クラス-δ** のユニタリ表現と呼び，その重複度を δ に関する π の**高さ** と呼ぶ.

(π, H_π) を δ に関する高さ r の G のユニタリ表現で $\pi|_A = \chi$ なるものとして，$H_\pi(\delta)$ を δ-成分とする．即ち H_π 上の有界作用素 $\pi(e_\delta)$ を

$$(\pi(e_\delta)u, v) = \int_K e_\delta(k)(\pi(k)u, v) d_K(k) \qquad (u, v \in H_\pi)$$

により定義すれば，$u \mapsto \pi(e_\delta)u$ が直交射影 $H_\pi \to H_\pi(\delta)$ を与える．このとき有界連続関数

$$\Phi_{\pi,\delta} : G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H_\pi(\delta)), \qquad \psi_{\pi,\delta} : G \to \mathbb{C}$$

を

$$\Phi_{\pi,\delta}(x) = \pi(e_\delta) \circ \pi(x)|_{H_\pi(\delta)}, \qquad \psi_{\pi,\delta}(x) = (\dim \delta)^{-1} \mathrm{tr}\, \Phi_{\pi,\delta}(x) \qquad (x \in G)$$

により定義する．$\Phi_{\pi,\delta}$ を (π, H_π) に付随する K-タイプ δ の**球関数**と呼び，$\psi_{\pi,\delta}$ を π に付随する K-タイプ δ の**球跡関数**と呼ぶ．定義から

$$\Phi_{\pi,\delta}(kxk') = \pi(k) \circ \Phi_{\pi,\delta}(x) \circ \pi(k') \qquad (k, k' \in K)$$

である．又，任意の $k \in K$ に対して $\psi_{\pi,\delta}(kxk^{-1}) = \psi_{\pi\, delta}(x)$ かつ $\overline{e_\delta} * \psi_{\pi,\delta} = \psi_{\pi,\delta} * \overline{e_\delta} = \psi_{\pi,\delta}$ である．$f \in L^1(G/a, \chi; \delta)^o$ に対して $\pi(f)H_\pi(\delta) \subset H_\pi(\delta)$ で

$$\pi(f)|_{H_\pi(\delta)} = \int_{G/A} f(x)\Phi_{\pi,\delta}(x) d_{G/A}(\dot{x}) \in \mathrm{End}_K(H_\pi(\delta))$$

である．δ に関する π の高さが r だから $H_\pi(\delta) = V_\delta^r$ なる同一視を一つ決めると $\mathrm{End}_K(H_\pi(\delta)) = M_r(\mathbb{C})$ と同一視される．この同一視によって $\pi(f)|_{H_\pi(\delta)} \in \mathrm{End}_K(H_\pi(\delta)) = M_r(\mathbb{C})$ とみたものを $\widehat{\Phi}_{\pi,\delta}(f)$ と書くことにすると

$$\widehat{\Psi}_{\pi,\delta} : L^1(G/A, \chi; \delta)^o \to M_r(\mathbb{C})$$

は $\mathbb{C}$-代数の準同型写像となる．又，$f \in L^1(G/A, \chi; \delta)^o$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(f) = \int_{G/A} f(x)\psi_{\pi,\delta}(x) d_{G/A}(\dot{x})$$

とおくと，$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(f) = \mathrm{tr}\, \widehat{\Psi}_{\pi,\delta}(f)$ である．定義から $\psi_{\pi,\delta}$ は G 上の正定値関数（即ち，任意の有限部分集合 $\{g_i\}_{i=1,\cdots,n} \subset G$ に対して $(\psi_{\pi,\delta}(g_i g_j^{-1}))_{i,j=1,\cdots,n}$ は半正定値 Hermite 行列）である．更に次が成り立つ；

命題 2.3.1 (π, H_π) が既約ならば

$$\widehat{\Phi}_{\pi,\delta} : C_c(G/A, \chi; \delta)^o \to M_r(\mathbb{C})$$

は全射である．

これらの逆が次のように成り立つ；

定理 2.3.2 G 上の正定値連続関数 ψ に対して

1) 任意の $a \in A$ に対して $\psi(ax = \chi(a)\psi(x)$,
2) 任意の $k \in K$ に対して $\psi(kxk^{-1}) = \psi(x)$,
3) $\overline{e_\delta} * \psi = \psi * \overline{e_\delta} = \psi$,

4) $\mathbb{C}$-代数の全射準同型写像 $\Phi : L^1(G/A, \chi; \delta)^o \to M_r(\mathbb{C})$ があって

$$\Phi(f^*) = \Phi(f)^*, \qquad \int_{G/A} f(x)\psi(x) d_{G/A}(\dot{x}) = \mathrm{tr}\,\Phi(f)$$

が任意の $f \in L^1(G/A, \chi; \delta)^o$ に対して成り立つ

ならば，δ に関する高さが r かつ $\psi = \psi_{\pi,\delta}$ なる G の既約ユニタリ表現 π が存在する．

G の既約ユニタリ表現は，それに付随する球跡関数によって決定される．即ち，

定理 2.3.3 G の既約ユニタリ表現 π, π' は共にクラス-δ かつ $\pi|_A = \pi'|_A = \chi$ であるとする．このとき π, π' がユニタリ同値である必要十分条件は $\widehat{\psi}_{\pi,\delta} = \widehat{\psi}_{\pi',\delta}$ なることである．

2.4 (π, H_π) を G の既約ユニタリ表現で，δ に関する高さが 1 で $\pi|_A = \chi$ なるものとする．このとき π に付随して G 上の保型形式を定義しよう．

まず (ρ, V_ρ) を Γ の有限次元ユニタリ表現として，誘導表現 $\pi_{r,\rho} = \mathrm{Ind}_\Gamma^G \rho$ の表現空間を $L^2(\Gamma\backslash G, \rho)$ とする．即ち

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma x) = \rho(\gamma) f(x)$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$

なる可側関数 $f : G \to V_\rho$ のなす複素ベクトル空間（を $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) = 0$ なる f のなす部分空間で割ったもの）で，内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} (f(x), g(x))_\rho d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

(有限次元複素 Hilbert 空間 V_ρ の内積を $(\,,)_\rho$ とする）に関して複素 Hilbert 空間である．$x \in G$ の $f \in L^2(\Gamma\backslash G, \rho)$ への作用を $(\pi_{r,\rho}(x) f)(y) = f(yx)$ により定義する．

$L^2(\Gamma\backslash G, \rho)$ の元 f は G 上局所二乗可積分である，即ち，任意のコンパクト部分集合 $M \subset G$ に対して $\displaystyle\int_M |f(x)|^2 d_G(x) < \infty$ である．

π に付随する G 上の保型形式を定義するのに，誘導表現 $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \check{\rho}$（$\check{\rho}$ は ρ の反傾表現）の $\check{\pi}$-成分を考えるが，それが非自明であるためには $\rho|_A = \chi$ が必要である．

以上の準備の下，$\mathrm{Ind}_\Gamma^G \check{\rho}$ の $\check{\pi}$-成分を K に制限したときの $\check{\delta}$-成分（ここで反傾表現を考えなくてはいけない理由は 1.2 にあるとおりである）を $L^2(\Gamma\backslash G, \check{\rho}; \check{\pi}, \check{\delta})$ とおく．この空間をある程度具体的に把握するために，Godemenet の球関数の理論を用いる．次の定理が基本的である；

定理 2.4.1 $\sigma|_A = \chi$ なる G のユニタリ表現 (σ, E) に対して，E の π-成分 $E(\pi)$ 上の K のユニタリ表現 $(\sigma|_K, E(\pi))$ の δ-成分を $E(\pi,\delta)$ とおくと

$$E(\pi,\delta) = \{u \in E \mid \sigma(f)u = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(f)u \text{ for } \forall f \in C_c(G/A, \chi; \delta)^o\}$$

である．

この定理を $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \check{\rho}$ と $\check{\pi}$ に適用することを念頭に，π に付随した G 上の保型形式の空間を次のように定義する；

定義 2.4.2 連続関数 $f : G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ であって条件

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma x) = f(x) \circ \rho(\gamma)^{-1}$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$,
3) 任意の $k \in K$ に対して $f(xk) = \delta(k)^{-1} \circ f(x)$,
4) 任意の $\varphi \in C_c(G/A, \chi; \delta)^o$ に対して

$$\int_{G/A} f(xy^{-1})\varphi(y) d_{G/A}(\dot{y}) = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) \cdot f(x)$$

を満たすもの全体のなす複素ベクトル空間を $\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi)$ と書く．

上の定義で $A, B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ の内積を $(A, B) = \mathrm{tr}(A \circ B^*)$ により定義する．但し，$B^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\delta, V_\rho)$ を $(B^* v, u)_\rho = (v, Bu)_\delta$ $(v \in V_\delta, u \in V_\rho)$ により定義する．保型形式の空間 $\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi)$ 上の内積を

$$(f, g) = \int_{G/A} (f(x), g(x)) d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

により定義すると，次の基本定理が得られる；

定理 2.4.3 $f \otimes \alpha \in \mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \delta) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^*$ に対して $\theta_{f\otimes\alpha} : G \to V_\rho^*$ を

$$\langle \theta_{f\otimes\alpha}(x), u \rangle = (\dim \delta)^{1/2} \langle \alpha, f(x)u \rangle \qquad (x \in G, u \in V_\rho)$$

により定義すると，$f \otimes \alpha \mapsto \theta_{f\otimes\alpha}$ は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型

$$\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi) \otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \tilde{\to} L^2(\Gamma\backslash G, \check{\rho}; \check{\pi}, \check{\delta})$$

に延長される．

特に $\dim \chi = 1$ の場合には，$V_\rho = \mathbb{C}$ として $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ と $A(1) \in V_\delta$ を同一視すれば，$\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G.\rho.\pi)$ は

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma x) = \rho(\gamma)^{-1} f(x)$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|_\delta^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$,

3) 任意の $k \in K$ に対して $f(xk) = \delta(k)^{-1} f(x)$,

4) 任意の $\varphi \in C_c(G/A, \chi; \delta)^o$ に対して

$$\int_{G/A} f(xy^{-1})\varphi(y) d_{G/A}(\dot{y}) = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) \cdot f(x)$$

なる連続関数 $f : G \to V_\delta$ のなす複素ベクトル空間に内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} (f(x), g(x))_\delta d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

を与えた複素 Hilbert 空間である．

2.5 最後に代数群のアデール化上の保型形式を扱うための一般論を与えておく．$\mathbb{P}$ は可算添え字集合で，$p \in \mathbb{P}$ に対して G_p は局所コンパクト・ユニモジュラー群，$K_p \subset G_p$ はコンパクト部分群とする．更に有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset \mathbb{P}$ があって，$p \in \mathbb{P}_f = \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_\infty$ に対しては K_p は G_p の開部分群であるとする．有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて $x_p \in K_p$ である $(x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}} G_p$ の全体を G とすれば，それは直積群 $\prod_{p\in\mathbb{P}} G_p$ の部分群である．コンパクト空間の直積空間はコンパクトだから（Tikhonov の定理），有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して $G_S = \prod_{p\in S} G_p \times \prod_{p\in\mathbb{P}\setminus S} K_p$ は直積位相に関して局所コンパクトである．更に有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset S' \subset \mathbb{P}$ に対して G_S は $G_{S'}$ の開部分空間となり，$G = \bigcup_{\mathbb{P}_\infty\subset S\subset\mathbb{P}} G_S$ である．そこで $V \subset G$ が開集合であることを，全ての有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して $V \cap G_S$ が G_S の開部分集合なることと定義すれば，この位相に関して G は局所コンパクト群となる．こうして出来た局所コンパクト群 G を $\{K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する $\{G_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の**制限直積**と呼ぶ．直積群 $K = \prod_{p\in\mathbb{P}} K_p$ は G のコンパクト部分群である．各 $p \in \mathbb{P}$ に対して $A_p \subset Z(G_p)$ は閉部分群として，$\{A_p \cap K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する $\{A_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の制限直積を A とおけば，A は自然に $Z(G)$ の閉部分群となる．

G_p 上の Haar 測度 μ_p をとり，$p \in \mathbb{P}_f$ に対しては $\mu_p(K_p) = 1$ と仮定する．又，K_p $(p \in \mathbb{P})$ 上の Haar 測度 ν_p は $\nu_p(K_p) = 1$ と正規化しておく．有限部分集合 $\mathbb{P}_\infty \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して，$\nu_S(K^S) = 1$ なる $K^S = \prod_{p\notin S} K_p$ 上の Haar 測度 ν_S をとり，G_S 上の Haar 測度 $\mu_S = \prod_{p\in S} \mu_p \times \nu_S$ を得る．$\operatorname{supp}\varphi \subset G_S$ なる $\varphi \in C_c(G)$ の全体を $C_{c,S}(G)$ とおくと $C_c(G) = \bigcup_{\mathbb{P}_\infty\subset S\subset\mathbb{P}} C_{c,S}(G)$ だから，G 上の Haar 測度 μ が

$$\int_G \varphi(x) d\mu(x) = \int_{G_S} \varphi(x) d\mu_S(x) \qquad (\varphi \in C_{c,S}(G))$$

により定義される．μ を Haar 測度の族 $\{\mu_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する**制限直積** と呼ぶことにする．

G/A は $(x_p)_{p\in\mathbb{P}} \pmod{A} \mapsto (x_p \pmod{A_p})_{p\in\mathbb{P}}$ により $\{G_p/A_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{K_pA_p/A_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限直積 $\prod_{p\in\mathbb{P}}{}' G_p/A_p$ と位相群として同型だから，この二つを同一視する．各 $p\in\mathbb{P}$ に対して A_p 上の Haar 測度 η_p を定めて，$p\notin\mathbb{P}_\infty$ に対しては $\eta_p(A_p\cap K_p)=1$ とする．A 上の Haar 測度 η は $\{\eta_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{A_p\cap K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限直積としよう．更に G_p/A_p, G/A 上の Haar 測度 $\overline{\mu}_p$, $\overline{\mu}$ をそれぞれ

$$\int_{G_p}\psi(x)d\mu_p(x)=\int_{G_p/A_p}\left(\int_{A_p}\psi(xa)d\eta_p(a)\right)d\overline{\mu}_p(\dot{x}) \qquad (\psi\in C_c(G_p),$$
$$\int_{G}\varphi(x)d\mu(x)=\int_{G/A}\left(\int_{A}\varphi(xa)d\eta(a)\right)d\overline{\mu}(\dot{x}) \qquad (\varphi\in C_c(G))$$

となるように定めると，$\overline{\mu}$ は $\{\overline{\mu}_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{K_pA_p/A_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限直積となる．

コンパクト群 K_p $(p\in\mathbb{P})$ の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類の全体を $\widehat{K}_p$ と書いて，直積集合 $\prod_{p\in\mathbb{P}}\widehat{K}_p$ の元 $(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}}$ であって，有限個の $p\in\mathbb{P}$ を除いて $\delta_p=\mathbf{1}_{K_p}$ となるもの全体を $\prod_{p\in\mathbb{P}}{}'\widehat{K}_p$ とする．$(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}}\in\prod_{p\in\mathbb{P}}{}'\widehat{K}_p$ に対して，有限部部集合 $S\subset\mathbb{P}$ があって $p\notin S$ ならば $\delta_p=\mathbf{1}_{K_p}$ となるように出来る．このときコンパクト群 $\prod_{p\notin S}K_p$ の自明な 1 次元表現を $\mathbf{1}_S$ として $\otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p=(\otimes_{p\in S}\delta_p)\otimes\mathbf{1}_S$ とおくと，これは K の既約ユニタリ表現を与えて，$(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}}\mapsto\otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p$ は $\prod_{p\in\mathbb{P}}{}'\widehat{K}_p$ から $\widehat{K}$ への単射である．更に

命題 2.5.1 有限個を除いて K_p が完全非連結（即ち，単位元を含む連結成分が単位元のみからなる）とき，$(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}}\mapsto\otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p$ は $\prod_{p\in\mathbb{P}}{}'\widehat{K}_p$ から $\widehat{K}$ への全単射である．

同様に A のユニタリ指標を調べておく．$p\in\mathbb{P}\setminus\mathbb{P}_\infty$ に対しては $A_p\cap K_p$ は A_p のコンパクト開部分群となるから，A_p の Pontryagin 双対群 $\widehat{A}_p$ の中で

$$L_p=(A_p\cap K_p)^\perp=\{\alpha\in\widehat{A}_p \mid \langle A_p\cap K_p,\alpha\rangle=1\}$$

はコンパクト開部分群である．そこで $\{\widehat{A}_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{L_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限直積を $\prod_{p\in\mathbb{P}}{}'\widehat{A}_p$ とおく．すると $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{P}}\in\prod_{p\in\mathbb{P}}{}'\widehat{A}_p$ に対して $\otimes_{p\in\mathbb{P}}\alpha_p\in\widehat{A}$ が $(a_p)_{p\in\mathbb{P}}\mapsto\prod_{p\in\mathbb{P}}\alpha_p(a_p)$ により定義される．このとき

命題 2.5.2 1) $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p\in\mathbb{P}}\alpha_p$ は $\prod'_{p\in\mathbb{P}} \widehat{A}_p$ から $\widehat{A}$ への単射連続群準同型写像である，

2) 有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて A_p が完全非連結ならば，上の写像は全射である．

$(\delta_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod'_{p\in\mathbb{P}} \widehat{K}_p$ をとり $\delta = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p \in \widehat{K}$ とおく．又，$(\chi_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod'_{p\in\mathbb{P}} \widehat{A}_p$ をとり $\chi = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\chi_p \in \widehat{A}$ とおく．簡単のために $\mathcal{C}_p = C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)$, $\mathcal{H}_p = C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)^o$ とおく．$p \in \mathbb{P}_f$ に対して，K_p は G_p のコンパクト開部分群だから，G_p における K_p の特性関数を $\varepsilon_p \in C_c(G_p)$ とおき

$$\varepsilon_{\chi,p}(x) = \int_{A_p} \varepsilon_p(xa)\chi_p(a)d\eta_p(a) \qquad (x \in G_p)$$

とおくと，$\varepsilon_{\chi,p} \in \mathcal{C}_p$ である．$\mathbb{P}_\infty$ と $\delta_p \neq \mathbf{1}_{K_p}$ 又は $\chi_p \notin L_p$ となる $p \in \mathbb{P}_f$ の全体を S_1 とすると（S_1 は有限集合である）$p \notin S_1$ に対して $\varepsilon_{\chi,p}(1) = 1$ かつ任意の $\varphi \in \mathcal{C}_p$ に対して $\varepsilon_{\chi,p} * \varphi = \varphi * \varepsilon_{\chi,p} = \varphi$ となり

$$|\varepsilon_{\chi,p}(x)| = \begin{cases} 1 & : \dot{x} \in K_pA_p/A_p, \\ 0 & : \dot{x} \notin K_pA_p/A_p \end{cases}$$

となる．有限部分集合 $S_1 \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して，$\otimes_{p\in S}\varphi_p \in \otimes_{p\in S}\mathcal{C}_p$ を G 上の関数

$$(\otimes_{p\in S}\varphi_p)(x) = \prod_{p\in S}\varphi_p(x_p) \times \prod_{p\notin S}\varepsilon_{\chi,p}(x_p) \qquad (x = (x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in G)$$

と同一視して $\otimes_{p\in S}\mathcal{C}_p$ を $L^1(G/A, \chi, \delta)$ の $\mathbb{C}$-部分代数とみなして

$$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\mathcal{C}_p = \bigcup_S \otimes_{p\in S}\mathcal{C}_p \subset L^1(G/A, \chi, \delta)$$

とおく（S は $S_1 \subset S$ なる $\mathbb{P}$ の有限部分集合を走る）．同様に $L^1(G/A, \chi, \delta)^o$ の $\mathbb{C}$-部分代数 $\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\mathcal{H}_p = \bigcup_S \otimes_{p\in S}\mathcal{H}_p$ を定義すると次の命題が成り立つ；

命題 2.5.3 L^1-ノルムに関して，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\mathcal{C}_p$ は $L^1(G/A, \chi, \delta)$ の稠密な部分空間であり，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\mathcal{H}_p$ は及び $L^1(G/A, \chi, \delta)^o$ の稠密な部分空間である．

次にユニタリ表現の制限直積を考えよう．まず，複素 Hilbert 空間の無限族 $\{H_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ 及び，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて（具体的には有限部分集合 $S_0 \subset \mathbb{P}$ を除いて）$|u_p^o| = 1$ なる $u_p^o \in H_p$ が与えられたとする．一般に有限部分集合 $S \subset \mathbb{P}$ に対して，代数的なテンソル積 $\otimes_{p\in S}H_p$ 上の内積が $(\otimes_{p\in S}u_p, \otimes_{p\in S}v_p) = \prod_{p\in S}(u_p, v_p)$ により定義されるが，更に有限部分集合

$S_0 \subset S \subset T \subset \mathbb{P}$ に対して $u \mapsto u \otimes (\otimes_{p\in T\setminus S} u_p^o)$ は $\otimes_{p\in S} H_p$ から $\otimes_{p\in T} H_p$ へのユニタリ線形写像となるから，これにより $\otimes_{p\in S} H_p$ を $\otimes_{p\in T} H_p$ の部分空間と同一視して

$$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' H_p = \bigcup_{S_0\subset S\subset\mathbb{P}} \otimes_{p\in S} H_p$$

とおく．言い換えれば，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' H_p$ は代数的テンソル積 $\otimes_{p\in\mathbb{P}} H_p$ の元 $\sum \otimes_{p\in\mathbb{P}} u_p$ であって，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除けば $u_p = u_p^o$ となるもの全体であるから，そこには内積が $(\otimes_{p\in\mathbb{P}} u_p, \otimes_{p\in\mathbb{P}} v_p) = \displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}} (u_p, v_p)$ により定義される．この内積に関する $\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' H_p$ の完備化 $\widehat{\otimes}{}'_{p\in\mathbb{P}} H_p$ を $\{H_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{u_p^o\}_{p\in\mathbb{P}\setminus S_0}$ に関する**制限テンソル積** と呼ぶ．次に直積群 $\displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathrm{Aut}(H_p)$ の元 $(T_p)_{p\in\mathbb{P}}$ であって，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて $T_p u_p^o = u_p^o$ なるもの全体を $\displaystyle{\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \mathrm{Aut}(H_p)$ とおく．$(T_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \displaystyle{\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \mathrm{Aut}(H_p)$ をとると，有限部分集合 $S_0 \subset S \subset \mathbb{P}$ に対して $\otimes_{p\in S} T_p \in \mathrm{Aut}(\otimes_{p\in S} H_p)$ となり，更に有限部分集合 $S_0 \subset S \subset T \subset \mathbb{P}$ に対して $\otimes_{p\in S} H_p$ 上では $\otimes_{p\in T} T_p = \otimes_{p\in S} T_p$ となるから，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' T_p \in \mathrm{Aut}(\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' H_p)$ が $(\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' T_p) \otimes_{p\in\mathbb{P}} u_p = \otimes_{p\in\mathbb{P}} T_p u_p$ により定義され，これを連続的に延長して $\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' T_p \in \mathrm{Aut}(\widehat{\otimes}{}'_{p\in\mathbb{P}} H_p)$ を得る．このとき $(T_p)_{p\in\mathbb{P}} \mapsto \otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' T_p$ は $\displaystyle{\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \mathrm{Aut}(H_p)$ から $\mathrm{Aut}(\widehat{\otimes}{}'_{p\in\mathbb{P}} H_p)$ への単射群準同型写像となる．

さてここで，各 $p \in \mathbb{P}$ に対して G_p のユニタリ表現 (π_p, H_p) があって，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて（具体的には有限部分集合 $S_0 \subset \mathbb{P}$ を除いて）$\pi_p|_{K_p}$ は K_p の自明な 1 次元表現 $\mathbf{1}_{K_p}$ を重複度 1 で含むとする．このとき $p \in \mathbb{P} \setminus S_0$ に対して $|u_p^o| = 1$ なる K_p-不変ベクトル $u_p^o \in H_p$ をとって，$\{H_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{u_p^o\}_{p\in\mathbb{P}\setminus S_0}$ に関する制限テンソル積 を H とする．$x = (x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in G$ をとると，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除くと $x_p \in K_p$ となり，従って $(\pi_p(x_p))_{p\in\mathbb{P}} \in \displaystyle{\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \mathrm{Aut}(H_p)$ であるから，$\pi(x) = \otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' \pi_p(x_p) \in \mathrm{Aut}(H)$ が定義される．このとき (π, H) は G のユニタリ表現となる．K_p-不変ベクトル $u_p^o \in H_p$ は絶対値 1 の複素定数倍を除いて一意的だから，(π, H) はユニタリ同値を除いて一意的に定まる．そこでこれを $\{\pi_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ の $\{K_p\}_{p\in\mathbb{P}}$ に関する制限テンソル積 と呼び，$\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' \pi_p$ と書く．次の定理が基本的である；

定理 2.5.4 π_p が全て既約であり，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて K_p が完全非連結ならば，制限テンソル積 $\otimes_{p\in\mathbb{P}}{}' \pi_p$ は G の既約ユニタリ表現となる．

各 $p \in \mathbb{P}$ に対して $\pi_p|_{A_p} = \chi_p$ ならば $\pi|_A = \chi$ となるが，逆に次の定理が成り立つ；

定理 2.5.5 G_p $(p \in \mathbb{P})$ は全てタイプ I であり，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて $C_c(G_p/A_p, \chi_p, \mathbf{1}_{K_p})$ は可換であるとする．このとき，$\pi|_A = \chi$ なる G の既約

ユニタリ表現 (π, H) が $\delta = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p \in \widehat{K}$ $((\delta_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod'_{p\in\mathbb{P}} \widehat{K}_p)$ なる K-タイプを含むならば，各 G_p の既約ユニタリ表現 π_p を適当に取って $\pi = \otimes_{p\in\mathbb{P}}{}'\pi_p$ とできる．

以上の準備の下に，制限直積上の保型形式の空間を見てみよう．G の既約ユニタリ表現 π は G_p の既約ユニタリ表現 π_p の K_p に関する制限テンソル積で

$$\delta = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\delta_p \in \widehat{K}, \qquad (\delta_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}}{}' \widehat{K}_p$$

なる K-タイプを重複度 1 で含むとする．このとき $\pi_p|_{A_p} = \chi_p \in \widehat{A}_p$ とすると，$(\chi_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod'_{p\in\mathbb{P}} \widehat{A}_p$ で，$\pi|_A = \chi = \otimes_{p\in\mathbb{P}}\chi_p$ となる．ここで π_p の K_p-タイプ δ_p の球跡関数を簡単に ψ_p と書くことにする．すると $x = (x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in G$ にたいして，有限個の $p \in \mathbb{P}$ を除いて $x_p \in K_p$ かつ $\delta_p = \mathbf{1}_{K_p}$ だから，$\psi_p(x_p) = 1$ となり $\psi_{\pi,\delta}(x) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \psi_p(x_p)$ $(x = (x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in G)$ である．そこで G の閉部分群 Γ は A を開部分群として含むとして，Γ の有限次元ユニタリ表現 (ρ, V_ρ) は $\rho|_A = \chi$ を満たすとする．このとき，命題 2.5.3 に注意すると，G 上の保型形式の空間 $\mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \rho, \pi)$ は，連続関数 $f : G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ で，条件

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma x) = f(x) \circ \rho(\gamma)^{-1}$,
2) $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x}) < \infty$,
3) 任意の $k \in K$ に対して $f(xk) = \delta(k^{-1}) \circ f(x)$,
4) 任意の $\varphi \in C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)^o$ $(p \in \mathbb{P})$ に対して

$$\int_{G_p/A_p} f(xy^{-1})\varphi(y)d\overline{\mu}_p(\dot{y}) = \widehat{\psi}_p(\varphi)f(x)$$

を満たすもの全体のなす複素ベクトル空間に内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} (f(x), g(x))d_{\Gamma\backslash G}(\dot{x})$$

を与えた複素 Hilbert 空間である．このように G 上の保型形式は各「局所的な Hecke 作用素」の環 $C_c(G_p/A_p, \chi_p, \delta_p)^o$ $(p \in \mathbb{P})$ の作用によって定まり，その作用の固有値は G_p の既約ユニタリ表現 π_p を定めるのである．

3 Siegel モジュラー形式

3.1 まず有界対象領域の基本的な一般論をまとめておく．詳細は [15, Chap.2] を参照.

G は中心が有限なる連結実 Lie 群で，その Lie 環 $\mathfrak{g}$ は半単純であるとする．即ち，$\mathfrak{g}$ の Killging 形式 $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$ は $\mathfrak{g}$ 上の非退化実二次形式である．指数写像を $\exp : \mathfrak{g} \to G$ とする．

$\mathfrak{g}$ の Cartan 対合 θ（即ち，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の位数 2 の自己同型写像であって，$\mathfrak{g}$ 上の二次形式 $B_{\mathfrak{g}}(X,\theta X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ が負定値となるもの）を一つとり，付随する Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ とする（即ち $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$ はそれぞれ θ の固有値 $-1, 1$ の固有空間）．$\mathfrak{k}$ に対応する G の連結閉部分群 K は G の極大コンパクト部分群であり，G のコンパクト部分群は K の G-共役部分群に含まれる．実解析的多様体の同型

$$K \times \mathfrak{p} \tilde{\to} G \qquad ((k, X) \mapsto k \cdot \exp X)$$

が成り立ち，$\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は $\theta(k \cdot \exp X) = k \cdot \exp(-X)$ $(k \in K, X \in \mathfrak{p})$ により G の自己同型写像に延長される [6, p.480, Cor 1].

$(\mathrm{ad}(H_0)|_{\mathfrak{p}})^2 = -1$ なる $H_0 \in Z(\mathfrak{k})$ が存在すると仮定する（このとき (G, K) を **Hermite 対**と呼ぶ）．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ として

$$\mathfrak{p}^{\pm} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{ad}(H_0)X = \pm\sqrt{-1}X\}$$

とおくと，$\mathfrak{p}^{\pm}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Lie 部分環であり $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ となる．

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(H_0)X = 0\}$$

である．そこで $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ なる連結複素 Lie 群 $G_{\mathbb{C}}$ をとり，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^{\pm}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の連結閉部分群をそれぞれ $K_{\mathbb{C}}$, $P^{\pm}$ とすると，$P^{\pm}$ は可換群で

$$\exp : \mathfrak{p}^{\pm} \to P^{\pm}$$

は全射連続群準同型写像である（$\mathfrak{p}^{\pm}$ は加法群）．$[\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^{\pm}] \subset \mathfrak{p}^{\pm}$ だから，$P^+K_{\mathbb{C}}$, $K_{\mathbb{C}}P^-$ は $G_{\mathbb{C}}$ の部分群である．更に

命題 3.1.1 $P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ は $G_{\mathbb{C}}$ の開部分集合で，$P^+ \times K_{\mathbb{C}} \times P^-$ から $G_{\mathbb{C}}$ への写像 $(p, k, q) \mapsto pkq$ は全単射である．

よって $K_{\mathbb{C}}P^-$ は $G_{\mathbb{C}}$ の閉部分群である．ここで連続群準同型写像 $i : G \to G_{\mathbb{C}}$ があって，次を満たすと仮定する；

1) i の微分写像 $d(i) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は自然な包含写像である，
2) $i(G) \subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ かつ $i^{-1}(K_{\mathbb{C}}P^-) = K$.

このとき自然な単射の列

$$G/K \xrightarrow{i} i(G)K_{\mathbb{C}}P^-/K_{\mathbb{C}}P^- \subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-/K_{\mathbb{C}}P^- \to P^+ \xrightarrow{\log} \mathfrak{p}^+$$

$(\log = \exp^{-1})$ により G/K を複素ベクトル空間 $\mathfrak{p}^+$ の部分集合と同一視したものを $\mathcal{D}$ としよう．即ち，$\dot{g} \in \mathcal{D} = G/K$ に対して

$$i(g) = \exp z \cdot k \cdot q \qquad (z \in \mathfrak{p}^+, k \in K_{\mathbb{C}}, q \in P^-)$$

としたとき $\dot{g}=z$ と同一視する．特に $\dot{1}\in\mathcal{D}=G/K$ は $0\in\mathfrak{p}^+$ と同一視される．このとき

$$\dim\mathcal{D}=\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{p}=\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{p}^+$$

だから $\mathcal{D}$ は $\mathfrak{p}^+$ の連結開部分集合となる．さて $g\in G$ と $z\in\mathcal{D}\subset\mathfrak{p}^+$ に対して，$\exp z\in i(G)K_{\mathbb{C}}P^-$ だから $i(g)\exp z\in i(G)K_{\mathbb{C}}P^-$ ，よって

$$i(g)\exp z=\exp g(z)\cdot J(g,z)\cdot q \qquad (g(z)\in\mathcal{D}, J(g,z)\in K_{\mathbb{C}}, q\in P^-)$$

と一意的に書ける．このとき

1) $(g,z)\mapsto g(z)$ により G は $\mathcal{D}$ に推移的に作用し K は $0\in\mathcal{D}$ の固定部分群である，
2) 写像 $J:G\times\mathcal{D}\to K_{\mathbb{C}}$ は実解析的で，$z\in\mathcal{D}$ に関しては正則である．更に任意の $g,h\in G$, $z\in\mathcal{D}$ に対して
$$J(gh,z)=J(g,h(z))J(h,z),$$
3) 任意の $k\in K$ に対して $J(k,0)=i(k)$ であり，$z\in\mathcal{D}\subset\mathfrak{p}^+$ に対して $k(z)=\mathrm{Ad}(i(k))z$ である．

J を**自然な保型因子**と呼ぶ．$K_{\mathbb{C}}$ の有限次元連続複素表現 (δ,V_δ) があれば，$J_\delta(g,z)=\delta(J(g,z))$ とおくことにより，1.2 節の意味の保型因子

$$J_\delta:G\times\mathcal{D}\to GL_{\mathbb{C}}(V)$$

が得られる．ここで更に次のことを仮定してみよう；

> $G_{\mathbb{C}}$ の位相群としての自己同型写像 $g\mapsto\overline{g}$ があって，任意の $X\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に対して $\overline{\exp X}=\exp(\overline{X})$ である（$X\mapsto\overline{X}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ における $\mathfrak{g}$ 上の複素共役である）．

このとき $z,z'\in\mathcal{D}$ に対して，$\exp z\in i(G)K_{\mathbb{C}}P^-$ だから $\overline{\exp z}\in i(G)K_{\mathbb{C}}P^+$, よって $i(G)\subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ より $\overline{\exp z}^{-1}\cdot\exp z'\in P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ となる．そこで

$$\overline{\exp z}^{-1}\cdot\exp z'=p\cdot K(z',z)^{-1}q \qquad (p\in P^+, K(z',z)\in K_{\mathbb{C}}, q\in P^-)$$

と書ける．このとき

1) $g\in G$ に対して $K(g(z'),g(z))=J(g,z')K(z',z)\overline{J(g,z)}^{-1}$,
2) $\overline{K(z',z)}=K(z,z')^{-1}$,
3) 任意の $z\in\mathcal{D}$ に対して $K(0,z)=1$

が成り立つ．さて $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 上の正定値 Hermite 内積が $\langle X,Y\rangle=B_{\mathfrak{g}}(X,\overline{Y})$ により定義され，$k\in K_{\mathbb{C}}$ に対して

$$\langle\mathrm{Ad}(k)X,Y\rangle=\langle X,\mathrm{Ad}(\overline{k})^{-1}Y\rangle \qquad (X,Y\in\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$$

が成り立つ．この内積に関する正規直交基底により $\mathfrak{p}^+$ 上の Lebesgue 測度 $|dz\wedge d\overline{z}|$ が定まる．$K_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{p}^+$ 上の随伴表現を $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}^+}$ と書くことにして

$$K_{\mathrm{Ad}}(z',z)=\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}^+}(K(z',z)),\qquad J_{\mathrm{Ad}}(g,z)=\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}^+}(J(g,z))$$

とおくと，$g\in G$ に対して $d(g(z))\wedge d\overline{g(z)}=|\det J_{\mathrm{Ad}}(g,z)|^2dz\wedge d\overline{z}$ だから

$$d_{\mathcal{D}}(z)=\det K_{\mathrm{Ad}}(z,z)^{-1}\cdot|dz\wedge d\overline{z}|\qquad(z\in\mathcal{D})$$

は $\mathcal{D}$ 上の G-不変測度を与える．

ここで (δ,V_δ) は $K_{\mathbb{C}}$ の連続な既約表現で，付随する K の連続既約表現 $\delta(k)=J_\delta(k,0)$ $(k\in K)$ がユニタリ表現になるように V_δ 上の正定値 Hermite 内積 $(\,,)_\delta$ がとられているとする．即ち，任意の $k\in K_{\mathbb{C}}$ に対して $(\delta(k)u,v)_\delta=(u,\delta(\overline{k})^{-1}v)_\delta$ $(u,v\in V_\delta)$ が成り立つと仮定する．このとき誘導表現 $\pi^\delta=\mathrm{Ind}_K^G\delta$ の表現空間を E_δ としよう．即ち，E_δ は可側関数 $\varphi:G\to V_\delta$ で

1) 任意の $k\in K$ に対して $\varphi(xk)=\delta(k)^{-1}\varphi(x)$,
2) $\displaystyle\int_{G/K}\varphi(x)|_\delta^2d_{G/K}(\dot{x})<\infty$

なるもののなす複素ベクトル空間（を $\displaystyle\int_{G/K}|\varphi(x)|_\delta^2d_{G/K}(\dot{x})=0$ なる φ のなす部分空間で割った商空間）であって，内積

$$(\varphi,\psi)=\int_{G/K}(\varphi(x),\psi(x))_\delta d_{G/K}(\dot{x})$$

に関して複素 Hilbert 空間となり，G の作用は $(\pi^\delta(g)\varphi)(x)=\varphi(g^{-1}x)$ により定義される．G の正則離散系列表現を構成するには，表現空間 E_δ を $\mathcal{D}$ 上の関数の空間として構成することが重要である．その為に $K_\delta(z',z)=\delta(K(z',z))$ $(z,z'\in\mathcal{D})$ とおいて，可側関数 $\varphi:\mathcal{D}\to V_\delta$ で

$$\int_{\mathcal{D}}(K_\delta(z,z)^{-1}\varphi(z),\varphi(z))_\delta d_{\mathcal{D}}(z)<\infty$$

なるもののなす複素ベクトル空間（を積分が 0 なる φ のなす部分空間で割った商空間）を $L^2(\mathcal{D},\delta)$ とおくと，これは

$$(\varphi,\psi)_\delta=\int_{\mathcal{D}}(K_\delta(z,z)^{-1}\varphi(z),\psi(z))_\delta d_{\mathcal{D}}(z)$$

を内積とする複素 Hilbert 空間となる．ここで $\varphi\in L^2(\mathcal{D},\delta)$ に対して関数 $\widehat{\varphi}:G\to V_\delta$ を

$$\widehat{\varphi}(g)=J_\delta(g,0)^{-1}\varphi(g(0))\qquad(g\in G)$$

により定義すると，$\varphi\mapsto\widehat{\varphi}$ は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型 $L^2(\mathcal{D},\delta)\tilde{\to}E_\delta$ を与える．そこで誘導表現 $\pi^\delta=\mathrm{Ind}_K^G\delta$ の作用を，上の同型を通して $L^2(\mathcal{D},\delta)$

に移植すれば，G の $L^2(\mathcal{D},\delta)$ 上のユニタリ表現 π_δ が

$$(\pi_\delta(g)\varphi)(z) = J_\delta(g^{-1},z)^{-1}\varphi(g^{-1}(z)) \qquad (g\in G, \varphi\in L^2(\mathcal{D},\delta))$$

により定義される．ここで $\mathcal{D}$ 上正則なる $\varphi\in L^2(\mathcal{D},\delta)$ のなす部分空間を H_δ とすると

1) H_δ は $L^2(\mathcal{D},\delta)$ の G-不変な閉部分空間である，
2) $E\subset H_\delta$ が G-不変な閉部分空間ならば $E=\{0\}$ 又は $E=H_\delta$ である．

よって $H_\delta\neq\{0\}$ ならば (π_δ, H_δ) は G の既約ユニタリ表現となるから，これを最小の K-タイプ δ の**正則離散系列表現**と呼ぶ．というのは，第一に (π_δ, H_δ) は二乗可積分表現（つまり離散系列表現）である，即ち，任意の $\varphi,\psi\in H_\delta$ に対して

$$\int_G |(\pi_\delta(x)\varphi,\psi)|^2 d_G(x) < \infty$$

である．第二に V_δ に値をとる $\mathcal{D}$ 上の多項式関数全体 $H_{\delta,\mathrm{poly}}$ は H_δ の部分空間（精確には K-有限ベクトルの全体）となるが，$\mathfrak{p}^+$ 上の複素数値多項式関数全体を $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]$ とすれば，V_δ に値をもつ $\mathcal{D}$ 上の多項式関数全体は $V_\delta\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]$ と同一視される．よって $K_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]$ 上の表現 ρ を $(\rho(k)f)(X)=f(\mathrm{Ad}(k)^{-1}X)$ により定義して，n 次多項式のなす部分空間 $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^+]_n$ への制限を ρ_n とすれば，K-加群としての直和分解

$$H_{\delta,\mathrm{poly}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\delta\otimes\rho_n$$

をもつ．ここで $\delta\otimes\rho_0=\delta$ であり，$n>0$ ならば $\delta\otimes\rho_n$ の既約成分に δ と同型な表現は現れない．従って δ は $\pi_\delta|_K$ に重複度 1 で含まれ，π_δ のその他の K-タイプは δ より “大きい”．H_δ の δ-成分 $H_\delta(\delta)$ を V_δ と同一視すれば，π_δ の K-タイプ δ の球関数は

$$\Phi_{\pi_\delta,\delta}(g) = J_\delta(g^{-1},0)^{-1} \qquad (g\in G)$$

である．$H_\delta\neq\{0\}$ となる必要十分条件は次のように与えられる．まず $H_0\in Z(\mathfrak{k})$ の存在から，$\mathfrak{k}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環でもあることがいえる．そこで，$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のルート系を Φ とおくと

$$\Phi\subset\sqrt{-1}\mathfrak{t}^* = \{\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\mathfrak{t}_{\mathbb{C}},\mathbb{C}) \mid \alpha(\mathfrak{k})\subset\sqrt{-1}\mathbb{R}\}$$

である．実ベクトル空間 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ の内積 $(\,,)$ は Φ の Weyl 群に対して不変であるとする．

$$\begin{aligned}\Phi_c &= \{\alpha\in\Phi \mid \alpha(H_0)=0\} = \{\alpha\in\Phi \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C},\alpha}\subset\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\},\\ \Phi_n^{\pm} &= \{\alpha\in\Phi \mid \alpha(H_0)=\pm\sqrt{-1}\} = \{\alpha\in\Phi \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C},\alpha}\subset\mathfrak{p}^{\pm}\}\end{aligned}$$

とおくと ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C},\alpha}$ は $\alpha \in \Phi$ のルート空間)，Φ_c は $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の（半単純部分の）ルート系だから，Φ_c の正のルート系 Φ_c^+ を定めて $\Phi^+ = \Phi_c^+ \cup \Phi_n^+$ が Φ の正のルート系をなすようにしておく．$K_{\mathbb{C}}$ の有限次元既約表現 δ の（微分表現の）Φ_c^+ に関する最高の重みを λ として $\rho = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$ とおくと

$$H_\delta \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; (\lambda+\rho,\alpha) < 0 \text{ for } \forall\alpha \in \Phi_n^+$$

である．

3.2　上の一般論を実斜交群に適用してみよう．後の応用を考えて，実斜交空間 (V, D)（即ち，有限次元実ベクトル空間 V 上の非退化交代形式 D ）をとり，付随する斜交群を

$$G = Sp(V) = \{\sigma \in GL_{\mathbb{R}}(V) \mid D(x\sigma, y\sigma) = D(x,y) \text{ for } \forall x, y \in V\}$$

とおく．ここで $GL_{\mathbb{R}}$ は V に右から作用していることに注意する．実 Lie 群 $Sp(V)$ の Lie 環は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \mid D(xX, y) + D(x, yX) = 0 \text{ for } \forall x, y \in V\}$$

であり，その Killing 形式は

$$B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = (\dim_{\mathbb{R}} V + 2)\mathrm{tr}(XY) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

となり，非退化だから $\mathfrak{g}$ は半単純である．

$$\mathcal{I}_V = \{I \in Sp(V) \mid I^2 = -1_V, D(xI, x) > 0 \text{ for } 0 \neq \forall x \in V\}$$

は空集合ではなくて，$(\sigma, I) \mapsto \sigma I \sigma^{-1}$ により $Sp(V)$ は $\mathcal{I}_V$ に推移的に作用する．$I \in \mathcal{I}_V$ に対して，V 上の複素構造を $\sqrt{-1}x = xI$ $(x \in V)$ により定めた複素ベクトル空間を V_I と書くと

$$\langle x, y\rangle_I = D(xI, y) + \sqrt{-1}D(x,y) \qquad (x, y \in V)$$

は V_I 上の正定値 Hermite 形式を与える．付随するコンパクト・ユニタリ群 $U(V_I, \langle\,,\rangle_I)$ は $Sp(V)$ における $I \in \mathcal{I}_V$ の固定部分群である．

以下，$I_0 \in \mathcal{I}_V$ を一つ固定しておく．$\theta X = I_0 X I_0^{-1}$ $(X \in \mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合を与え，付随する Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とすると，$\mathfrak{k}$ に対応する G の連結閉部分群が $K = U(V_{I_0}, \langle\,,\rangle_{I_0})$ である．$H_0 = -\dfrac{1}{2}I_0 \in Z(\mathfrak{k})$ で $(\mathrm{ad}(H_0)|_{\mathfrak{p}})^2 = -1$ となるから，(G, K) は Hermite 対である．$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とおいて，D を複素双線形に延長して複素斜交空間 $(V_{\mathbb{C}}, D)$ を考える．$G_{\mathbb{C}} = Sp(V_{\mathbb{C}})$ とおいて $i : G \to G_{\mathbb{C}}$ を複素線形延長による自然な包含写像とすると，上で述べた一般論が適用できることを，少し具体的な計算を含めて見てみよう．

$$W^{\pm} = \{x \in V_{\mathbb{C}} \mid xI_0 = \pm\sqrt{-1}x\}$$

とおくと，$V_{\mathbb{C}} = W^- \oplus W^+$ かつ $D(W^-, W^-) = D(W^+, W^+) = 0$ であるから

$$\langle\,,\rangle : W^- \times W^+ \ni (x,y) \mapsto D(x,y) \in \mathbb{C}$$

は非退化な pairing を与える．よって $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ に対して ${}^t b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ が

$$\langle x, y\, {}^t b\rangle = \langle xb, y\rangle \text{ for } \forall x, y \in W^-$$

により定義され，$d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+)$ に対して ${}^t d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-)$ が

$$\langle x\, {}^t d, y\rangle = \langle x, yd\rangle \text{ for } \forall x \in W^-, y \in W^+$$

により定義される．$c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ に対する ${}^t c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-)$ 及び $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-)$ に対する ${}^t a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-)$ も同様に定義する．直和分解 $V_{\mathbb{C}} = W^- \oplus W^+$ に応じて $\sigma \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ll} a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^-), & b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \\ c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-), & d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+) \end{array}$$

と表す．即ち $(x,y)\sigma = (xa + yc, ab + yd)$ $(x \in W^-, y \in W^+)$ とおく．$V_{\mathbb{C}}$ における V 上の複素共役を $x \mapsto \overline{x}$ とおく．部分空間 $W \subset V_{\mathbb{C}}$ と $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V_{\mathbb{C}})$ に対して $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{W}, V_{\mathbb{C}})$ を $\overline{f}(x) = \overline{f(\overline{x})}$ $(x \in \overline{W})$ により定義する．特に $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ に対して $\overline{f} = \begin{pmatrix} \overline{d} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ である．よって

$$Sp(V) = \{\sigma \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \mid \overline{\sigma} = \sigma\} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{d} & \overline{c} \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \right\}$$

である．

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \right\},$$
$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) \right\},$$
$$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} -{}^t d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+) \right\},$$

但し

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) = \{b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \mid {}^t b = b\},$$
$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) = \{c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) \mid {}^t c = c\}$$

である．よって

$$P^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \right\},$$
$$P^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^+, W^-) \right\}$$

となり，$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の連結閉部分群は

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+) \right\}$$

である．$x \mapsto \dfrac{1}{2}(x - xI_0 \otimes \sqrt{-1})$ は複素ベクトル空間の同型 $V_{I_0} \tilde{\to} W^+$ を与え，これにより V_{I_0} 上の Hermite 形式 $\langle\,,\rangle_{I_0}$ を W^+ じょうで見ると

$$\langle x, y \rangle_{I_0} = 2\sqrt{-1} D(x, \overline{y}) = -2\sqrt{-1} \langle \overline{y}, x \rangle \qquad (x, y \in W^+)$$

となるから

$$K = K_{\mathbb{C}} \cap Sp(V) = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, d \in U(W^+, \langle\,,\rangle_{I_0}) \right\}$$

となる．

$$P^+ K_{\mathbb{C}} P^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V_{\mathbb{C}}) \,\middle|\, d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+) \right\}$$

となり，これは $G_{\mathbb{C}} = Sp(V_{\mathbb{C}})$ の開部分集合で $G = Sp(V)$ を含み $G \cap K_{\mathbb{C}} P^- = K$ である．そこで 3.1 節の一般論を適用して $\mathcal{I}_V = G/K$ を $\mathfrak{p}^+$ の開部分集合と同一視したものを $\mathcal{D}_V$ とおく．$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}^+$ と $b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ を同一視して，$\mathcal{D}_V \subset \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ としよう．直接計算して $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(V)$ と $z \in \mathcal{D}_V \subset \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ に対して

$$\sigma(z) = (az + b)(cz + d)^{-1} \in \mathcal{D}_V, \quad J(\sigma, z) = \begin{pmatrix} {}^t(cz + d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz + d \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}}$$

となることがわかる．ここから

$$\mathcal{D}_V = \{ z \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \mid 1_{W^+} - \overline{z} \cdot z \in \mathrm{Her}^+(W^+) \}$$

であることがわかる．ここで

$$\mathrm{Her}(W^+) = \{ T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^+) \mid \langle xT, y \rangle_{I_0} = \langle x, yT \rangle_{I_0} \text{ for } \forall x, y \in W^+ \},$$
$$\mathrm{Her}^+(W^)) = \{ T \in \mathrm{Her}(W^+) \mid \langle xT, x \rangle_{I_0} > 0 \text{ for } 0 \neq \forall x \in W^+ \}$$

とおいた．更に

$$K(z',z)=\begin{pmatrix}1-z'\overline{z} & 0\\ 0 & (1-\overline{z}z')^{-1}\end{pmatrix}\qquad (z,z'\in\mathcal{D}_V\subset \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-,W^+))$$

となる．さて斜交空間 (V,D) の**偏極** [2] $V=W'\oplus W$ を一つ定めておく．$\sigma\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ を直和分解 $V_{\mathbb{C}}=W'_{\mathbb{C}}\oplus W_{\mathbb{C}}$ に応じて

$$\sigma=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\qquad (a\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}),b\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})\text{ etc.})$$

と書くことにする．又，非退化な pairing

$$\langle\,,\rangle: W'\times W\ni(x,y)\mapsto D(x,y)\in\mathbb{R}$$

を用いて，例えば $b\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W',W)$ に対して ${}^tb\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W',W)$ を $\langle x\,{}^tb,y\rangle=\langle x,yb\rangle$ $(\forall x,y\in W')$ により定義し，$d\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$ に対して ${}^td\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W')$ を $\langle x\,{}^td,y\rangle=\langle x,yd\rangle$ $(\forall x\in W',y\in W)$ により定義する．さて $W^-\rho=W'_{\mathbb{C}}$ かつ $W^+\rho=W_{\mathbb{C}}$ なる $\rho\in Sp(V_{\mathbb{C}})$ が存在するから，それを一つ固定しておく．$\widehat{\mathfrak{p}}^{\pm}=\mathrm{Ad}(\rho^{-1})\mathfrak{p}^{\pm}$ とおくと

$$\widehat{\mathfrak{p}}^+=\left\{\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}\;\middle|\; b\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})\right\},$$
$$\widehat{\mathfrak{p}}^-=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix}\;\middle|\; c\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}},W'_{\mathbb{C}})\right\}$$

となる．そこで

$$\widehat{P}^+=\rho^{-1}P^+\rho,\qquad \widehat{P}^-=\rho^{-1}P^-\rho,\qquad \widehat{K}_{\mathbb{C}}=\rho^{-1}K_{\mathbb{C}}\rho$$

とおくと，$X\mapsto\exp X$ は $\widehat{\mathfrak{p}}^+=\mathrm{Ad}(\rho)\mathfrak{p}^+$ から $\widehat{P}^+$ への全単射で

$$\widehat{K}_{\mathbb{C}}=\left\{\begin{bmatrix}{}^td^{-1} & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}\;\middle|\; d\in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})\right\},$$
$$\widehat{P}^+=\left\{\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\;\middle|\; b\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W'_{\mathbb{C}},W_{\mathbb{C}})\right\},$$
$$\widehat{P}^+\widehat{K}_{\mathbb{C}}\widehat{P}^-=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in Sp(V_{\mathbb{C}})\;\middle|\; d\in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})\right\}$$

[2]任意の $x,y\in W$ に対して $D(x,y)=0$ なる部分空間 $W\subset V$ で次元が最大のものを V の Lagrange 部分空間と呼ぶ．$W\subset V$ が Lagrange 部分空間ならば $\dim_{\mathbb{R}}W=\dfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}V$ であり，V の Lagrange 部分空間全体に $Sp(V)$ は推移的に作用する．Lagrange 部分空間 $W,W'\subset V$ に対して $V=W'\oplus W$ となるとき，これを斜交空間 (V,D) の偏極と呼ぶ．このとき Lagrange 部分空間の対 (W,W') に $\sigma\in Sp(V)$ は $(W,W')\cdot\sigma=(W\sigma,W'\sigma)$ により推移的に作用する．

となる．ここで $\rho Sp(V) \subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-$ が言えるから $Sp(V)\rho \subset \widehat{P}^+\widehat{K}_{\mathbb{C}}\widehat{P}^-$ となる．そこで $z \in \mathcal{D}_V \subset \mathfrak{p}^+$ に対して $\exp z \in Sp(V)K_{\mathbb{C}}P^-$ だから，

$$\exp z \cdot \rho \in Sp(V)\widehat{K}_{\mathbb{C}}\widehat{P}^- \subset \widehat{P}^+\widehat{K}_{\mathbb{C}}\widehat{P}^-$$

となる．よって $\exp z \cdot \rho = \exp \widehat{z} \cdot k \cdot q$ $(\widehat{z} \in \widehat{\mathfrak{p}}^+, k \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}, q \in \widehat{P}^-)$ とおいて

$$\mathfrak{H}_V = \{\widehat{z} \in \widehat{\mathfrak{p}}^+ \mid z \in \mathcal{D}_V\} \subset \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})\}$$

とおく．但し $b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ と $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \widehat{\mathfrak{p}}^+$ を同一視している．$z \mapsto \widehat{z}$ を ρ に関する **Cayley 変換**と呼ぶ．$\sigma \in Sp(V)$ と $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して，$\exp z \in Sp(V)\widehat{K}_{\mathbb{C}}\widehat{P}^-$ だから

$$\sigma \exp z = \exp \sigma(z) \cdot J(\sigma, z) \cdot q \qquad (\sigma(z) \in \mathfrak{H}_V, J(\sigma, z) \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}, q \in \widehat{P}^-)$$

と書けて，$(\sigma, z) \mapsto \sigma(z)$ により $Sp(V)$ は $\mathfrak{H}_V$ に作用する．具体的に計算すれば $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V)$ に対して

$$\sigma(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}, \qquad J(\sigma, z) = \begin{bmatrix} {}^t(cz+d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz+d \end{bmatrix}$$

となり

$$\mathfrak{H}_V = \{z \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Im}\, z \in \mathrm{Sym}^+_{\mathbb{R}}(W', W)\}$$

であり，更に $Sp(V)$ の $\mathfrak{H}_V$ への作用は推移的であることがわかる．但し

$$\mathrm{Sym}^+_{\mathbb{R}}(W', W) = \{T \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W) \mid \langle x, xT \rangle > 0 \text{ for } 0 \neq \forall x \in W'\}$$

とする．$z \in \mathfrak{H}_V$ に対して $W_{\mathbb{C}}$ 上の正定値 Hermite 形式が

$$\langle v, w \rangle_z = D(v(\mathrm{Im}\, z)^{-1}, \overline{w}) \qquad (v, w \in W_{\mathbb{C}})$$

により定義され，付随するユニタリ群と $z \in \mathfrak{H}_V$ の固定部分群が同型となる；

$$\{\sigma \in Sp(V) \mid \sigma(z) = z\} \tilde{\to} U(W_{\mathbb{C}}, \langle\,,\rangle_z) \qquad (\sigma \mapsto J(\sigma, z)|_{W_{\mathbb{C}}}).$$

特に $K = \{\sigma \in Sp(V) \mid \sigma(\widehat{0}) = \widehat{0}\}$ である．

3.3 　古典的な Siegel モジュラー形式について簡単に復習しておく．詳細は [5] を参照.

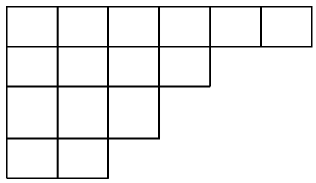
$\mathbb{Q}$ 上の斜交空間 $(V_{\mathbb{Q}}, D)$ とその偏極 $V_{\mathbb{Q}} = W'_{\mathbb{Q}} \oplus W_{\mathbb{Q}}$ があって，$V = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, W' = W'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, W = W_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ であるとする．部分群 $\Gamma \subset Sp(V_{\mathbb{Q}})$ は**数論的部分群**とする．即ち，$V_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda \subset V_{\mathbb{Q}}$ があって Γ は

$$Sp(\Lambda) = \{\sigma \in Sp(V_{\mathbb{Q}}) \mid \Lambda\sigma = \Lambda\}$$

と**通約的**[3]であるとする．$\dim_{\mathbb{R}} V > 2$ ならば，十分大きな $0 < N \in \mathbb{Z}$ に対して

$$Sp(\Lambda, N) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid x\gamma \equiv x \pmod{N \cdot \Lambda} \text{ for } \forall x \in \Lambda\}$$

は Γ に含まれるから，$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ の場合にもこれを仮定しよう．(ρ, V_ρ) を Γ に有限次元ユニタリ表現として $\operatorname{Ker}\rho$ は Γ の指数有限の部分群であると仮定する．$\begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}$ と $d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ を同一視して，(δ, V_δ) を $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現で Young 図形



m_1 個の正方形
m_2 個の正方形
$\vdots$
m_n 個の正方形

に対応しているとして，$m_n > 0$ と仮定する．$J_\delta(\sigma, z) = \delta(J(\sigma, z))$ $(\sigma \in Sp(V), z \in \mathfrak{H}_V)$ とおいて，$k \mapsto J_\delta(k, \widehat{0})$ が K の既約ユニタリ表現となるように V_δ 上の Hermite 内積を定める[4]．表現空間 V_ρ, V_δ における Hermite 内積をそれぞれ $(\,,)_\rho, (\,,)_\delta$ とすると，任意の $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ に対して

$$(Tu, v)_\delta = (u, T^* v)_\rho \text{ for } \forall u, \in V_\rho, v \in V_\delta$$

なる $T^* \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\delta, V_\rho)$ が唯一定まるから，複素ベクトル空間 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$ における Hermite 内積を $(S, T)_{\rho,\delta} = \operatorname{tr}(S \circ T^*)$ により定義する．さて正則関数

$$F : \mathfrak{H}_V \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\rho, V_\delta)$$

であって

1) 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $F(\gamma z) = J_\delta(\gamma, z) \circ F(z) \circ \rho(\gamma)^{-1}$,
2) 任意の $\sigma \in Sp(V_{\mathbb{Q}})$ と任意の $y_0 \in \operatorname{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$ に対して $|F^\sigma(z)|$ は $\{z \in \mathfrak{H}_V \mid \operatorname{Im} z \geq y_0\}$ で有界

の二条件が成り立つとき，F を Γ に関して表現 ρ をもった重さ δ の（或いは簡単に (δ, ρ)-型の）**Siegel モジュラー形式**と呼ぶ．ここで $J_\delta(\sigma, z) = \delta(J(\sigma, z))$

[3]群 G の部分群 A, B に対して，群指数が $(A : A \cap B) < \infty$ かつ $(B : A \cap B) < \infty$ であるとき，A と B は通約的であるという．

[4]$k = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K$ に対して $\operatorname{Im}\widehat{0} = \operatorname{Im} k(\widehat{0}) = {}^t\overline{(c\widehat{0} + d)}^{-1} \operatorname{Im}\widehat{0} \cdot (c\widehat{0} + d)^{-1}$ より

$$\delta(c\widehat{0} + d)^* = \delta((c\widehat{0} + d)^{-1}) = \delta((\operatorname{Im}\widehat{0})^{-1}\, {}^t\overline{(c\widehat{0} + d)} \cdot \operatorname{Im}\widehat{0})$$

となるから，V_δ の Hermite 内積は

$$\delta(d)^* = \delta((\operatorname{Im}\widehat{0})^{-1}\, {}^t\overline{d} \cdot \operatorname{Im}\widehat{0}) \quad \forall d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$$

となるようにとればよい．

$(\sigma \in Sp(V), z \in \mathfrak{H}_V)$ とおき

$$F^{\sigma}(z) = J_{\delta}(\sigma, z)^{-1} \circ F(\sigma z) \qquad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

とおく．よく知られているように，上の条件 2) は $\dim_{\mathbb{R}} V > 2$ のときには条件 1) から自動的に成り立つ（**Koecher の定理**）．(δ, ρ)-型の Siegel モジュラー形式 F に付随する $Sp(V)$ 上の関数

$$f_F(\sigma) = J_{\delta}(\sigma, \widehat{0})^{-1} \circ F(\sigma(\widehat{0})) \qquad (\sigma \in Sp(V))$$

が $Sp(V)$ 上の有界関数であるとき，F を Γ に関する (δ, ρ)-型の **Siegel 尖点形式**と呼ぶ．$z = \sigma(\widehat{0}) \in \mathfrak{H}_V$ $(\sigma \in Sp(V))$ に対して

$$|f_F(\sigma)|^2 = (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z) \circ F(z), F(z))_{\rho,\delta}$$

となる．F が尖点形式ならば，このとき任意の実数 $p > 0$ に対して

$$\int_{\Gamma \backslash Sp(V)} |f(\sigma)|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

である．次の定理は Satake [13] による；

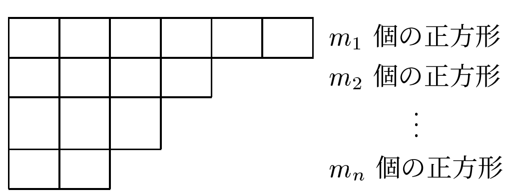
定理 3.3.1 実数 $p > 0$ に対して $pm_n \geq 2n$ とする．このとき Γ に関する (δ, ρ)-型の Siegel モジュラー形式 F に対して

$$\int_{\Gamma \backslash Sp(V)} |f_F(\sigma)|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

ならば F は尖点形式である．

Γ に関する (δ, ρ)-型の尖点形式の全体を $S_{\delta}(\Gamma, \rho)$ と書く．

さて 2.4 節の一般論を実斜交群に適用して，Siegel 尖点形式を表現論的にとらえてみよう．同型 $K_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \widehat{K}_{\mathbb{C}}$ $(k \mapsto \rho k \rho^{-1})$ により $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現 (δ, V_{δ}) を $K_{\mathbb{C}}$ の有限次元既約表現とみなしておく．従って $\begin{pmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}}$ と $d \in GL_{\mathbb{C}}(W^+)$ を同一視すれば，δ は $GL_{\mathbb{C}}(W^+)$ の有限次元既約表現で Young 図形



に対応するものである．このとき最小の K-タイプ δ の正則離散系列表現が定義される（即ち $H_{\delta} \neq \{0\}$ となる）必要十分条件は $m_n > n$ なることである．このとき Satake の定理（定理 3.3.1）に注意すると，次の定理が示される；

定理 3.3.2 $m_n > n$ のとき，最小の K-タイプ δ の正則離散系列表現 (π_δ, H_δ) に対して，$F \mapsto f_F$ は複素ベクトル空間の同型 $S_\delta(\Gamma,\rho) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_\delta(\Gamma\backslash Sp(V),\rho,\pi_\delta)$ を与える．

第 II 部

重さ半整数の Siegel モジュラー形式

4 Weil 表現

4.1 以下

$$\mathbb{Q}_p = \begin{cases} \text{実数体 } \mathbb{R} & : p = \infty, \\ p\text{-進数体 } \mathbb{Q}_p & : p < \infty \end{cases}, \quad \mathbb{Z}_p = \begin{cases} \text{有理整数環 } \mathbb{Z} & : p = \infty, \\ p\text{-進整数環 } \mathbb{Z}_p & : p < \infty \end{cases}$$

とする．局所コンパクト加法群 $\mathbb{Q}_p$ 上の Haar 測度 dt は

$$\begin{cases} \mathrm{vol}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 1 & : p = \infty, \\ \mathrm{vol}(\mathbb{Z}_p) = 1 & : p < \infty \end{cases}$$

と正規化しておく．加法群 $\mathbb{Q}_p$ の自明でないユニタリ指標 χ を一つ固定しておく．

(V,D) を $\mathbb{Q}_p$ 上の斜交空間とする．局所コンパクト加法群 V 上の Haar 測度 $d_V(x)$ は $(x,y) \mapsto \chi(D(x,y))$ に関して自己双対的であるとする．即ち V 上の Fourier 変換と逆変換が

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x)\chi(-D(x,y))d_V(x), \qquad \varphi(x) = \int_V \widehat{\varphi}(y)\chi(D(x,y))d_V(y)$$

を満たすとする．$H(V) = V \times \mathbb{Q}_p$ は群演算

$$(x,s)\cdot(y,t) = (x+y, s+t+2^{-1}D(x,y))$$

により局所コンパクト群となる．これを斜交空間 (V,D) に付随する **Heisenberg 群** と呼ぶ．$H(V)$ の中心 $Z(H(V)) = \{(0,t) \mid t \in \mathbb{Q}_p\}$ は同一視 $(0,t) = t$ により加法群 $\mathbb{Q}_p$ と同一視しておく．$d_{H(V)}(x,t) = d_V(x)dt$ は $H(V)$ の Haar 測度となり，$H(V)$ はユニモジュラーである．

斜交空間 (V,D) の Lagrange 部分空間 $W \subset V$ をとり，$H(V)$ の閉部分群 $W \times \mathbb{Q}_p$ のユニタリ指標 $\chi_W(y,t) = \chi(t)$ $(t \in \mathbb{Q}_p)$ から誘導された $H(V)$ のユニタリ表現 $(\pi_W^\chi, H_W^\chi) = \mathrm{Ind}_{W\times\mathbb{Q}_p}^{H(V)}\chi_W$ を考えよう．その表現空間 H_W^χ は

1) 任意の $g \in W \times \mathbb{Q}_p$ に対して $\varphi(gh) = \chi_W(g)\varphi(h)$,
2) $\displaystyle\int_{(W\times\mathbb{Q}_p)\backslash H(V)} |\varphi(h)|^2 d\dot{h} < \infty$

なる可測関数 $\varphi : H(V) \to \mathbb{C}$ 全体を内積

$$(\varphi, \psi) = \int_{W \times \mathbb{Q}_p \backslash H(V)} \varphi(h) \overline{\psi(h)} d\dot{h}$$

により複素 Hilbert 空間としたものであり，$H(V)$ の作用は $(\pi_W^\chi(h)\varphi)(g) = \varphi(gh)$ により定義される．ここで W の Haar 測度 $d_W(x)$ を一つ定めて，$(W \times \mathbb{Q}_p \backslash H(V)$ 上の右 $H(V)$-不変測度 $d\dot{g}$ を

$$\int_{H(V)} \varphi(h) d_{H(V)}(h) = \int_{(W \times \mathbb{Q}_p) \backslash H(V)} d\dot{g} \int_{W \times \mathbb{Q}_p} d_W(x) dt \varphi((x,t)h)$$

$(\varphi \in C_c(H(V)))$ となるように定める．大切なことは次の二つの定理である；

定理 4.1.1 (π_W^χ, H_W^χ) は Heisenberg 群 $H(V)$ の既約ユニタリ表現である．

定理 4.1.2 π が $H(V)$ のユニタリ表現であって，任意の $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V))$ に対して $\pi(t) = \chi(t)$ ならば，複素 Hilbert 空間 E 上の $H(V)$ の自明なユニタリ表現 $\mathbf{1}_E$ があって，π はユニタリ表現のテンソル積 $\mathbf{1}_E \otimes \pi_W^\chi$ とユニタリ同値である．

定理 4.1.2 から直ちに次の系が得られる；

系 4.1.3 π が $H(V)$ に既約ユニタリ表現で，任意の $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V))$ に対して $\pi(t) = \chi(t)$ ならば，π は π_W^χ とユニタリ同値である．

V の二つの Lagrange 部分空間 $W, W' \subset V$ に対して，系 4.1.3 から，(π_W^χ, H_W^χ) と $(\pi_{W'}^\chi, H_{W'}^\chi)$ は $H(V)$ のユニタリ表現としてユニタリ同値だから，その間のユニタリ同値写像を具体的に構成してみよう．まず，$W \cap W'$ 上の Haar 測度 $d_{W \cap W'}$ を一つとると，$W/(W \cap W')$ と $W'/(W \cap W')$ 上の Haar 測度

$$d_{W/(E \cap W')} = d_W / d_{W \cap W'}, \qquad d_{W'/(W \cap W')} = d_{W'} / d_{W \cap W'}$$

が定まる[5]．更に $W'/(W \cap W')$ の双対空間 $(W'/(W \cap W'))^*$ 上の Haar 測度 $d_{(W'/(W \cap W'))^*}$ として $d_{W'/(W \cap W')}$ の双対測度をとる．そこで $\mathbb{Q}_p$-線形同型写像

$$g_{W,W'} : W/(W \cap W') \tilde{\to} (W'/(W \cap W'))^*$$

を $\langle \dot{w}', g_{W,W'}(\dot{w}) \rangle = D(w, w')$ により定義して，$0 < |g_{W,W'}| \in \mathbb{R}$ を

$$d_{(W'/(W \cap W')}(g_{W,W'}(\dot{w})) = |g_{W,W'}| \cdot d_{W/(W \cap W')}(w)$$

[5]一般に局所コンパクト・ユニモジュラー群 G の閉部分群 H に対して，G, H 上の Haar 測度 $d_G(g), d_H(h)$ をとると，G/H 上の左 G-不変測度 $d_{G/H}(\dot{g})$ を

$$\int_G \varphi(g) d_(g) = \int_{G/H} d_{G/H}(\dot{g}) \int_H d_H(h) \varphi(gh) \qquad (\varphi \in C_c(G))$$

が成り立つように定めることかできる．このとき $d_{G/H} = d_G / d_h$ と書くことにする．

により定義すると，$|g_{W,W'}|^{1/2}d_{W'/(W\cap W')}$ は $W\cap W'$ 上の Haar 測度 $d_{W\cap W'}$ の選択に依存しなくなる．このときユニタリ写像 $T^{\chi}_{W',W}: H^{\chi}_{W}\to H^{\chi}_{W'}$ が

$$(T^{\chi}_{W',W}\varphi)(h)=\int_{W'/(W\cap W')}\varphi((w',0)h)\cdot|g_{W,W'}|^{1/2}d_{W'/(W\cap W')}(\dot{w}')$$

$(\varphi\in H^{\chi}_{W,c})$ により定義される．ここで $H^{\chi}_{W,c}$ は連続関数 $\varphi: H(V)\to\mathbb{C}$ で

1) 任意の $g\in W\times\mathbb{Q}_p$ に対して $\varphi(gh)=\chi_W(g)\varphi(h)$,
2) $\dot{h}\mapsto|\varphi(h)|$ は $W\times\mathbb{Q}_p\backslash H(V)$ 上のコンパクト台関数

なるもの全体からなる H^{χ}_{W} の稠密な部分空間である．このとき

1) $T^{\chi}_{W',W}\circ T^{\chi}_{W,W'}=T^{\chi}_{W,W}=id$,
2) 任意の $h\in H(V)$ に対して $T^{\chi}_{W',W}\circ\pi^{\chi}_{W}(h)=\pi^{\chi}_{W'}\circ T^{\chi}_{W',W}$

が成り立つ[6]．

4.2 　有限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間 X の双対空間を X^* として，$x\in X,\alpha\in X^*$ に対して $\langle x,\alpha\rangle=\alpha(x)$ とおくと，$V_X=X\times X^*$ は $D_X((x,\alpha),(y,\beta))=\langle x,\beta\rangle-\langle y,\alpha\rangle$ に関して斜交空間となる．ここで自然に $X,X^*\subset V_X$ を部分空間とみなせば，これらは斜交空間 (V_X,D_X) の Lagrange 部分空間である．直和分解 $V=X\times X^*$ に関する $\sigma\in\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(V_X)$ のブロック分表示を $\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とする．Q を X 上の二次形式とする．即ち，関数 $Q: X\to\mathbb{Q}_p$ は

1) $\lambda\in\mathbb{Q}_p,x\in X$ に対して $Q(\lambda x)=\lambda^2Q(x)$,
2) $(x,y)\mapsto Q(x,y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ $(x,y\in X)$ は $\mathbb{Q}_p$-双線形形式

を満たすとする．そこで $\widetilde{Q}\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(X,X^*)$ を

$$\langle x,y\widetilde{Q}\rangle=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\qquad(x,y\in W)$$

により定めて $\sigma=\begin{pmatrix}1&\widetilde{Q}\\0&1\end{pmatrix}\in Sp(V_X)$ とおくと，$W_Q=X\sigma\subset V_X$ は Lagrange 部分空間となる．このとき $T^{\chi}_{X,W_Q}\circ T^{\chi}_{W_Q,X^*}$ と T^{χ}_{X,X^*} は共に $(\pi^{\chi}_{X^*},H^{\chi}_{X^*})$ から $(\pi^{\chi}_{X},H^{\chi}_{X})$ へのユニタリ同値写像となるから

$$T^{\chi}_{X,W_Q}\circ T^{\chi}_{W_Q,X^*}=\gamma_\chi(Q)\cdot T^{\chi}_{X,X^*}$$

なる $\gamma_\chi(Q)\in\mathbb{C}^1$ が定まる．これを二次形式 Q の **Weil 定数** と呼ぶ．X 上の二次形式 Q に対して

$$\mathrm{rad}(Q)=\{x\in X\mid\langle x,y\widetilde{Q}\rangle=0\text{ for }\forall y\in X\}$$

[6] $T^{\chi}_{W,W'}$ の性質と次の 4.2 節については [11] を参照のこと．

とおくと，$X/\mathrm{rad}(Q)$ 上の正則な二次形式 $Q^{\mathrm{reg}}(\dot{x}) = Q(x)$ が定まる．このとき $\gamma_\chi(Q) = \gamma_\chi(Q^{\mathrm{reg}})$ である．又，$Q \mapsto \gamma_\chi(Q)$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt 群 $W_{\mathbb{Q}_p}$ から乗法群 $\mathbb{C}^1$ への群準同型写像である．

さて $\mathbb{Q}_p$ 上の斜交空間 (V, D) をとる．三つの Lagrange 部分空間 $W_i \subset V$ $(i = 1, 2, 3)$ に対して $W_1 \times W_2 \times W_3$ 上の二次形式 Q_{W_1,W_2,W_3} が

$$Q_{W_1,W_2,W_3}(w_1, w_2, w_3) = D(w_1, w_2)+D(w_2, w_3)+D(w_3, w_1) \qquad (w_i \in W_i)$$

により定義される．このとき

$$\mathrm{rad}(Q_{W_1,W_2,W_3}) = \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_1-w_2 \in W_3, w_2-w_3 \in W_1, w_3-w_1 \in W_2\}$$

であり，$(1, 2, 3)$ の並べ替え (i_1, i_2, i_3) に対して

$$Q_{W_{i_1},W_{i_2},W_{i_3}} = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \cdot Q_{W_1,W_2,W_3}$$

が成り立つ．更に次の定理が基本的である；

定理 4.2.1 Lagrange 部分空間 $W_i \subset V$ $(i = 1, 2, 3)$ に対して

$$T^\chi_{W_1,W_2} \circ T^\chi_{W_2,W_3} \circ T^\chi_{W_3,W_1} = \gamma_\chi(Q_{W_1,W_2,W_3}) \cdot id.$$

4.3 $\mathbb{Q}_p$ 上の斜交空間 (V, D) の偏極 $V = W' \oplus W$ をとり，$x \in W', y \in W$ に対して $\langle x, y\rangle = D(x, y)$ とおく．局所コンパクト加法群 W', W 上の Haar 測度 $d_{W'}(x), d_W(y)$ は $(x, y) \mapsto \chi(\langle x, y\rangle)$ に関して自己双対的であるとする．即ち W' 上の Fourier 変換と逆変換が

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_{W'} \varphi(x)\chi(-\langle x, y\rangle)d_{W'}(x), \qquad \varphi(x) = \int_W \widehat{\varphi}(y)\chi(\langle x, y\rangle)d_W(y)$$

を満たすとする．このとき $d_V(x, y) = d_{W'}(x)d_W(y)$ である．$\varphi \in L^2(W')$ に対して

$$\widetilde{\varphi}(g) = \chi\left(\nu \cdot (t + 2^{-1}\langle x, y\rangle)\right) \cdot \varphi(x) \qquad (g = ((x, y), t) \in H(V))$$

とおくと，$\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ は $L^2(W')$ から H^χ_W へのユニタリ同型写像となる．そこで誘導表現 $\mathrm{Ind}^{H(V)}_{W\times\mathbb{Q}_p}\chi_W$ を $L^2(W')$ 上に実現したものを Π_χ と書くと，その作用は $(h = ((x, y), t) \in H(V)$ と $\varphi \in L^2(W')$ に対して

$$(\Pi_\chi(h)\varphi)(w') = \chi\left(t + \langle w', y\rangle + 2^{-1}\langle x, y\rangle\right) \cdot \varphi(w' + x) \quad (w' \in W')$$

となる．$H(V)$ のユニタリ表現 $(\Pi_\chi, L^2(W'))$ を **Schrödinger 表現**と呼ぶ．同様に $H(V)$ の閉部分群 $W' \times \mathbb{Q}_p$ のユニタリ指標 $\overline{\chi}_{W'}(x, t) = \chi(t)^{-1}$ から誘導された $H(V)$ の誘導表現 $\mathrm{Ind}^{H(V)}_{W'\times\mathbb{Q}_p}\overline{\chi}_{W'}$ を $L^2(W)$ 上に実現したものを $\check{\Pi}_\chi$ とおくと，その作用は $h = ((x, y), t) \in H(V)$ と $\varphi \in L^2(W)$ に対して

$$(\check{\Pi}_\chi(h)\varphi)(w) = \chi\left(-t - \langle x, w\rangle + 2^{-1}\langle x, y\rangle\right) \cdot \varphi(w - y)$$

となる．$\check{\Pi}_\chi$ は Π_χ の反傾表現である．実際，複素双線形形式

$$\langle\,,\rangle_\chi : L^2(W') \times L^2(W) \to \mathbb{C}$$

を $\varphi \in L^2(W') \cap L^1(W')$, $\psi \in L^2(W) \cap L^1(W)$ に対して

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\chi = \int_{W'} d_{W'}(w') \int_W d_W(w) \varphi(w') \psi(w) \chi(\langle w', w \rangle)$$

により定めると，任意の $h \in H(V)$, $\varphi \in L^2(W')$, $\psi \in L^2(W)$ に対して

$$\langle \Pi_\chi(h)\varphi, \psi \rangle_\chi = \langle \varphi, \check{\Pi}_\chi(h^{-1})\psi \rangle_\chi$$

が成り立つ．反傾表現 $(\check{\Pi}_\chi, L^2(W))$ も Schrödinger 表現と呼ぼう．

さて $\sigma \in Sp(V)$ は $h = (x,t) \in H(V)$ に $h^\sigma = (x\sigma, t)$ により右から作用していて，$h \mapsto h^\sigma$ は $H(V)$ の自己同型写像である．そこで $\sigma \in Sp(V)$ に対して $\Pi_\chi^\sigma(h) = \Pi_\chi(h^\sigma)$ $(h \in H(V))$ とおくと，$(\Pi_\chi^\sigma, L^2(W'))$ は $H(V)$ の既約ユニタリ表現で，任意の $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V))$ に対して $\Pi_\chi^\sigma(t) = \chi(t)$ となる．よって系 4.1.3 より Π_χ^σ は Π_χ とユニタリ同値となり，任意の $h \in H(V)$ に対して

$$T^{-1} \circ \Pi_\chi(h) \circ T = \Pi_\chi(h^\sigma)$$

となる $T \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ が存在する．ここで $\mathrm{Aut}(L^2(W'))$ の位相として，任意の $\varphi \in L^2(W')$ に対して $T \mapsto T\varphi$ が連続となる最弱の位相を与えると，$\mathrm{Aut}(L^2(W'))$ は Hausdorff 位相群となる．そこで直積群 $Sp(V) \times \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ の閉部分群

$$Mp(V) = \{(\sigma, T) \mid T^{-1} \circ \Pi_\chi(h) \circ T = \Pi_\chi(h^\sigma) \text{ for } \forall h \in H(V)\}$$

を考えると

$$\varpi : Mp(V) \to Sp(V) \qquad ((\sigma, T) \mapsto \sigma)$$

は $Mp(V)$ から $Sp(V)$ への全射連続群準同型写像であり，その核は定数倍写像という意味で $\mathbb{C}^1$ である．$Mp(V)$ の元を幾つか作ってみよう．まず $a \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')$ に対して $\mathrm{d}(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{bmatrix} \in Sp(V)$ であり，$\mathbf{d}_0(a) \in \mathrm{Aut}(L^2(W')$ を

$$(\mathbf{d}_0(a)\varphi)(w') = |\det a|^{1/2} \varphi(w'a) \qquad (\varphi \in L^2(W'), w' \in W')$$

により定義すると $\mathbf{d}(a) = (\mathrm{d}(a), \mathbf{d}_0(a)) \in Mp(V)$ であり

$$\mathbf{d} : GL_{\mathbb{Q}_p}(W') \to Mp(V)$$

は連続群準同型写像である．又，$b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(W', W)$ に対して $\mathrm{t}(b) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Sp(V)$ で，$\mathbf{t}_0(b) \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ を

$$(\mathbf{t}_0(b)\varphi)(w') = \chi(2^{-1}\langle w', w'b \rangle) \cdot \varphi(w') \qquad (\varphi \in L^2(W'), w' \in W')$$

により定義すると $\mathbf{t}(b) = (\mathrm{t}(b), \mathbf{t}_0(b)) \in Mp(V)$ であり

$$\mathbf{t} : \mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p}(W', W) \to Mp(V)$$

は連続群準同型写像である．又，$\mathbb{R}$-線形同型写像 $c : W \tilde{\to} W'$ に対して $\mathrm{d}'(c) = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t c^{-1} \\ c & 0 \end{bmatrix} \in Sp(V)$ で，$\mathbf{d}'_0(c) \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ を

$$(\mathbf{d}'_0\varphi)(w') = |c|^{-1/2}\widehat{\varphi}(w'\,{}^t c^{-1}) \qquad (\varphi \in L^2(W')), w' \in W^{|prime})$$

により定義すると，$\mathbf{d}'(c) = (\mathrm{d}'(c), \mathbf{d}'_0(c)) \in Mp(V)$ である．ここで $d_{W'}(wc) = |c| d_W(w)$ により $0 < |c| \in \mathbb{R}$ を定義する．$c \mapsto \mathbf{d}'(c)$ は連続写像である．更に

$$\Omega(V) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V) \;\middle|\; c : W \tilde{\to} W' : \text{線形同型} \right\}$$

とおいて，$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Omega(V)$ ならば $\sigma = \mathrm{t}(ac^{-1})\mathrm{d}'(c)\mathrm{t}(c^{-1}d)$ であることに注意して，

$$\mathbf{r}_0(\sigma) = \mathbf{t}_0(ac^{-1}) \circ \mathbf{d}'_0(c) \circ \mathbf{t}_0(c^{-1}d) \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$$

とおけば $\mathbf{r}(\sigma) = (\sigma, \mathbf{r}_0(\sigma)) \in Mp(V)$ であり

$$\mathbf{r} : \Omega(V) \to Mp(V)$$

は連続写像である．よって $(\sigma, \lambda) \mapsto (\sigma, \lambda\mathbf{r}(\sigma))$ は $\Omega(V) \times \mathbb{C}^1$ から $Mp(V)$ の開集合 $\varpi^{-1}(\Omega(V))$ への位相同型写像となるから，$Mp(V)$ は局所コンパクト群である（[18, p.186] 参照）．更に連続群準同型写像 $\Phi : Mp(V) \to \mathbb{C}^1$ で

1) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}^1$ に対して $\Phi(1, \lambda) = \lambda^2$,
2) $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Omega(V)$ に対して $\Phi(\mathbf{r}(\sigma)) = (|c|, -1)_2 \gamma_\chi(Q_1)^{\dim V}$

なるものが存在する．ここで $Q_1(x) = x^2$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の二次形式であり，$(a, b)_2$ は **Hilbert 記号**である[7]．$\widetilde{Sp}(V) = \mathrm{Ker}\,\Phi$ は $Mp(V)$ の閉部分群（従って局所コンパクト群）で

$$\varpi : \widetilde{Sp}(V) \to Sp(V) \qquad ((\sigma, T) \mapsto \sigma)$$

[7] $a, b \in \mathbb{Q}_p^\times$ に対して

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} s + t\sqrt{a} & u + v\sqrt{a} \\ b(u - v\sqrt{a}) & s - t\sqrt{a} \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t, u, v \in \mathbb{Q}_p \right\}$$

は $M_2(\mathbb{Q}_p(\sqrt{a}))$ の $\mathbb{Q}_p$-部分代数となり，$M_2(\mathbb{Q}_p)$ と同型であるか又は $\mathbb{Q}_p$ 上の斜体となる．

$$(a, b)_2 = \begin{cases} 1 & : H \tilde{\to} M_2(\mathbb{Q}_p) \text{ のとき}, \\ -1 & : H \text{ が } \mathbb{Q}_p \text{ 上の斜体のとき} \end{cases}$$

を Hilbert 記号と呼ぶ．

連続全射群準同型写像で，その核は $\{(1,\pm 1)\}$ である．

$$\omega_\chi : \widetilde{Sp}(V) \to \mathrm{Aut}(L^2(W')) \qquad ((\sigma, T) \mapsto T)$$

は $\widetilde{Sp}(V)$ のユニタリ表現を与えるから，これを **Weil 表現**と呼ぶ．後に用いるために次のことを注意しておく；$a \in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')$ に対して，$cW \tilde{\to} W'$ を一つとれば，$\mathbf{d}'(c)\mathbf{d}(a) = \mathbf{d}'(ca)$ だから，$\Phi(\mathbf{d}(a)) = (\det a, -1)_2$ である．ここで $\eta_\chi(a) = \gamma_\chi(Q_1)\gamma_\chi(-\det a \cdot Q_1)$ とおくと $\eta_\chi(a)^2 = (\det a, -1)_2$ となるから

$$\widetilde{\mathbf{d}}(a) = (\mathrm{d}(a), \eta_\chi(a)^{-1}\mathbf{d}(a)) \in \widetilde{Sp}(V) \tag{3}$$

とおく．

4.4 $\mathbb{Z}_p$-格子 $L \subset W$ をとり[8]，$L' = \{x \in W' \mid \chi(\langle x, L\rangle) = 1\}$ とおいて $\Lambda = L' \oplus L$ とおく．$H(\Lambda) = \Lambda \times \mathbb{Q}_p$ は $H(V)$ の閉部分群で

$$\chi_\Lambda : H(\Lambda) \to \mathbb{C}^1 \qquad (((x,y),t) \mapsto \chi\left(t + \frac{1}{2}\langle x, y\rangle\right))$$

は $H(\Lambda)$ の連続なユニタリ指標となる．そこで誘導表現 $\pi_{\chi_\Lambda} = \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ を考える．その表現空間は

1) 任意の $\lambda \in H(\Lambda)$ に対して $\theta(\lambda g) = \chi_\Lambda(\lambda)\theta(g)$,
2) $\displaystyle\int_{H(\Lambda)\backslash H(V)} |\theta(g)|^2 d(\dot{g}) < \infty$

なる $H(V)$ 上の可測関数 θ の全体であり，$h \in H(V)$ の $\theta \in \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ への作用は $(\pi_{\chi_\Lambda}(h)\theta)(g) = \theta(gh)$ により定義される．ここで Schwartz 関数[9]$\varphi \in \mathcal{S}(W')$ に対して

$$\Theta_\varphi(h) = \int_{L'} \varphi(x+l)\chi\left(t + \frac{1}{2}\langle x, y\rangle + \langle l, y\rangle\right) d_{L'}(l) \quad (h = ((x,y),t) \in H(V))$$

により $H(V)$ 上の関数 Θ_φ を定義すれば，$\Theta_\varphi \in \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ であり $|\Theta_\varphi| = |\varphi|$ である．更に次の定理が成り立つ；

定理 4.4.1 $\varphi \mapsto \Theta_\varphi$ は $H(V)$ のユニタリ表現のユニタリ同値写像

$$(\Pi_\chi, L^2(W')) \tilde{\to} \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$$

に延長される．

[8] 即ち，W の $\mathbb{Z}_p$-部分加群であって W の $\mathbb{Q}_p$ 上の基底を含むもの．
[9] $p = \infty$ のときには各階微分の多項式倍が常に有界なる関数，$p < \infty$ のときには台がコンパクトなる連続関数．

$\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ を Schrödinger 表現の**格子モデル** と呼ぶ．さて $\Lambda\sigma = \Lambda$ なる $\sigma \in Sp(V)$ の全体を $Sp(\Lambda)$ と書き，$Sp(\Lambda)$ の部分群

$$Sp_{0,\chi}(\Lambda) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid \chi_\Lambda(\lambda^\gamma) = \chi_\Lambda(\lambda) \text{ for } \forall\lambda \in H(\Lambda)\}$$

を考えよう．$\gamma \in Sp_{0,\chi}(\Lambda)$ に対して，複素 Hilbert 空間 $\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ の自己同型写像 $\mathbf{r}_\chi(\gamma)$ が

$$(\mathbf{r}_\chi(\gamma)\theta)(h) = \theta(h^\gamma) \qquad (\theta \in \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda, h \in H(V))$$

により定義される．そこで定理 4.4.1 のユニタリ同値写像 $\varphi \mapsto \Theta_\varphi$ により $\mathbf{r}_\chi(\gamma)$ が誘導する $L^2(W')$ 上の自己同型写像を同じく $\mathbf{r}_\chi$ と書こう．すると $\gamma \mapsto (\gamma, \mathbf{r}_\chi(\gamma))$ は $Sp_{0,\chi}(\Lambda)$ から $Mp(V)$ への群準同型写像であることがわかる．そこで $\widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda) = \varpi_\chi^{-1}Sp_{0,\chi}(\Lambda)$ とおくと，群準同型写像

$$\rho_\chi = \rho_{\Lambda,\chi} : \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda) \to \mathbb{C}^1$$

が定まって，任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda)$ に対して

$$\omega_\chi(\widetilde{\gamma}) = \rho_\chi(\widetilde{\gamma}) \cdot \mathbf{r}_\chi(\gamma) \qquad (\gamma = \varpi_\chi(\widetilde{\gamma}))$$

が成り立つようにできる．ここで $a \in V$ をとって $H(\Lambda)$ のユニタリ指標

$$\chi_{\Lambda,a}(\lambda) = \chi_\Lambda(\lambda) \cdot \chi(D(a,l)) \qquad (\lambda = (l,t) \in H(\Lambda))$$

を定義する．又，$a = (a', a'') \in V = W' \times W$ として W' 上の Schwartz 関数 $\varphi \in \mathcal{S}(W')$ に対して

$$\begin{aligned}\vartheta_\varphi[a](\widetilde{g}) &= \Theta_{\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\varphi}(a,0)\\ &= \chi\left(\frac{1}{2}\langle a', a''\rangle\right) \cdot \int_{L'} (\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\varphi)(a'+l)\chi(\langle l, a''\rangle)d_{L'}(l)\end{aligned}$$

($\widetilde{g} \in \widetilde{Sp}(V)_J$) とおくと，テータ級数の変換公式が次のように述べられる；

定理 4.4.2 任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda)$ と $\lambda \in H(\Lambda)$ に対して

$$\vartheta_\varphi[a]((\widetilde{\gamma}, \lambda)\widetilde{g}) = \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})\chi_{\Lambda,a\gamma}(\lambda)\vartheta_\varphi[a\gamma](\widetilde{g}).$$

[**証明**] $\omega_\chi(\widetilde{\gamma})$ と $\Pi_\chi(\lambda)$ を $\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ 上で実現したものを同じ記号で表せば，$\psi = \omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\varphi$ として

$$\begin{aligned}\vartheta_\varphi[a]((\widetilde{\gamma}, \lambda)\widetilde{g}) &= (\omega_\chi(\widetilde{\gamma}) \circ \Pi_\chi(\lambda)\Theta_\psi)(a,0)\\ &= \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})(\Pi_\chi(\lambda)\Theta_\psi)(a\gamma,0)\\ &= \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})\Theta_\psi((a\gamma,0)\lambda).\end{aligned}$$

ここで $\lambda = (l,t)$ とおくと，$(x,s) \in H(V)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(l,t)^{-1}(x,s)(l,t) &= (-l,-t)(x+l, s+t+2^{-1}D(x,l)) \\
&= (x, s+2^{-1}D(x,l) - 2^{-1}D(l,x+l)) \\
&= (0, D(x,l))(x,s)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\Theta_\psi((a\gamma,0)\lambda) &= \Theta_\psi(\lambda(0,D(a\gamma,l))(a\gamma,0) \\
&= \chi_\Lambda(\lambda(0,D(a\gamma,l)))\Theta_\psi(a\gamma,0)
\end{aligned}
$$

となり，求める等式を得る．■

特に $\widetilde{g} = \widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V), a = 0$ の場合に

系 4.4.3 W' 上の Schwartz 関数 $\varphi \in \mathcal{S}(W')$ に対して

$$
\vartheta_\varphi(\widetilde{\sigma}) = \int_{L'} (\omega_\chi(\widetilde{\sigma})\varphi)(l) d_{L'}(l) \qquad (\widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V))
$$

とおくと，任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_{0,\chi}(\Lambda)$ に対して

$$
\vartheta_\varphi(\widetilde{\gamma}\widetilde{\sigma}) = \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma}) \cdot \vartheta_\varphi(\widetilde{\sigma}).
$$

4.5 $GL_{\mathbb{Q}_p}(V)$ の閉部分群

$$
GSp(V) = \{\sigma \in GL_{\mathbb{Q}_p}(V) \mid D(x\sigma, y\sigma) = \nu(\sigma) \cdot D(x,y) \text{ for } \forall x, y \in V\}
$$

は，$\sigma \in GSp(V)$ と $h = (x,t) \in H(V)$ に対して $h^\sigma = (x\sigma, \nu(\sigma)t)$ により $H(V)$ に右から作用し，$h \mapsto h^\sigma$ は $H(V)$ の位相的自己同型写像である．特に半直積 $Sp(V)_J = Sp(V) \ltimes H(V)$ を **Jacobi 群**と呼ぶ．更に $\widetilde{Sp}(V)$ は $\varpi : \widetilde{Sp}(V) \to Sp(V)$ を通して $H(V)$ に作用するから，半直積 $\widetilde{Sp}(V)_J = \widetilde{Sp}(V) \ltimes H(V)$ 及び

$$
\varpi_J : \widetilde{Sp}(V)_J \to Sp(V)_J \qquad ((\widetilde{\sigma}, h) \mapsto (\varpi(\widetilde{\sigma}), h))
$$

を考えると，$\widetilde{Sp}(V)$ の Weil 表現 $(\omega_\chi, L^2(W'))$ を用いて $\widetilde{Sp}(V)_J$ の既約ユニタリ表現 $(\omega_{\chi,J}, L^2(W'))$ が

$$
\omega_{\chi,J}(\widetilde{\sigma}, h) = \omega_\chi(\widetilde{\sigma}) \circ \Pi_\chi(h)
$$

により定義される．

ここで $\widetilde{Sp}(V)$ のユニタリ表現 π があれば，自然な射影 $\widetilde{Sp}(V)_J \to \widetilde{Sp}(V)$ を通して $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現 π_J が生ずるから，ユニタリ表現のテンソル積 $\rho = \pi_J \otimes \omega_{\chi,J}$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現で，任意の $t \in \mathbb{Q}_p = Z(H(V)) =$

$Z(\widetilde{Sp}(V)_J)$ に対して $\rho(t)=\chi(t)$ となる．逆に，任意の $t\in\mathbb{Q}_p$ に対して $\rho(t)=\chi(t)$ なる $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現 (ρ,H) があると，それを $H(V)$ に制限すると，定理 4.1.2 より，複素 Hilbert 空間 E があって $H=E\widehat{\otimes}L^2(W')$ かつ $\rho|_{H(V)}=\mathbf{1}_E\otimes\Pi_\chi$ である．このとき $E=\mathcal{L}_{H(V)}(L^2(W'),H)$ で，オペレータ・ノルム $|T|=\sup_{0\neq\varphi\in L^2(W')}|T\varphi|/|\varphi|$ により複素 Hilbert 空間になる．そこで E 上の $\widetilde{Sp}(V)$ のユニタリ表現 π を

$$\pi(\widetilde{\sigma})T=\rho(\widetilde{\sigma},1)\circ T\circ\omega_\chi(\widetilde{\sigma})^{-1}$$

により定義すると，$\rho=\pi_J\otimes\omega_{\chi,J}$ となる．正確には次の定理が成り立つ；

定理 4.5.1 $\pi\mapsto\pi_J\otimes\omega_{\chi,J}$ は $\widetilde{Sp}(V)$ のユニタリ表現 π のユニタリ同値類と $\rho|_{Z(\widetilde{Sp}(V)_J}=\chi$ なる $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現 ρ のユニタリ同値類の間の全単射を与える．特に $\pi_J\otimes\omega_{\chi,J}$ が既約となる必要十分条件は π が既約なることである．

5 重さ 1/2 の保型因子

5.1 (V,D) を実斜交空間として，7.1 節の記号を用いる．$\mathbf{e}(t)=\mathbf{e}_\infty(t)=\exp(2\pi\sqrt{-1}t)$ とおいて，$g=(\sigma,h)\in Sp(V)_J$ $(\sigma\in Sp(V), h=(x,t)\in H(V))$ と $Z=(z,w)\in\mathfrak{H}_{V,J}$ に対して

$$\begin{aligned}\eta(g;Z)=&\mathbf{e}\left(t+\frac{1}{2}D(x,x\begin{bmatrix}z\\1_W\end{bmatrix}J(\sigma,z)^{-1}\sigma)\right.\\&\left.+D(x,wJ(\sigma,z)^{-1}\sigma)+\frac{1}{2}D(w,wJ(\sigma,z)^{-1}\sigma)\right)\end{aligned}$$

とおき，$Z'=(z',w')\in\mathfrak{H}_{V,J}$ に対して

$$\kappa(Z';Z)=\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle(w'-\overline{w})(z'-\overline{z})^{-1},w'-\overline{w}\rangle\right)$$

とおくと

$$\kappa(g(Z'),g(Z))=\eta(g;Z')\kappa(Z';Z)\overline{\eta(g;Z)}$$

となる．特に $z\in\mathfrak{H}_V$ と $w',w\in W_\mathbb{C}$ に対して $\kappa_z(w',w)=\kappa(z,w';z,w)$ とおく．

Heisenberg 群 $H(V)$ の中心 $Z(H(V))=\mathbb{R}$ のユニタリ指標 $\chi(t)=e^{-2\pi\sqrt{-1}t}$ から $H(V)$ に誘導された誘導表現 $\pi_\chi=\mathrm{Ind}_{Z(H(V))}^{H(V)}\chi$ を考える．その表現空間は

1) 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $\varphi(g(0,t))=\chi(t)^{-1}\varphi(g)=\mathbf{e}(t)\varphi(g)$,
2) $\displaystyle\int_{H(V)/Z(H(V))}|\varphi(g)|^2d(\dot{g})<\infty$

なる $H(V)$ 上の複素数値可測関数 φ の全体であり，$h \in H(V)$ の作用は $(\pi_\chi(h)\varphi)(g) = \varphi(h^{-1}g)$ で定義される．一方 $\mathfrak{H}_{V,J}$ における $(z,0) \in \mathfrak{H}_{V,J}$ の $H(V)$-軌道は $\Omega_z = \{z\} \times W_{\mathbb{C}}$ となり，これを $(z,w) = w$ なる同一視により $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ とみなす．$(z,0) \in \Omega_z$ の $H(V)$ における固定部分群は $Z(|H(V))$ だから，誘導表現 $\mathrm{Ind}_{Z(H(V))}^{H(V)}\chi$ を $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上の関数の空間上に実現することができる．それを具体的に書いてみよう．まず

$$d_z(w) = (\det \mathrm{Im}\, z)^{-1} d_{W_{\mathbb{C}}}(w)$$

は $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上の $H(V)$-不変測度であり，$g \in Sp_(V)_J$ に対して $g(z,w) = (z', w') \in \mathfrak{H}_{V,J}$ とすると

$$d_{z'}(w') = d_z(w)$$

となる．$\varphi \in \mathrm{Ind}_{Z(H(V))}^{H(V)}\chi$ に対して $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上の関数 $\widetilde{\varphi}$ が

$$\widetilde{\varphi}(w) = \eta(h; z, 0)^{-1}\varphi(h) \qquad (w = h(0) \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}, h \in H(V))$$

により定義されて $|\varphi(h)|^2 = |\widetilde{\varphi}(w)|^2 \kappa_z(w,w)$ となる．一方，$h \in H(V)$ に対して $\psi = \pi_\chi(h)\varphi$ とおくと

$$\widetilde{\psi}(w) = \eta(h^{-1}; z, w)\widetilde{\varphi}(h^{-1}(w)) \qquad (w \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}})$$

となる．そこで $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して，$\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上の複素数値可測関数 φ であって

$$\int_{W_{\mathbb{C}}} |\varphi(w)|^2 \kappa_z(w,w) d_z(w) < \infty$$

なるもの全体のなす複素 Hilbert 空間を $\mathcal{L}_z$ とすると，$H(V)$ の $\mathcal{L}_z$ 上のユニタリ表現 π_z が

$$(\pi_z(h)\varphi)(w) = \eta(h^{-1}; z, w)\varphi(h^{-1}(w)) \qquad (h \in H(V), \varphi \in \mathcal{L}_z)$$

により定義される．更に $\Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ 上正則なる $\varphi \in \mathcal{L}_z$ の全体 $\mathcal{H}_z$ は $\mathcal{L}_z$ の閉部分空間となり，$(\pi_z, \mathcal{L}_z)$ の部分表現 $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ が定まるが，実は $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ は $H(V)$ の Schrödinger 表現 $(\check{\Pi}_{\mathbf{e}}, L^2(W))$ とユニタリ同値である．そのユニタリ同値写像を具体的に与えるために，幾つか準備をしておこう．まず $\mathrm{Re}\, T = (T + \overline{T})/2$ が正定値となる $T \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ の全体 $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数 $\det^{-1/2}$ を

$$\det{}^{-1/2} T = \int_{W'} e^{-\pi\langle w, wT\rangle} d_{W'}(w) \qquad (T \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}})$$

により定義すると，$(\det^{-1/2} T)^2 = \det T^{-1}$（$d_{W'}(w) = \prod_{i=1}^n dx_i$ ($w = \sum_{i=1}^n x_i u_i$) なる W' の $\mathbb{R}$-基底 $\{u_i\}_{1=1,\cdots,n}$ に対して $\det T = \det(\langle u_i, u_j T\rangle)_{i,j=1,\cdots,n}$ により定める）であり，正定値なる $T \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$ に対して $\det^{-1/2} T =$

$(\det T)^{1/2}$ となる．整数 n に対して $\det^{n/2}T = (\det^{-1/2}T)^{-n}$ とおく．同様に $\mathrm{Re}\, S = (S+\overline{S})/2$ が正定値なる $S \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}})$ の全体 $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数 $\det^{-1/2}$ が

$$\det{}^{-1/2}S = \int_W e^{-\pi\langle wS,w\rangle} d_W(w) \qquad (S \in \mathcal{S}'_{\mathbb{C}})$$

により定義される．$T \mapsto T^{-1}$ は $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ から $\mathcal{S}'_{\mathbb{C}}$ への双正則な全単射で $\det^{-1/2}(T^{-1}) = \det^{1/2}T$ である．そこで $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して

$$\gamma(z) = \det{}^{-1/2}(z/\sqrt{-1}) \cdot \det(2\mathrm{Im}\, z)^{1/4},$$
$$q_z(w) = \mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}\langle wz^{-1}, w\rangle\right) \qquad (w \in W_{\mathbb{C}})$$

とおいて，$\psi \in L^2(W)$ に対して

$$Q_z(\psi)(w) = \gamma(z)\int_W q_z(w-v)\psi(v)d_W(v) \qquad (w \in W_{\mathbb{C}})$$

とおくと，$\psi \mapsto Q_z(\psi)$ は $H(V)$ のユニタリ表現 $(\check{\Pi}_{\mathbf{e}}, L^2(W))$ から $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ へのユニタリ同値写像を与える．$(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ を Schrödinger 表現 $(\check{\Pi}_{\mathbf{e}}, L^2(W))$ の **Fock モデル** と呼ぶ．反傾表現 $(\Pi_{\mathbf{e}}, L^2(W')$ の Fock モデルをみるために，まず Fourier 変換 $\mathcal{F} : L^2(W') \tilde{\to} L^2(W)$ を

$$(\mathcal{F}\varphi)(w) = \int_{W'} \varphi(v)\mathbf{e}(-\langle v,w\rangle)d_{W'}(v) \qquad (\varphi \in L^2(W')\cap L^1(W'))$$

により定義する．又 $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して $z^\vee = -\overline{z} \in \mathfrak{H}_V$ とおき，$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GSp(V)$ とおいて，$H(V)$ の $\mathcal{H}_{z^\vee}$ 上のユニタリ表現を $\check{\pi}_z(h) = \pi_{z^\vee}(h^\varepsilon)$ $(h \in H(V))$ により定義する．このとき

$$L^2(W') \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2(W) \xrightarrow{Q_{z^\vee}} \mathcal{H}_{z^\vee}$$

は $(\Pi_{\mathbf{e}}, L^2(W'))$ から $(\check{\pi}_z, \mathcal{H}_{z^\vee})$ へのユニタリ同値写像となる．ここで $\kappa_{z^\vee}(w,w) = \kappa_z(w,w)$ だから，複素 Hiulbert 空間としては $\mathcal{H}_{z^\vee}$ は $\mathcal{H}_z$ と同じものである．

5.2 Heisenberg 群 $H(V)$ のユニタリ表現 $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ の作用は，$\varphi \in \mathcal{H}_z$ と $h \in H(V)$ 及び $w \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ に対して $w' = h(w) \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ とおくと

$$(\pi_z(h)\varphi)(w') = \eta(h;z,w)^{-1}\varphi(w)$$

と書ける．そこで $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$ と $w \in \Omega_z = W_{\mathbb{C}}$ に対して $g(z,w) = (\sigma(z), w') \in \Omega_{\sigma(z)} = W_{\mathbb{C}}$ として

$$(T^z(g)\varphi)(w') = \eta(g;z,w)^{-1}\varphi(w) \qquad (\varphi \in \mathcal{H}_z)$$

とおくと，$T^z(g)$ は $\mathcal{H}_z$ から $\mathcal{H}_{\sigma(z)}$ へのユニタリ写像で，更に $g' \in Sp(V)_J$ をとれば

$$T^z(g'g) = T^{\sigma(z)}(g') \circ T^z(g)$$

となる．そこでユニタリ自己同型 $T_z(g) \in \mathrm{Aut}(L^2(W))$ を可換図式

$$\begin{array}{ccc} L^2(W) & \xrightarrow{Q_z} & \mathcal{H}_z \\ {\scriptstyle T_z(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^z(g)} \\ L^2(W) & \xrightarrow[Q_{\sigma(z)}]{} & \mathcal{H}_{\sigma(z)} \end{array}$$

により定義する．$z, z' \in \mathfrak{H}_V$ に対して $\mathcal{H}_z$ から $\mathcal{H}_{z'}$ へのユニタリ同型を $U_{z',z} = Q_{z'} \circ Q_z^{-1}$ と定義すると，$\varphi \in \mathcal{H}_z$ に対して

$$(U_{z',z}\varphi)(w') = \gamma(z', z) \int_{W_{\mathbb{C}}} \kappa(z', w'; z, w)^{-1} \varphi(w) \kappa_z(w, w) d_z(w)$$

となることが示される．ここで

$$\begin{aligned} \gamma(z', z) &= \gamma(z')\overline{\gamma(z)} \det{}^{-1/2} \left\{ (z'/\sqrt{-1})^{-1} + \overline{(z/\sqrt{-1})}^{-1} \right\} \\ &= \det{}^{-1/2} \left(\frac{z' - \overline{z}}{2\sqrt{-1}} \right) \det(\mathrm{Im}\, z')^{1/4} \det(\mathrm{Im}\, z)^{1/4} \end{aligned}$$

である．ユニタリ自己同型 $T_z(g) \in \mathrm{Aut}(L^2(W))$ をユニタリ同型写像 $Q_z : L^2(W) \tilde{\to} \mathcal{H}_z$ により $\mathcal{H}_z$ のユニタリ自己同型とみれば

$$T_z(g) = U_{z,\sigma(z)} \circ T^z(g) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_z) \qquad (g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J)$$

となる．さて，ユニタリ同型写像 $\check{T}_z(g) \in \mathrm{Aut}(L^2(W'))$ を可換図式

$$\begin{array}{ccccc} L^2(W') & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(W) & \xrightarrow{Q_{z^\vee}} & \mathcal{H}_{z^\vee} \\ {\scriptstyle \check{T}_z(g)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle T^{z^\vee}(\varepsilon^{-1}g\varepsilon)} \\ L^2(W') & \xrightarrow[\mathcal{F}]{} & L^2(W) & \xrightarrow[Q_{\sigma(z)^\vee}]{} & \mathcal{H}_{\sigma(z)^\vee} \end{array}$$

により定義する．すると $g = (\sigma, h), g' = (\tau, h') \in Sp(V)_J$ に対して

$$\check{T}_z(g) \circ \check{T}_z(g') = \beta_z(\sigma, \tau) \check{T}_z(gg')$$

が成り立つ．ここで $\sigma \in Sp(V)$ と $z, z' \in \mathfrak{H}_V$ に対して

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma; z', z) = \det{}^{-1/2} \left(\frac{\sigma(z') - \overline{\sigma(z)}}{2\sqrt{-1}} \right) &\cdot \det{}^{1/2} \left(\frac{z' - \overline{z}}{2\sqrt{-1}} \right) \\ &\times |\det J(\sigma, z')|^{-1/2} |\det J(\sigma, z)|^{-1/2} \end{aligned}$$

とおき，$\sigma,\tau \in Sp(V)$ と $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して

$$\beta_z(\sigma,\tau) = \varepsilon(\sigma; z, \tau(z)) \in \mathbb{C}^1$$

とおく．$g, g', g'' \in Sp(V)_J$ に対して結合法則

$$(\check{T}_z(g) \circ \check{T}_z(g')) \circ \check{T}_z(g'') = \check{T}_z(g) \circ (\check{T}_z(g') \circ \check{T}_z(g''))$$

が成り立つから，$\sigma, \tau, \delta \in Sp(V)$ に対して

$$\beta_z(\tau,\delta)\beta_z(\sigma\tau,\delta)^{-1}\beta_z(\sigma,\tau\delta)\beta_z(\sigma,\tau)^{-1} = 1$$

となる．即ち β_z は $\mathbb{C}^1$ に値をとる $Sp(V)$ 上の実解析的な 2-cocycle となる（$Sp(V)$ は $\mathbb{C}^1$ に自明に作用している）．そこで付随する群拡大を $Mp(V;z)$ としよう．即ち，$Mp(V;z) = \mathbb{C}^1 \times Sp(V)$ で，群演算を

$$(\varepsilon,\sigma)\cdot(\eta,\tau) = (\varepsilon\eta\beta_z(\sigma,\tau), \sigma\tau)$$

により定義すると，$Mp(V;z)$ は連結な実 Lie 群である．更に $\sigma \in Sp(V)$ に対して

$$\alpha_z(\sigma) = \det J(\sigma,z)/|\det J(\sigma,z)|$$

とおくと[10]，$\sigma,\tau \in Sp(V)$ に対して

$$\beta_z(\sigma,\tau)^2 = \alpha_z(\tau)\alpha_z(\sigma\tau)^{-1}\alpha_z(\sigma)$$

となるから，$(\varepsilon,\sigma) \mapsto \varepsilon^2\alpha_z(\sigma)$ は $Mp(V;z)$ から $\mathbb{C}^1$ への連続群準同型写像となる．その核を $\widetilde{Sp}(V;z)$ としよう．即ち

$$\widetilde{Sp}(V;z) = \{(\varepsilon,\sigma) \in \mathbb{C}^1 \times Sp(V) \mid \varepsilon^2 = \alpha_z(\sigma)^{-1}\}$$

は $Mp(V;z)$ の閉部分群となり，従って実 Lie 部分群となるが，更に連結であることもわかる．よって

$$\varpi_z : \widetilde{Sp}(V;z) \to Sp(V) \qquad ((\varepsilon,\sigma) \mapsto \sigma)$$

により $\widetilde{Sp}(V;z)$ は $Sp(V)$ の連結な二重被覆群となる．ここで $(\varepsilon,\sigma) \mapsto (\sigma, \varepsilon\check{T}_z(\sigma))$ は $Mp(V;z)$ から $Mp(V)$ への位相群としての同型写像であり，$(\varepsilon,\sigma) \in Mp(V;z)$ に対して

$$\Phi(\sigma, \varepsilon\check{T}_z(\sigma)) = \varepsilon^2\alpha_z(\sigma)$$

---

[10] $\begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}$ と $d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ を同一視しているから（26 頁），$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V)$ に対して

$$J(\sigma,z) = \begin{bmatrix} {}^t(cz+d)^{-1} & 0 \\ 0 & cz+d \end{bmatrix} = cz+d \in \widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$$

である．

であることが示される．よって $(\varepsilon.\sigma) \mapsto (\sigma, \varepsilon\check{T}_z(\sigma))$ は $\widetilde{Sp}(V;z)$ から $\widetilde{Sp}(V)$ への位相群の同型写像となる．よって Weil 表現は

$$\omega_\chi : \widetilde{Sp}(V;z) \to \mathrm{Aut}(L^2(W')) \qquad ((\varepsilon,\sigma) \mapsto \varepsilon\check{T}_z(\sigma))$$

となる（但し $\chi(t) = \mathbf{e}(t)$ である）．その反傾表現 $(\check{\omega}_\chi, L^2(W))$ は $\check{\omega}_\chi(\widetilde{\sigma}) = \varepsilon^{-1}T_z(\sigma)$ $(\widetilde{\sigma} = (\varepsilon,\sigma) \in \widetilde{Sp}(V;z))$ である．

5.3 $z_0 = \widehat{0} \in \mathfrak{H}_V$ に対して $\widetilde{Sp}(V) = \widetilde{Sp}(V;z_0)$ とおき

$$\begin{aligned} \varpi :& \widetilde{Sp}(V) \to Sp(V) \qquad ((\varepsilon,\sigma) \mapsto \sigma), \\ \omega :& \widetilde{Sp}(V) \to \mathrm{Aut}(L^2(W')) \qquad ((\varepsilon,\sigma) \mapsto \varepsilon \cdot \check{T}_{z_0}(\sigma)) \end{aligned}$$

とおく．$\widetilde{Sp}(V)$ は φ を通して $\mathfrak{H}_V$ に作用している．特に

$$\widetilde{K} = \varpi^{-1}(K) = \{(\varepsilon, k) \in \mathbb{C}^1 \times K \mid \varepsilon^2 = \det J(k,z_0)^{-1}\}$$

は $z_0 \in \mathfrak{H}_V$ の固定部分群で，直積群 $\mathbb{C}^1 \times K$ の閉部分群である．ここで $\widetilde{\sigma} = (\varepsilon,\sigma) \in \widetilde{Sp}(V)$ に対して

$$J_{1/2}(\widetilde{\sigma}, z) = \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon(\sigma; z, z_0)|\det J(\sigma,z)|^{1/2}$$

とおくと，$J_{1/2}(\widetilde{\sigma},z)^2 = \det J(\sigma,z)$ となるから，$J_{1/2}(\widetilde{\sigma},z)$ は $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V)$ に関して実解析的，$z \in \mathfrak{H}_V$ に関して正則である．又，$\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau} \in \widetilde{Sp}(V)$ に対して

$$J_{1/2}(\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}, z) = J_{1/2}(\widetilde{\sigma}, \tau(z))J_{1/2}(\widetilde{\tau}, z)$$

となる．特に

$$\det{}^{1/2} : \widetilde{K} \to \mathbb{C}^1 \qquad (\widetilde{k} = (\varepsilon, k) \mapsto J(\widetilde{k}, z_0) = \varepsilon^{-1})$$

はコンパクト群 $\widetilde{K}$ の 1 次元ユニタリ表現である．ここで Weil 表現 $(\omega, L^2(W'))$ を $\widetilde{K}$ に制限したときの既約分解を考えよう．その為にユニタリ同型

$$L^2(W') \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2(W) \xrightarrow{Q_{z_0^\vee}} \mathcal{H}_{z_0^\vee}$$

により Weil 表現を $\mathcal{H}_{z_0^\vee}$ 上で実現したとしよう．すると $W_\mathbb{C}$ 上の多項式関数 $P \in \mathbb{C}[W_\mathbb{C}]$ に対して $\varphi(w) = P(w)\kappa_{z_0^\vee}(w,0)^{-1}$ $(w \in W_\mathbb{C})$ とおくと $\varphi \in \mathcal{H}_{z_0^\vee}$ で，$\widetilde{\sigma} = (\varepsilon,\sigma) \in \widetilde{Sp}(V)$ に対して

$$(\omega(\widetilde{\sigma})\varphi)(w) = \varepsilon \cdot P(w\overline{J(\sigma,z_0)})\kappa_{\sigma(z_0)^\vee}(w,0)^{-1} \qquad (w \in W_\mathbb{C})$$

となる．従って Weil 表現 ω を $\widetilde{K}$ のい制限したときの既約分解は

$$\omega|_{\widetilde{K}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \det{}^{-1/2} \otimes \mathrm{Sym}_n$$

となる．ここで Sym_n はコンパクト・ユニタリ群 $K = U(W_{\mathbb{C}}, \langle\,,\rangle_{z_0})$ の n 次対称テンソル表現であり，$GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の表現とみれば Young 図形は

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{\cdots}\boxed{n}$$

である．そこで "最小の" $\widetilde{K}$-タイプ $\det^{-1/2}$ に対応する $L^2(W')$ のベクトルをとろう．即ち $\varphi = \mathcal{F}^{-1} \circ Q_{z_0^\vee}^{-1} \kappa_{z_0^\vee}(*, 0)^{-1} \in L^2(W')$ とおくと

$$\varphi(u) = \det(2\mathrm{Im}\, z_0)^{1/4} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle u, uz_0\rangle\right) \qquad (u \in W')$$

である．ここで $\widetilde{g} = (\widetilde{\sigma}, h) \in \widetilde{Sp}(V)_J$ $(\widetilde{\sigma} = (\varepsilon, \sigma) \in \widetilde{Sp}(V), h \in H(V))$ に対して $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$ とおいて $g(z_0, 0) = (z, w) \in \mathfrak{H}_{V,J}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&(\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\varphi)(u) = \varepsilon(\check{T}_{z_0}(g)\varphi)(u) \\
&= \varepsilon \cdot \eta(g; z_0, 0) \det(2\mathrm{Im}\, z)^{1/4} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle u, uz\rangle + \langle u, w\rangle\right) \qquad (u \in W')
\end{aligned}$$

となる．よって $\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})$ を $\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ 上で実現したとして $\Theta_\varphi \in \mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ への作用を考えれば

$$(\omega_{\chi,J}(\widetilde{g})\Theta_\varphi)(h') = \varepsilon \cdot \eta(g; z_0, 0) \det(2\mathrm{Im}\, z)^{1/4} \mathbf{e}\left(t - \frac{1}{2}\langle a', a''\rangle\right) \cdot \vartheta[a](z, w)$$

となる．ここで $h' = (a, t) \in H(V)$ $(a = (a', a'') \in W' \times W)$ とし

$$\vartheta[a](z, w) = \sum_{l \in L'} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l + a', (l + a')z\rangle + \langle l + a', w + a''\rangle\right) \tag{4}$$

は Riemenn のテータ級数である．よって定理 4.4.2 よりテータ級数の変換公式を得る；$\chi_\Lambda(h) = \mathbf{e}\left(t + \frac{1}{2}\langle x, y\rangle\right)$ $(h = ((x, y), t) \in H(\Lambda))$ に対して

$$Sp_0(\Lambda) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid \chi_\Lambda(h^\gamma) = \chi_\Lambda(h) \text{ for } \forall h \in H(\Lambda)\}$$

とおくと

定理 5.3.1 任意の $\gamma \in Sp_0(\Lambda)$ に対して，$\varpi(\widetilde{\gamma}) = \gamma$ なる $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_0(\Lambda)$ をとれば

$$\vartheta^*[a](\gamma(z), wJ(\gamma, z)^{-1}) = \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma}) J_{1/2}(\widetilde{\gamma}, z) \eta(\gamma; z, w)^{-1} \vartheta^*[a\gamma](z, w)$$

である．ここで $\vartheta^*[a](z, w) = \mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}\langle a', a''\rangle\right) \cdot \vartheta[a](z, w)$ とおく．

$(x, y) \in \Lambda$ に対して $h = ((x, y), 0) \in H(\Lambda)$ とおくと

$$\vartheta[0](z, w + xz + y) = \chi_\Lambda(h)\eta(h; z, w)^{-1}\vartheta[0](z, w)$$

となることに注意しよう．定理 5.3.1 で特に

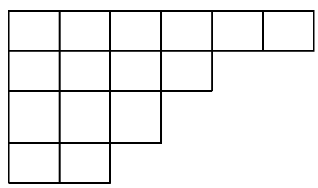
$$\vartheta(z) = \vartheta[0](z,0) = \sum_{l \in L'} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l, lz\rangle\right) \qquad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

とおけば，任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_0(\Lambda)$ に対して

$$\vartheta(\gamma(z))/\vartheta(z) = \rho_\Lambda(\widetilde{\gamma}) J_{1/2}(\widetilde{\gamma}, z)$$

である．よって特に任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{Sp}_0(\Lambda)$ に対して $\rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})^8 = 1$ である（[10] の Chap.V, §2 参照）．

5.4 数論的部分群 $\Gamma \subset Sp(V_{\mathbb{Q}})$ をとり（$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ のときには十分大きな $0 < N \in \mathbb{Z}$ に対して $Sp(\Lambda, N) \subset \Gamma$ であると仮定する），$\widetilde{Sp}(V)$ の離散的部分群 $\widetilde{\Gamma} = \varpi^{-1}(\Gamma)$ のユニタリ指標 α として，$\operatorname{Ker}\alpha$ は $\widetilde{\Gamma}$ の指数有限の部分群であると仮定する．$\begin{bmatrix} {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \widehat{K}_{\mathbb{C}}$ と $d \in GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ を同一視して，(δ, V_δ) を $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現で Young 図形



m_1 個の正方形
m_2 個の正方形
$\vdots$
m_n 個の正方形

に対応しているとして，$m_n > 0$ と仮定する．このとき $\widetilde{K}$ の既約ユニタリ表現 $\delta \otimes \det^{-1/2}$ が

$$\widetilde{k} = (\varepsilon, k) \mapsto J_{1/2}(\widetilde{k}, z_0)^{-1} J_\delta(k, z_0) = \varepsilon \cdot J_\delta(k, z_0)$$

により定義される．これらのデータに対して 3.3 節と同様にして，“重さ半整数”の Siegel モジュラー形式を論ずることができるだろう．即ち，正則関数

$$F : \mathfrak{H}_V \to V_\delta$$

であって

1) 任意の $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ に対して $F(\gamma(z)) = \alpha(\widetilde{\gamma})^{-1} J_{1/2}(\widetilde{\gamma}, z)^{-1} J_\delta(\gamma, z) F(z)$,
2) 任意の $\sigma \in Sp(V_{\mathbb{Q}})$ と任意の $y_0 \in \operatorname{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W)$ に対して

$$|\det J(\sigma, z)|^{1/2} |J_\delta(\sigma, z)^{-1} F(\sigma(z))|$$

は $\{z \in \mathfrak{H}_V \mid \operatorname{Im} z \geq y_0\}$ で有界

であるとき，F を Γ に関する重さ $\delta \otimes \det^{-1/2}$，指標 α の Siegel モジュラー形式と呼ぶ．更に，付随する $\widetilde{Sp}(V)$ 上の関数

$$f_F(\widetilde{\sigma}) = J_{1/2}(\widetilde{\sigma}, z_0) J_\delta(\sigma, z_0)^{-1} F(\sigma(z_0)) \qquad (\widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V), \varpi(\widetilde{\sigma}) = \sigma)$$

が $\widetilde{Sp}(V)$ 上の有界関数となるとき，F を尖点形式と呼ぶ．ここで

$$|f_F(\widetilde{\sigma})| = |\det J(\sigma, z_0)|^{1/2}|J_\delta(\sigma, z_0)F(\sigma(z_0))|$$

は $\varpi(\widetilde{\sigma}) = \sigma \in Sp(V)$ の関数となって，任意の $p > 0$ に対して

$$\int_{\Gamma\backslash Sp(V)} |f_F(\widetilde{\sigma})|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

となる．逆に Satake の定理 3.3.1 と同様に

定理 5.4.1 実数 $p > 0$ に対して $p(m_n - 1/2) \geq 2n$ とする．このとき Γ に関する重さ $\delta \otimes \det^{-1/2}$，指標 α の Siegel モジュラー形式 F に対して

$$\int_{\Gamma\backslash Sp(V)} |f_F(\widetilde{\sigma})|^p d_{Sp(V)}(\sigma) < \infty$$

ならば F は尖点形式である．

Γ に関する重さ $\delta \otimes \det^{-1/2}$，指標 α の尖点形式の全体を $S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha)$ と書く．3.3 節で述べた Siegel 尖点形式の場合と同様に，定理 5.4.1 の $p = 2$ の場合を用いて，$\widetilde{Sp}(V)$ 上の正則離散系列表現と重さ $\delta \otimes \det^{-1/2}$ の Siegel 尖点形式の関係を与えることができる．即ち

$$\int_{\mathfrak{H}_V} (\delta \otimes \det{}^{-1/2}(\operatorname{Im} z)\varphi(z), \varphi(z))_\delta d_{|frakH_V}(z) < \infty$$

なる正則関数 $\varphi : \mathfrak{H}_V \to V_\delta$ の全体 $H_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ は

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathfrak{H}_V} (\delta \otimes \det{}^{-1/2}(\operatorname{Im} z)\varphi(z), \psi(z))_\delta d_{|frakH_V}(z)$$

を内積とする複素 Hilbert 空間となり，$\widetilde{Sp}(V)$ の $H_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ 上のユニタリ表現 $\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ が

$$(\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\widetilde{\sigma})\varphi)(z) = J_{1/2}(\widetilde{\sigma}^{-1}, z)^{-1} J_\delta(\sigma^{-1}, z)^{-1}\varphi(\sigma^{-1}(z))$$

により定義される．$H_{\delta\otimes\det^{-1/2}} \neq \{0\}$ となる必要十分条件は $m_n > n$ なることであり，このとき $(\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}, H_{\delta\otimes\det^{-1/2}})$ は $\widetilde{Sp}(V)$ の既約ユニタリ表現となり，“最小の” $\widetilde{K}$-タイプ $\delta \otimes \det^{-1/2}$ を重複度 1 で含む．

定理 5.4.2 $m_n > n$ ならば，$F \mapsto f_F$ は複素 Hilbert 空間の同型

$$S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha) \tilde{\to} \mathcal{A}_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{Sp}(V), \alpha, \pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}})$$

を与える．よって $F \in S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha)$ と $\beta \in V_\delta^*$ に対して

$$\theta_{F\otimes\beta}(\widetilde{\sigma}) = (\dim\delta)^{1/2}\langle\beta, f_F(\widetilde{\sigma})\rangle \qquad (\widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V))$$

とおくと，$F \otimes \beta \mapsto \theta_{F\otimes\beta}$ は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型

$$S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \alpha)\otimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \tilde{\to} L^2(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{Sp}(V), \alpha^{-1}; \check{\pi}_{\delta\otimes\det^{-1/2}}, \check{\delta} \otimes \det{}^{1/2})$$

に延長される．

5.5　V を有限次元複素ベクトル空間とし，$\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda \subset V$ をとる．実双線形形式 $Q : V \times V \to \mathbb{C}$ が，任意の $x, y \in V$ に対して

$$Q(\sqrt{-1}x, y) = \sqrt{-1}Q(x, y), \qquad (Q(x, y) - Q(y, x) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$$

を満たすとき，Q を V 上の**準 Hermite 形式**と呼ぶ．このとき

$$H_Q(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Q(\sqrt{-1}x, y) - Q(x, \sqrt{-1}y)) \qquad (x, y \in V)$$

は V 上の Hermite 形式となり

$$D_Q(x, y) = \operatorname{Im} H_Q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-1}}(Q(x, y) - Q(y, x)) \qquad (x, y \in V)$$

は V 上の交代形式である．写像

$$\alpha : \Lambda \to \mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

が，任意の $u, v \in \Lambda$ に対して

$$\alpha(u + v) = \alpha(u)\alpha(v)e^{\pi\sqrt{-1}D_Q(u,v)}$$

を満たすとき，α を準 Hermite 形式 Q に関する（或いは D_Q に関する）**準指標** と呼ぶ．準 Hermite 形式 Q に関する準指標が存在する必要十分条件は，任意の $u, v \in \Lambda$ に対して $D_Q(u, v) \in \mathbb{Z}$ なることである．

V 上の準 Hermite 形式 Q に関する準指標 α に対して

$$J_{Q,\alpha}(u, x) = \alpha(u) \exp\left(\pi Q(x, u) + \frac{\pi}{2}Q(u, u)\right) \qquad (u \in \Lambda, x \in V)$$

とおくと，任意の $u, v \in \Lambda$ に対して

$$J_{Q,\alpha}(u + v, x) = J_{Q,\alpha}(u, x + v)J_{Q,\alpha}(v, x)$$

となる．そこで V 上の正則関数 θ が，任意の $u \in \Lambda$ に対して

$$\theta(x + u) = J_{Q,\alpha}(u, x)\theta(x)$$

を満たすとき，θ を Λ に関する型 (Q, α) の**テータ関数**と呼ぶび，そのようなテータ関数の全体を $\mathcal{L}(Q, \alpha)$ と書く．

V 上の準 Hermite 形式に関する準指標が存在するとき

$$\Lambda_Q = \{x \in V \mid D_Q(u, x) \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall u \in \Lambda\}$$

は $\Lambda \subset \Lambda_Q$ なる V の部分加群であり，次は同値である；

1) $(\Lambda_Q : \Lambda) < \infty$,
2) V 上の実交代形式 D_Q は非退化,

3) V 上の Hermite 形式 H_Q は非退化.

次の定理が基本的である；

定理 5.5.1 V 上の準 Hermite 形式 Q に関する準指標 α に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(Q,\alpha) = \begin{cases} (\Lambda_Q : \Lambda)^{1/2} & : H_Q \text{ が正定値のとき}, \\ 0 & : H_Q \text{ が正定値でないとき}. \end{cases}$$

実斜交空間 (V,D) の偏極 $V = W' \oplus W$ をとり，$x \in W', y \in W$ に対して $\langle x,y\rangle = D(x,y)$ とおいて，$\langle L', L\rangle \subset \mathbb{Z}$ なる $\mathbb{Z}$-格子 $L' \subset W', L \subset W$ をとる．

$$L'_D = \{x \in W' \mid \langle x, L\rangle \subset \mathbb{Z}\}, \qquad L_D = \{y \in W \mid \langle L', y\rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

とおくと，$L' \subset L'_D \subset W'$ 及び $L \subset L_D \subset W$ は $\mathbb{Z}$-格子となる．このとき(4)で定義された Riemann のテータ級数

$$\vartheta[a](z,w) = \sum_{l \in L'} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l+\lambda, (l+\lambda)z\rangle + \langle l+\lambda, w+\mu\rangle\right)$$

$(a = (\lambda,\mu) \in W' \times W,\ z \in \mathfrak{H}_V,\ w \in W_{\mathbb{C}})$ について次が成り立つ；

定理 5.5.2 $a = (\lambda,\mu) \in W' \times W$ 及び $z \in \mathfrak{H}_V$ に対して，$\vartheta[a](z,*)$ は $W_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{Z}$-格子 $\Lambda_z = \{uz + v \mid u \in L', v \in L\}$ に関する型 (Q_z, α) のテータ関数である．ここで

$$Q_z = \frac{2}{\sqrt{-1}}\langle x(\operatorname{Im} z)^{-1}, \operatorname{Im} y\rangle \qquad (x,y \in W_{\mathbb{C}})$$

は $W_{\mathbb{C}}$ 上の準 Hermite 形式であり，α は

$$\alpha(u) = e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle u,\mu\rangle}, \quad \alpha(v) = e^{2\pi\sqrt{-1}\langle\lambda,v\rangle} \quad (u \in L', v \in L)$$

により定義される Q_z に関する準指標である．

ここで $h = ((x,y),0) \in H(V)$ $(x \in W', y \in W)$ に対して

$$\eta(h; z,w) = J_{Q_z,\mathbf{1}}(xz+y, w)^{-1}$$

であることに注意しよう（$\mathbf{1}$ は $\mathbf{1}|_{L'}$, $\mathbf{1}|_L$ が共に自明な指標となる Q_z に関する準指標）．従って $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{L}(Q_z,\alpha)$ に対して $\theta_1(w)\overline{\theta_2(w)}\kappa_z(w,w)$ は Λ_z-不変となり，$\mathcal{L}(Q_z,\alpha)$ 上の Hermite 内積が

$$(\theta_1,\theta_2) = \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda_z} \theta_1(w)\overline{\theta_2(w)}\kappa_z(w,w)d_z(w)$$

により定義される．このとき定理 5.5.2 の記号を用いて，次の定理が成り立つ；

定理 5.5.3 $a=(\lambda,\mu)\in W'\times W$ 及び $z\in\mathfrak{H}_V$ に対して $\{\vartheta[a+(v,0)](z,*)\}_{\dot v\in L'_D/L'}$ は $\mathcal{L}(Q_z,\alpha)$ の基底で，$v,v'\in L'_D$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\vartheta[a+(v,0)](z,*),\vartheta[a+(v',0)](z,*))\\
&\qquad=\begin{cases}(L'_D:L')\det(2\mathrm{Im}\,z)^{-1/2} & : v\equiv v' \pmod{L'},\\ 0 & : v\not\equiv v' \pmod{L'}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

6 保型形式のテータ対応の一般的原理

6.1 　実斜交空間 (V,D) の偏極 $V=W'\oplus W$ をとり，$z_0\in\mathfrak{H}_V$ を固定して $Sp(V)$ の二重被覆群 $\widetilde{Sp}(V)=\widetilde{Sp}(V;z_0)$ の Weil 表現 $(\omega,L^2(W'))$ を考えよう（ここでは $\chi(t)=\mathbf{e}(t)$ としておく）．(G,H) を V 上の **reductive dual pair** として，極大コンパクト部分群 $K\subset G, L\subset H$ をとって，被覆写像 $\varpi:\widetilde{Sp}(V)\to Sp(V)$ により

$$\widetilde{K}=\varpi^{-1}(K)\subset\widetilde{G}=\varpi^{-1}(G),\quad \widetilde{L}=\varpi^{-1}(L)\subset\widetilde{H}=\varpi^{-1}(H)$$

とおく．$\widetilde{G}$ の元と $\widetilde{H}$ の元は $\widetilde{Sp}(V)$ で可換だから，$\omega(\widetilde{G}),\omega(\widetilde{H})$ で生成される $L^2(W')$ 上の von Neumann 環

$$\mathcal{A}_G=\omega(\widetilde{G})'',\qquad \mathcal{A}_H=\omega(\widetilde{H})''$$

は互いに可換である[11]．更に Howe [8] が示したように

定理 6.1.1 $\mathcal{A}_H=\mathcal{A}'_G$，従って $\mathcal{A}_G=\mathcal{A}'_H$ である．

自然な群準同型写像 $i:\widetilde{G}\times\widetilde{H}\to\widetilde{Sp}(V)$ $((g,h)\mapsto gh)$ により $\omega|_{\widetilde{G}\times\widetilde{H}}=\omega\circ i$ は直積群 $\widetilde{G}\times\widetilde{H}$ の $L^2(W')$ 上のユニタリ表現となるが，上の定理から直ちに次の定理を得る；

定理 6.1.2 　1) $(\omega|_{\widetilde{G}\times\widetilde{H}})_{\mathrm{disc}}$ の既約分解は重複度 1 である，
2) $\widetilde{G}$ の既約ユニタリ表現 π に対して $\pi\otimes\pi'\hookrightarrow\omega|_{\widetilde{G}\times\widetilde{H}}$ なる $\widetilde{H}$ の既約ユニタリ表現は高々 1 個である．

そこで

$$(\omega|_{\widetilde{G}\times\widetilde{H}})_{\mathrm{disc}}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\pi_\lambda\otimes\pi'_\lambda$$

$(\pi_\lambda,\pi'_\lambda$ はそれぞれ $\widetilde{G},\widetilde{H}$ の既約ユニタリ表現）とおく．π_λ,π'_λ の表現空間を $H_{\pi_\lambda},H_{\pi'_\lambda}$ として，$H_{\pi_\lambda}\widehat{\otimes}H_{\pi'_\lambda}$ から $L^2(W')$ の $\pi_\lambda\otimes\pi'_\lambda$-成分 $L^2(W')_\lambda$ へのユ

[11] 複素 Hilbert 空間 X 上の有界線形作用素全体 $\mathcal{L}(X)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ に対して

$$\mathcal{S}'=\{T\in\mathcal{L}(X)\mid T\circ S=S\circ T \text{ for } \forall S\in\mathcal{S}\}$$

とおき，$\mathcal{S}''=(\mathcal{S}')'$ とおく．$\mathcal{L}(X)$ の自己共役的な $\mathbb{C}$-部分代数 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}''=\mathcal{A}$ を満たすとき，$\mathcal{A}$ を X 上の **von Neumann 代数** と呼ぶ．

ニタリ同値写像を U_λ とする．特に $\pi\otimes\pi'\hookrightarrow\omega_-\widetilde{G}\times\widetilde{H}$ なる $\widetilde{G},\widetilde{H}$ の既約ユニタリ表現 π,π' を選び，$\widetilde{K},\widetilde{L}$ の既約ユニタリ表現 δ,δ' はそれぞれ $\pi|_{\widetilde{K}},\pi'|_{\widetilde{L}}$ に重複度 1 で含まれると仮定する．$\mathbb{Z}$-格子 $L\subset W$ をとり

$$L'=\{x\in W'\mid\langle x,L\rangle\subset\mathbb{Z}\}$$

とおき $\Lambda=L'\oplus L$ とおいて

$$\Gamma\subset Sp_0(\Lambda)\cap G,\qquad\Gamma'\subset Sp_0(\Lambda)\cap H$$

なる合同部分群 Γ,Γ' をとる．W' 上の Schwartz 関数 $\varphi\in\mathcal{S}(W')$ に付随するテータ級数

$$\vartheta_\varphi(\widetilde{\sigma})=\sum_{l\in L'}(\omega(\widetilde{\sigma})\varphi)(l)\qquad(\widetilde{\sigma}\in\widetilde{Sp}(V))$$

の変換公式（系 4.4.3）

$$\vartheta_\varphi(\widetilde{\gamma}\widetilde{\sigma})=\rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})\vartheta_\varphi(\widetilde{\sigma})\qquad(\widetilde{\gamma}\in\widetilde{Sp}_0(\Lambda))$$

が成り立つから，$\rho_G=\rho_\Lambda|_{\widetilde{\Gamma}},\rho_H=\rho_\Lambda|_{\widetilde{\Gamma}'}$ とおく．

以上の設定の下に $f\in L^2(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G},\rho_G^{-1};\check{\pi},\check{\delta})$ と $\varphi\in\mathcal{S}(W')$ に対して

$$F_{f,\varphi}(h)=\int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}}f(g)\vartheta_\varphi(gh)d_{\widetilde{G}}(g)\qquad(h\in\widetilde{H})$$

とおくと

$$F_{f,\varphi}(\widetilde{\gamma}h)=\rho_H(\widetilde{\gamma})\cdot F_{f,\varphi}(h)\text{ for }\forall\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}'$$

である．ここで

定理 6.1.3 $\varphi=U_\lambda(u\otimes v)$ $(u\in H_{\pi_\lambda},v\in H_{\pi'_\lambda})$ とする．このとき $F_{f,\varphi}\neq0$ ならば $\pi_\lambda=\pi$（従って $\pi'_\lambda=\pi'$）かつ $u\in H_\pi(\delta)$ である．更に任意の $\psi\in C_c(\widetilde{H},\delta')^o$ に対して

$$\int_{\widetilde{H}}F_{f,\varphi}(hy)\psi(y)d_{\widetilde{H}}(y)=\widehat{\psi}_{\pi',\delta'}(\psi)$$

となる必要十分条件は $v\in H_{\pi'}(\delta')$ なることである．

[**証明**] まず任意の $\psi\in C_c(\widetilde{G},\delta)^o$ に対して

$$\begin{aligned}F_{f,\omega(\psi)\varphi}(h)&=\int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}}f(g)\left(\int_{\widetilde{G}}\psi(x)\vartheta_\varphi(ghx)d_{\widetilde{G}}(x)\right)d_{\widetilde{G}}(g)\\&=\int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}}d_{\widetilde{G}}(g)\int_{\widetilde{G}}d_{\widetilde{G}}(x)f(gx^{-1})\psi(x)\vartheta_\varphi(gh)\\&=\widehat{\psi}_{\check{\pi},\check{\delta}}(\overline{\psi^*})\cdot F_{f,\varphi}(h)=\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\psi)\cdot F_{f,\varphi}(h).\end{aligned}$$

ここで $u \notin H_{\pi_\lambda}(\delta)$ ならば

$$\begin{aligned}\omega(\psi)\varphi &= U_\lambda(\pi_\lambda(\psi)u \otimes v)\\ &= U_\lambda(\pi_\lambda(\psi * e_\delta)u \otimes v) = 0\end{aligned}$$

だから，任意の $\psi \in C_c(\widetilde{G}, \delta)^o$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\psi) \cdot F_{f,\varphi} = F_{f,\omega(\psi)\varphi} = 0,$$

よって $F_{f,\varphi} = 0$ となる．そこで

$$u \in H_{\pi_\lambda}(\delta) = \bigoplus^r V_\delta, \quad u = \sum_{i=1}^r u_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

$(u_i \in V_\delta)$ とおくと，任意の $\psi \in C_c(\widetilde{G}, \delta)^o$ に対して $A_\psi \in M_r(\mathbb{C})$ で

$$\pi_\lambda(\psi) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = A_\psi \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

なるものがとれて，$\psi \mapsto A_\psi$ は $C_c(\widetilde{G}, \delta)^o$ から $M_r(\mathbb{C})$ への全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像である．$\varphi_i = U_\lambda(u_i \otimes v) \in \mathcal{S}(W')$ とおくと $\varphi = \sum_{i=1}^r \varphi_i$ で

$$\begin{bmatrix} F_{f,\varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f,\varphi_r} \end{bmatrix} \neq 0$$

かつ，任意の $\psi \in C_c(\widetilde{G}, \delta)^o$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\psi) \begin{bmatrix} F_{f,\varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f,\varphi_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{f,\omega(\psi)\varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f,\omega(\psi)\varphi_r} \end{bmatrix} = A_\psi \begin{bmatrix} F_{f,\varphi_1} \\ \vdots \\ F_{f,\varphi_r} \end{bmatrix}$$

となる．よって $r = 1$ となり，従って任意の $\psi \in C_c(\widehat{G}, \delta)^o$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\pi_\lambda,\delta}(\psi) = A_\psi = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\psi)$$

となるから，$\pi_\lambda = \pi$ を得る．最後に任意の $\psi \in C_c(\widehat{H}, \delta')^o$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{H}} F_{f,\varphi}(hy)\psi(y) d_{\widehat{H}}(y) &= \int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}} d_{\widetilde{G}}(g) \int_{\widetilde{H}} d_{\widetilde{H}}(y) f(g)\vartheta_\varphi(ghy)\\ &= \int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}} f(g)\vartheta_{\omega(\psi)\varphi}(gh) d_{\widetilde{G}}(g)\\ &= \begin{cases} \widehat{\psi}_{\pi',\delta'}(\psi) \cdot F_{f,\varphi}(g) & : v \in H_{\pi'}(\delta'), \\ 0 & : v \notin H_{\pi'}(\delta') \end{cases}\end{aligned}$$

だから

$$\int_{\widetilde{H}} F_{f,\varphi}(hy)\psi(y)d_{\widetilde{H}}(y) = \widehat{\psi}_{\pi',\delta'}(\psi)\cdot F_{f,\varphi}(h) \text{ for } \forall\psi \in C_c(\widetilde{H},\delta')^o$$

ならば $v \in H_{\pi'}(\delta')$ となり，逆も成り立つ．■

よって $F_{f,\varphi}$ が $\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}$ 上で二乗可積分ならば $F_{f,\varphi} \in L^2(\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H},\rho_H;\pi',\delta')$ となる．

6.2 $H_\pi\widehat{\otimes}H_{\pi'}$ から $L^2(W')$ の $\pi\otimes\pi'$-成分へのユニタリ同値写像を U として，任意の $u \in H_\pi(\delta) = V_\delta, v \in H_{\pi'}(\delta') = V_{\delta'}$ に対して $U(u\otimes v) \in \mathcal{S}(W')$ であると仮定する．このとき $v \in V_{\delta'}$ に対して

$$\langle u, \Theta_v(s)\rangle = \vartheta_{U(u\otimes v)}(s) \qquad \forall u \in V_\delta, s \in \widetilde{Sp}(V)$$

により $\Theta_v : \widetilde{Sp}(V) \to V_\delta^*$ を定義すると

1) 任意の $k \in \widetilde{K}$ に対して $\Theta_v(sk) = \check{\delta}(k)^{-1}\Theta_v(s)$,
2) 任意の $k' \in \widetilde{K}'$ に対して $\Theta_v(sk') = \Theta_{\delta'(k')v}(s)$

である．実際，任意の $u \in V_\delta$ に対して

$$\begin{aligned}\langle u, \Theta_v(sk)\rangle &= \vartheta_{U(u\otimes v)}(sk) = \vartheta_{U(\delta(k)u\otimes v)}(s)\\ &= \langle \delta(k)u, \Theta_v(s)\rangle = \langle u, \check{\delta}(k)^{-1}\Theta_v(s)\rangle,\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\langle u, \Theta_v(sk')\rangle &= \vartheta_{U(u\otimes v)}(sk') = \vartheta_{U(u\otimes\delta'(k')v)}(s)\\ &= \langle u, \Theta_{\delta'(k')v)}(s)\rangle.\end{aligned}$$

そこで $f \in \mathcal{A}_\delta(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G},\rho_G,\pi)$ に対して

$$\langle v, F_f(h)\rangle = \int_{\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G}} \langle f(g), \Theta_v(gh)\rangle d_{\widetilde{G}}(g) \qquad \forall v \in V_{\delta'}, h \in \widetilde{H}$$

により $F_f : \widetilde{H} \to V_{\delta'}^*$ を定義する．V_δ の正規直交基底を $\{u_1,\cdots,u_d\}$ として $f_i(g) = (f(g),u_i)$ $(g \in \widetilde{G})$ とおくと

$$f_i \in L^2(\widetilde{\Gamma}\backslash\widetilde{G},\rho_G^{-1};\check{\pi},\check{\delta})$$

で，任意の $v \in V_{\delta'}$ に対して

$$\langle v, F_f(h)\rangle = \sum_{i=1}^{d} F_{f_i,\varphi_i}(h) \qquad (\varphi_i = U(u_i\otimes v) \in \mathcal{S}(W'))$$

となる．よって

1) 任意の $\gamma' \in \widetilde{\Gamma}'$ に対して $F_f(\gamma' h) = \rho_H(\gamma')F_f(h)$,
2) 任意の $k' \in \widetilde{K}'$ に対して $F_f(hk') = \check{\delta}'(k')^{-1}F_f(h)$,
3) 任意の $\psi \in C_c(\widetilde{H}, \check{\delta}')^o$ に対して

$$\int_{\widetilde{H}} F_f(hy^{-1})\psi(y)d_{\widetilde{H}}(y) = \widehat{\psi}_{\check{\pi}',\check{\delta}'}(\psi) \cdot F_f(h)$$

となる．よって F_f が $\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}$ 上で二乗可積分ならば $F_f \in \mathcal{A}_{\check{\delta}'}(\widetilde{\Gamma}'\backslash\widetilde{H}, \rho_H^{-1}, \check{\pi}')$ となる．

6.3 G がコンパクト群の場合（即ち $G = K$ の場合）を考えよう．

第 III 部
Jacobi 形式

7 実素点での様子

7.1 (V, D) を実斜交空間として，3.2 節の記号を用いる．Jacobi 群 $Sp(V)_J$ は連結な実 Lie 群で，その Lie 環は $\mathfrak{sp}(V)_J = \mathfrak{sp}(V) \times V \times \mathbb{R}$ に Lie 括弧積を

$$[(X, x, s), (Y, y, t)] = ([X, Y], xY - yX, D(x, y))$$

により定義したものであり，指数写像 $\exp : \mathfrak{sp}(V)_J \to Sp(V)_J$ は

$$\exp(X, x, s) = (\exp X, x \cdot e(X), s + 2^{-1}D(x \cdot f(X), x))$$

である．ここで

$$e(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+1)!}, \qquad f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+2)!}$$

である．$\mathcal{I}_J = \mathcal{I} \times V$ とおく．$g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$ $(h = (x, t) \in H(V))$ と $Z = (I, v) \in \mathcal{I}_J$ に対して

$$g(I, (v, 0))g^{-1} = (\sigma I \sigma^{-1}, (v + xI - x)\sigma^{-1}, D(x - v - vI, xI))$$

に注意すると，$(g, Z) \mapsto g{\cdot}Z = (\sigma I \sigma^{-1}, (v{+}xI{-}x)\sigma^{-1})$ により $Sp(V)_J$ は $\mathcal{I}_J$ に作用する．この作用は推移的で，$(I, 0) \in \mathcal{I}_J$ の固定部分群は $U(V_I, \langle\,,\rangle_I) \times Z(H(V))$ である．以下，$I_0 \in \mathcal{I}$ を固定して，$K = U(V_{I_0}, \langle\,,\rangle_{I_0})$ とおく．このとき $\mathfrak{p}_J^{\pm} = \mathfrak{p}^{\pm} \times W^{\pm}$ は $\mathfrak{sp}(V_{\mathbb{C}})_J$ の可換 Lie 部分環であり，$K_J = K \times Z(H(V))$ 及び $K_{J,\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} \times Z(H(V_{\mathbb{C}}))$ はそれぞれ $Sp(V)_J$ 及び $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$ の閉部分群となり，$P_J^{\pm} = \exp \mathfrak{p}_J^{\pm} = P^{\pm} \times W^{\pm}$ は $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$ の可換閉部分群である．指数写像 $\exp(X, x, 0) = (\exp X, x, 0)$ は $\mathfrak{p}_J^{\pm}$ から $P_J^{\pm}$ への全単射である．

$P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^- = P^+ K_{\mathbb{C}} P^- \times H(V_{\mathbb{C}})$ は $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$ の開部分集合で，$(p,k,q) \mapsto pkq$ は $P_J^+ \times K_{J,\mathbb{C}} \times P_J^-$ から $P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^-$ への全単射となり

$$Sp(V)_J \subset P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^-, \qquad K_J = Sp(V)_J \cap K_{J,\mathbb{C}} P_J^-$$

が成り立つ．そこで自然な単射

$$Sp(V)_J/K_J \to Sp(V)_J K_{J,\mathbb{C}} P_J^- / K_{J,\mathbb{C}} P_J^- \subset P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^- \to P_J^+ \xrightarrow{\log} \mathfrak{p}_J^+$$

による $\mathcal{I}_J \tilde{\to} Sp(V)_J/K_J$ の $\mathfrak{p}_J^+$ における像を $\mathcal{D}_J$ とおくと

1) $\mathcal{D}_J$ は $\mathfrak{p}_J^+$ の開部分集合である，
2) 任意の $g \in Sp(V)_J$ と $Z \in \mathcal{D}_J \subset \mathfrak{p}_J^+$ に対して

$$g \exp Z = \exp(g(Z)) \cdot \mathbf{J}(g,Z) \cdot q$$

   なる $g(Z) \in \mathcal{D}_J$, $\mathbf{J}(g,Z) \in K_{J,\mathbb{C}}$ 及び $q \in P_J^-$ が唯一存在する，
3) $(g,Z) \mapsto g(Z)$ により $Sp(V)_J$ は $\mathcal{D}_J$ に推移的に作用する．

ここで $\mathfrak{p}^+$ を $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+)$ と同一視して，$\mathcal{D}_J$ を $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W^-, W^+) \times W^+$ の部分集合として具体的に計算してみれば

1) $\mathcal{D}_J = \mathcal{D} \times W^+$,
2) $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$ $(h = (x,s) \in H(V))$ と $Z = (z,w) \in \mathcal{D}_J$ に対して

$$g(Z) = (\sigma(z), (w + x_- z + z_+) J(\sigma,z)^{-1}) \qquad (x = (x_-, x_+) \in V_{\mathbb{C}} = W^- \times W^+),$$

   又 $\mathbf{J}(g,Z) = (J(\sigma,z), 0, \eta) \in K_{J,\mathbb{C}}$ で

$$\begin{aligned}\eta = s &+ \frac{1}{2} D(x, (x_- z + x_+) J(\sigma,z)^{-1} \sigma) \\ &+ D(x, w J(\sigma,z)^{-1} \sigma) + \frac{1}{2} D(w, w J(\sigma,z)^{-1} \sigma)\end{aligned}$$

であることがわかる．ここで (V,D) の偏極 $V = W' \oplus W$ をとり $W^- \rho = W'_{\mathbb{C}}, W^+ \rho = W_{\mathbb{C}}$ なる $\rho \in Sp(V_{\mathbb{C}})$ を一つ固定しておく．

$$\widehat{\mathfrak{p}}_J^{\pm} = \mathrm{Ad}(\rho^{-1}) \mathfrak{p}_J^{\pm}, \qquad \widehat{P}_J^{\pm} = \exp \widehat{\mathfrak{p}}_J^{\pm} = \widehat{P}^{\pm} \times W_{\mathbb{C}}$$

とおき $\widehat{K}_{J,\mathbb{C}} = \rho^{-1} K_{J,\mathbb{C}} \rho = \widehat{K}_{\mathbb{C}} \times Z(H(V_{\mathbb{C}}))$ とおくと，$\widehat{P}_J^+ \widehat{K}_{J,\mathbb{C}} \widehat{P}_J^-$ は $Sp(V_{\mathbb{C}})_J$ の開部分集合で，$(p,k,q) \mapsto pkq$ は $\widehat{P}_J^+ \times \widehat{K}_{J,\mathbb{C}} \times \widehat{P}_J^-$ から $\widehat{P}_J^+ \widehat{K}_{J,\mathbb{C}} \widehat{P}_J^-$ への全単射となる．そこで $\rho Sp(V)_J \subset P_J^+ K_{J,\mathbb{C}} P_J^-$ に注意すると，$Z \in \mathcal{D}_J \subset \mathfrak{p}_J^+$ に対して $\rho \exp Z \in \exp \rho(Z) K_{J,\mathbb{C}} P_J^+$ なる $\rho(Z) \in \mathfrak{p}_J^+$ をとり $\widehat{Z} = \mathrm{Ad}(\rho^{-1}) \rho(Z) \in \widehat{\mathfrak{p}}_J^+$ とおく．$\mathfrak{p}^+ = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}})$ と同一視すれば

$$\{\widehat{Z} \in \widehat{\mathfrak{p}}_J^+ \mid Z \in \mathcal{D}_J\} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$$

となる．ここで $g \in Sp(V)_J$ と $Z \in \mathcal{D}_J$ に対して $g(\widehat{Z}) = \widehat{g(Z)}$ により，$Sp(V)_J$ は $\mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$ に推移的に作用する．具体的に計算すれば，

$g=(\sigma,h)\in Sp(V)_J$ $(\sigma\in Sp(V), h=(x,s)\in H(V))$ と $Z=(z,w)\in\mathfrak{H}_{V,J}$ $(z\in\mathfrak{H}, w\in W_{\mathbb{C}})$ に対して

$$g(Z)=(\sigma(z),(w+x'z+x'')J(\sigma,z)^{-1})\quad (x=(x',x'')\in V=W'\times W)$$

となる．又，$Z\in\widehat{\mathfrak{p}}_J^+$ とみると $\exp Z\in Sp(V)_J\widehat{K}_{J,\mathbb{C}}\widehat{P}_J^-$ で，

$$g\exp Z=\exp g(Z)\cdot\mathbf{J}(g,Z)\cdot q$$

なる $\mathbf{J}(g,Z)\in\widehat{K}_{J,\mathbb{C}}, q\in\widehat{P}_J^-$ が唯一存在する．具体的には $\mathbf{J}(g,Z)=(J(\sigma,z),\eta)$ で

$$\begin{aligned}\eta=s+\frac{1}{2}&D(x,(x'z+x'')J(\sigma,z)^{-1}\sigma)\\&+D(x,wJ(\sigma,z)^{-1}\sigma)+\frac{1}{2}D(w,wJ(\sigma,z)^{-1}\sigma).\end{aligned}$$

である．更に

$$\check{K}_{J,\mathbb{C}}=\overline{\rho}^{-1}K_{J,\mathbb{C}}\rho=\check{K}_{\mathbb{C}}\times Z(H(V_{\mathbb{C}}))\qquad(\check{K}_{\mathbb{C}}=\overline{\rho}^{-1}K_{\mathbb{C}}\rho)$$

とおくと，$Z,Z'\in\mathfrak{H}_{V,J}$ に対して

$$\overline{\exp Z}^{-1}\exp Z'\in\widehat{P}^-K(Z',Z)^{-1}\widehat{P}^-$$

なる $K(Z',Z)\in\check{K}_{J,\mathbb{C}}$ が存在する．具体的には $Z=(z,w), Z'=(z',w')$ $(z,z'\in\mathfrak{H}_V, w,w'\in W_{\mathbb{C}})$ とおいて $K(Z',Z)=(K(z',z),\kappa)$ と書くと

$$K(z',z)=\begin{bmatrix}0 & z'-\overline{z}\\ -(z'-\overline{z})^{-1} & 0\end{bmatrix}^{-1},\quad \kappa=\frac{1}{2}\langle(w'-\overline{w})(z'-\overline{z})^{-1},w'-\overline{w}\rangle$$

となる．

7.2

$$GSp(V)=\left\{\sigma\in GL_{\mathbb{R}}(V)\;\middle|\;\begin{array}{l}D(x\sigma,y\sigma)=\nu(\sigma)D(x,y)\text{ for }\forall x,y\in V,\\ \nu(\sigma)\in\mathbb{R}^\times\end{array}\right\}$$

は $Sp(V)$ を正規部分群としてふくみ，$\sigma\in GSp(V)$ は $X\in\mathfrak{sp}(V)$ に

$$\exp(t\cdot\mathrm{Ad}(\sigma)X)=\sigma\exp(t\cdot X)\sigma^{-1}\qquad(\forall t\in\mathbb{R})$$

により作用する．具体的には $\mathrm{Ad}(\sigma)X=\sigma X\sigma^{-1}$ である．更に $\sigma\in GSp(V)$ は $h=(x,t)\in H(V)$ に $h^\sigma=(x\sigma,\nu(\sigma)t)$ により $H(V)$ の自己同型群として作用して，半直積 $GSp(V)_J=GSp(V)\ltimes H(V)$ は $Sp(V)_J$ を正規部分群として含む．特に $\sigma\in GSp(V)$ と $(X,x,s)\in\mathfrak{sp}(V)_J$ に対して

$$\exp(t\cdot\mathrm{Ad}(\sigma)(X,x,s))=\sigma\exp(t(X,x,s))\sigma^{-1}\qquad(\forall t\in\mathbb{R})$$

により $GSp(V)$ の $\mathfrak{sp}(V)_J$ への作用が定義される．具体的には

$$\mathrm{Ad}(\sigma)(X,x,s) = (\sigma X \sigma^{-1}, x\sigma^{-1}, \nu(\sigma)^{-1}s)$$

である．ここで $GSp^+(V) = \{\sigma \in GSp(V) \mid \nu(\sigma) > 0\}$ とおいて

$$\tau = \begin{bmatrix} \nu \cdot {}^t d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in GSp^+(V) \qquad (0 < \nu = \nu(\tau) \in \mathbb{R}, d \in GL_{\mathbb{R}}(W))$$

とおく．$Z = (z,w) \in \mathfrak{H}_J$ に対して，$\mathfrak{H}_J \subset \widehat{\mathfrak{p}}_J^+ \subset \mathfrak{sp}_J(V_{\mathbb{C}})$ とみれば

$$Z = (\begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, (0,w), 0) \in \mathfrak{sp}(V_{\mathbb{C}}) \times V_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$$

であるから

$$\mathrm{Ad}(\tau)Z = (\nu \cdot {}^t d^{-1} z d^{-1}, wd^{-1}) \in \mathfrak{H}_{V,J}$$

である．$\mathrm{Ad}(\tau)z = \nu \cdot {}^t d^{-1} z d^{-1} \in \mathfrak{H}_V$ とおく．一方 $g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J$ に対して

$$g \cdot \exp Z = \exp g(Z) \cdot \mathbf{J}(g,Z) \cdot q \qquad (\mathbf{J}(g,Z) = (J(\sigma,z),\eta))$$

から

$$\begin{aligned} \tau g \tau^{-1} \exp(\mathrm{Ad}(\tau)Z) &= \tau g \cdot \exp Z \tau^{-1} \\ &= \exp(\mathrm{Ad}(\tau)g(Z)) \cdot \tau \mathbf{J}(g,Z)\tau^{-1} \cdot \tau q \tau^{-1}, \end{aligned}$$

従って $(\tau g \tau^{-1})(\mathrm{Ad}(\tau)Z) = \mathrm{Ad}(\tau)(g(Z))$ で

$$\tau \mathbf{J}(g,Z)\tau^{-1} = (\tau J(\sigma,z)\tau^{-1}, \nu^{-1} \cdot \eta)$$

である．特に

$$J(\tau\sigma\tau^{-1}, z) = \tau J(\sigma,z)\tau^{-1}$$

であり，又 $\eta(\tau g \tau^{-1}; \mathrm{Ad}(\tau)Z) = \eta(g;Z)^{\nu(\tau)^{-1}}$, 即ち

$$\eta(\tau^{-1} g \tau; Z) = \eta(g; \mathrm{Ad}(\tau)Z)^{\nu(\tau)} \tag{5}$$

となる[12]．

7.3 $\Lambda \subset V_{\mathbb{Q}}$ を $D(\Lambda,\Lambda) \subset \mathbb{Z}$ なる $\mathbb{Z}$-格子として，$\chi(0,t) = \mathbf{e}(t)$ なる群準同型写像 $\chi : H(\Lambda) \to \mathbb{C}^1$ に対して

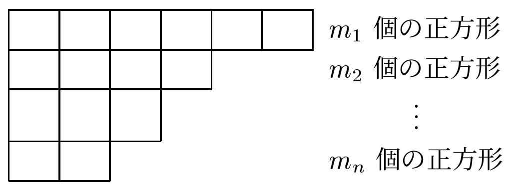
$$Sp(\Lambda;\chi) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid \chi(h^\gamma) = \chi(h) \text{ for } \forall h \in H(\Lambda)\}$$

[12] ここで $\eta(g;Z) = \mathbf{e}(\eta)$ ならば $\eta(g;Z)^{\nu(\tau)} = \mathbf{e}(\nu(\tau)\cdot\eta)$ と定義する．

とおく．ここで $\alpha(x) = \chi(x, 0)$ $(x \in \Lambda)$ は D に関する準指標となり，$x \mapsto \alpha(x)^2$ は群準同型写像となる．そこで $\mathrm{Ker}\,\alpha^2 \subset \Lambda$ は指数有限であると仮定すると，十分大きな $0 < N \in \mathbb{Z}$ をとれば

$$Sp(\Lambda, N) = \{\gamma \in Sp(\Lambda) \mid x\gamma \equiv x \pmod{N \cdot \Lambda} \text{ for } \forall x \in \Lambda\} \subset Sp(\Lambda; \chi)$$

となる．そこで部分群 $Sp(\Lambda, N) \subset \Gamma \subset Sp(\Lambda; \chi)$ をとり，$\Gamma_J = \Gamma \ltimes H(\Lambda)$ とおいて，$g = (\gamma, h) \in \Gamma_J$ に対して $\chi_J(g) = \chi(h)$ とおく．(δ, V_δ) を $\widehat{K}_{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現で Young 図形



に対応しているとして，$m_n > 0$ と仮定する．正則関数

$$F : \mathfrak{H}_{V,J} \to V_\delta \qquad (\mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}})$$

は任意の $g = (\gamma, h) \in \Gamma_J$ に対して変換公式

$$F(g(Z)) = \chi_J(g)\eta(g; Z)^{-1} J_\delta(\gamma, z) F(Z) \qquad (Z = (z, w) \in \mathfrak{H}_{V,J})$$

を満たすとしよう．このとき $\mathbb{Z}$-格子 $L' \subset W'_{\mathbb{Q}}, L \subset W_{\mathbb{Q}}$ をとって

a) $L' \oplus L \subset \Lambda$ かつ任意の $(u, v) \in L' \times L$ に対して $\alpha(u+v) = \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle u, v\rangle\right)$,

b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)\right\}$, 但し $L^* = \{x \in W' \mid \langle x, L\rangle \subset \mathbb{Z}\}$ とおき $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L) = \{b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W', W) \mid L^* b \subset L\}$ とおく

を満たすようにできて

1) 任意の $b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)$ に対して $F(z + b, w) = F(z, w)$,
2) 任意の $l' \in L', l \in L$ に対して

$$F(z, w + l'z + l) = J_{Q_z, \alpha}(l'z + l, w) F(z, w). \tag{6}$$

特に任意の $l \in L$ に対して $F(z, w + l) = F(z, w)$

となる．よって F の正則性から

$$F(z, w) = \sum_{T \in \mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*, L)} \sum_{\lambda \in L^*} a(T, \lambda) \mathbf{e}(\mathrm{tr}(Tz) + \langle l, w\rangle)$$

なる Fourier 展開をもつ．ここで

$$\mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*, L) = \{T \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W, W') \mid \mathrm{tr}(Tb) \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)\}$$

である．さて任意の $h=((a,b),t)\in H(V_{\mathbb{Q}})$ $(a\in W'_{\mathbb{Q}}, b\in W_{\mathbb{Q}})$ に対して

$$\begin{aligned} F^h(z) &= \eta(h;z,0)F(h(z,0)) \\ &= \mathbf{e}\left(t+\frac{1}{2}\langle a, az+b\rangle\right)\cdot F(z,az+b) \qquad (z\in\mathfrak{H}_V) \end{aligned}$$

とおく．$\sigma\in Sp(V)$ に対して

$$h\sigma h^{-1}=\sigma h^{\sigma}h^{-1}=((a,b)(\sigma-1),-\frac{1}{2}D((a,b)\sigma,(a,b)))$$

だから，十分大きな $0<N\in\mathbb{Z}$ をとれば，任意の $\gamma\in Sp(\Lambda,N)\subset\Gamma$ に対して $h\gamma h^{-1}\in\Gamma_J=\Gamma\ltimes H(\Lambda)$ となり

$$\begin{aligned} F^h(\gamma(z)) &= \eta(h;\gamma(z,0))F(h\gamma h^{-1}h(z,0)) \\ &= \eta(h;\gamma(z,0))\eta(h\gamma h^{-1};h(z,0))^{-1}J_\delta(\gamma,z)F(h(z,0)) \\ &= \eta(\gamma;z,0)^{-1}\eta(h^{-1};h(z,0))^{-1}J_\delta(\gamma,z)F(h(z,0)) \\ &= J_\delta(\gamma,z)F^h(z) \end{aligned}$$

となる．一方，$F(z,w)$ の Fourier 展開から

$$\begin{aligned} F^h(z) &= \sum_{T,\lambda} a(T,\lambda)\mathbf{e}\left(\mathrm{tr}(Tz)+\langle\lambda, az+b\rangle+\frac{1}{2}\langle a, ax+b\rangle+t\right) \\ &= \sum_{T,\lambda} a(T,\lambda)\mathbf{e}\left(\mathrm{tr}\left(T-\frac{1}{2}{}^t\lambda\lambda+\frac{1}{2}{}^t(\lambda+a)(\lambda+a)\right)z+\langle\lambda,b\rangle\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \times\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle a,b\rangle+t\right) \end{aligned}$$

となる．ここで $a\in W'$ に対して ${}^taa\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W,W')$ を

$$\mathrm{tr}({}^taa)S=\langle a,aS\rangle \text{ for } \forall S\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W',W)$$

により定義する．よって次は同値である；

1) $a(T,\lambda)\neq 0$ となるのは $T-\frac{1}{2}{}^t\lambda\lambda\geq 0$ の場合に限る，
2) 任意の $h\in H(V_{\mathbb{Q}})$ と $0<y_0\in\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W',W)$ に対して $|F^h(z)|$ は $\{z\in\mathfrak{H}_V \mid \mathrm{Im}\, z\geq y_0\}$ で有界である．

$\mathbb{Z}$-格子 L', L が上の二条件 a), b) に加えて更に

c) $L'^*=\{y\in W \mid \langle L',y\rangle\subset\mathbb{Z}\}$ とおいて $L\subset 2L'^*$

を満たすようにとる．(6) より $z\in\mathfrak{H}_V$ を固定すると $F(z,*)\in\mathcal{L}(Q_z,\mathbf{1})$ となるから，定理 5.5.3 の基底を用いて

$$F(z,w)=\sum_{\dot{v}\in L^*/L} f_{\dot{v}}(z)\vartheta[v,0](z,w)$$

とおく．$f_{\dot{v}}(z)$ は $z \in \mathfrak{H}_V$ の正則関数である．任意の $b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)$ をとると，$l \in L', v \in L^*$ に対して

$$\begin{aligned}\langle l+v, lb\rangle = \langle l, (l+v)b\rangle &\in \langle L', L^*b\rangle \subset \langle L', L\rangle \subset \langle L', 2L'^*\rangle \subset a\mathbb{Z},\\ \langle l, vb\rangle &\in \langle L', L^*b\rangle \subset 2\mathbb{Z},\\ \langle v, vb\rangle &\in \langle L^*, L^*b\rangle \subset \langle L^*, L\rangle \subset \mathbb{Z}\end{aligned}$$

より $\langle l+v, (l+v)b\rangle \equiv \langle v, vb\rangle \pmod{2\mathbb{Z}}$ となるから

$$\vartheta[v,0](z+b, w) = \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle v, vb\rangle\right) \cdot \vartheta[v,0](z,w)$$

となる．よって $F(z+b, w) = F(z,w)$ より

$$f_{\dot{v}}(z+b) = \mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}\langle v, vb\rangle\right) \cdot f_{\dot{v}}(z) \qquad (v \in L^*)$$

となる．よって $\widetilde{f}_v(z) = \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle v, vz\rangle\right) \cdot f_{\dot{v}}(z)$ とおくと，任意の $b \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(L^*, L)$ に対して $\widetilde{f}_v(z+b) = \widetilde{f}_v(z)$ となるから，$f_{\dot{v}}(z)$ の正則性から

$$\begin{aligned}f_{\dot{v}}(z) &= \sum_{T \in \mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*, L)} a_v(T)\mathbf{e}\left(\mathrm{tr}(Tz) - \frac{1}{2}\langle v, vz\rangle\right)\\ &= \sum_{T \in \mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*, L)} a_v(T)\mathbf{e}\left(\mathrm{tr}(T - \frac{1}{2}\,{}^t vv)z\right)\end{aligned}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}F(z,w) &= \sum_{\dot{v} \in L^*/L'} f_{\dot{v}}(z)\vartheta[v,0](z,w)\\ &= \sum_{\dot{v} \in L^*/L'} f_{\dot{v}}(z) \sum_{l \in L'} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l+v, (l+v)z\rangle + \langle l+v, w\rangle\right)\\ &= \sum_{\lambda \in L^*} f_{\dot{\lambda}}(z)\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle \lambda, \lambda z\rangle + \langle \lambda, w\rangle\right)\\ &= \sum_{\lambda \in L^*} \sum_{T \in \mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*, L)} a_\lambda(T)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(Tz) + \langle \lambda, w\rangle)\end{aligned}$$

となる．即ち $a(T, \lambda) = a_\lambda(T)$ $(T \in \mathrm{Sym}^*_{\mathbb{Z}}(L^*, L), \lambda \in L^*)$ である．以上を踏まえて Jacobi 形式と Jacobi 尖点形式を次のように定義する；

定義 7.3.1 V_δ に値をとる $\mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数 F が

1) 任意の $g = (\gamma, h) \in \Gamma_J = \Gamma \ltimes H(\Lambda)$ に対して変換公式

$$F(g(Z)) = \chi_J(g)\eta(g; Z)^{-1} J_\delta(\gamma, z)F(Z) \qquad (Z = (z,w) \in \mathfrak{H}_{V,J})$$

を満たし，

2) 任意の $h \in H(V_{\mathbb{Q}})$ に対して

$$F^h(z) = \eta(h;(z,0))F(h(z,0)) \qquad (z \in \mathfrak{H}_V)$$

が 3.3 節の意味で重さ δ の Siegel モジュラー形式となる

とき，F を Γ_J に関して指標 χ をもつ重さ δ の **Jacobi 形式**と呼ぶ．更に

3) 任意の $h \in H(V_{\mathbb{Q}})$ に対して $F^h(z)$ $(z \in \mathfrak{H}_V)$ が 3.3 の意味で Siegel 尖点形式である

とき F を **Jacobi 尖点形式**と呼ぶ．

Γ_J に関して指標 χ をもつ重さ δ の Jacobi 形式全体は有限次元複素ベクトル空間をなす．Koecher の定理から，$\dim_{\mathbb{R}} V > 2$ ならば，上の定義の条件 2) は条件 1) から自動的に従う．Γ_J に関して指標 χ をもつ重さ δ の Jacobi 尖点形式のなす複素ベクトル空間を $S_\delta(\Gamma_J, \chi)$ と書く．F が Jacobi 尖点形式ならば

$$\int_{\Gamma_J \backslash \mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z)F(z,w), F(z,w))_\delta \kappa_z(w,w) d_{\mathfrak{H}_V}(z) d_z(w) < \infty$$

である（$(\,,\,)_\delta$ は $k \mapsto J_\delta(k, z_0)$ が K の既約ユニタリ表現となるように定めた V_δ 上の Hermite 内積）．これにより $S_\delta(\Gamma_J)$ に Hermite 内積が定義される．逆に，$m_n > n$ のとき， Jacobi 形式 F に対して

$$\int_{\Gamma_J \backslash \mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z)F(z,w), F(z,w))_\delta \kappa_z(w,w) d_{\mathfrak{H}_V}(z) d_z(w) < \infty$$

ならば F は Jacobi 尖点形式となる．

7.4 $Sp(V)_V = Sp(V) \ltimes H(V)$ は $\mathfrak{H}_{V,J} = \mathfrak{H}_V \times W_{\mathbb{C}}$ に推移的に作用し，$(z_0, 0) \in \mathfrak{H}_{V,J}$ の固定部分群は $K \times Z(H(V))$ である．そこで $K \times Z(H(V))$ の V_δ 上の既約ユニタリ表現 $(k,t) \mapsto J_\delta(k,z_0) \cdot \mathbf{e}(-t)$ を $\delta \otimes \overline{\mathbf{e}}$ と書いて，誘導表現 $\mathrm{Ind}_{K \times Z(H(V))}^{Sp(V)_J}(\delta \otimes \overline{\mathbf{e}})$ を $\mathfrak{H}_{V,J}$ 上の関数の空間に実現する．即ち，

$$\int_{\mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z)\varphi(z,w), \varphi(z,w))_\delta \kappa_z(w,w) d_{\mathfrak{H}_{V,J}}(z,w) < \infty$$

なる可測関数 $\varphi : \mathfrak{H}_{V,J} \to V_\delta$ 全体 $E_{\delta \otimes \overline{\mathbf{e}}}$ は

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathfrak{H}_{V,J}} (\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\,z)\varphi(z,w), \psi(z,w))_\delta \kappa_z(w,w) d_{\mathfrak{H}_{V,J}}(z,w)$$

を内積とする複素 Hilbert 空間である．但し $d_{\mathfrak{H}_{V,J}}(z,w) = d_{\mathfrak{H}_V}(z) d_z(w)$ は $\mathfrak{H}_{V,J}$ 上の $Sp(V)_J$-不変測度である．ここで

$$\mathbf{J}_{\delta \otimes \overline{\mathbf{e}}}(g, Z) = J_\delta(\sigma, z)\eta(g; Z)^{-1} \quad (g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J, Z = (z,w) \in \mathfrak{H}_{V,J}$$

とおいて，$E_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ 上の $Sp(V)_J$ のユニタリ表現 $\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ が

$$(\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}(g)\varphi)(Z) = J_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}(g^{-1}, Z)\varphi(g^{-1}(Z))$$

により定義すれば，誘導表現 $\mathrm{Ind}_{K\times Z(H(V))}^{Sp(V)_J}(\delta\otimes\overline{\mathbf{e}})$ は $(\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}, E_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}})$ とユニタリ同値である．ここで特に正則なる $\varphi\in E_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ のなす部分空間 $H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ は，$E_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ の $Sp(V)_J$-不変な閉部分空間で，$H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ の $Sp(V)_J$-不変な閉部分空間は自明なものに限る．

さて $Sp(V)_J$ のユニタリ表現 $(\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}, H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}})$ を $\widetilde{Sp}(V)_J = \widetilde{Sp}(V)\ltimes H(V)$ のユニタリ表現とみれば，5.4 節で定義した $\widetilde{Sp}(V)$ の正則離散系列表現と $\widetilde{Sp}(V)_J$ の既約ユニタリ表現 $\omega_{\chi,J}$ との関係が見えてくる．即ち $\varphi\in H_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ と $\psi\in\mathcal{H}_{z_0}$ に対して $\mathfrak{H}_{V,J}$ 上の関数 $\varphi\boxtimes\psi$ を

$$(\varphi\boxtimes\psi)(z,w) = \det(\mathrm{Im}\, z)^{-1/4}\varphi(z)\cdot(U_{z,z_0}\psi)(w) \qquad (z\in\mathfrak{H}_V, w\in W_{\mathbb{C}})$$

により定義すると，$\varphi\otimes\psi\mapsto\varphi\boxtimes\psi$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現のユニタリ同値

$$(\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}, H_{\delta\otimes\det^{-1/2}})\widehat{\otimes}(\check{\omega}_{\chi,J}, \mathcal{H}_{z_0}) \tilde{\to} (\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}, H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}) \tag{7}$$

を与える．ここで $\pi_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ は自然な射影 $\widetilde{Sp}(V)_J\to\widetilde{Sp}(V)$ により $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現とみなしている．よって特に $H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}\neq\{0\}$ となる必要十分条件は $m_n > n$ なることであり，このとき $(\pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}, H_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}})$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ の既約ユニタリ表現となる．

さて Jacobi 尖点形式 $F\in S_\delta(\Gamma_J,\chi)$ に対して $Sp(V)_J$ 上の関数 f_F を

$$f_F(g) = \mathbf{J}_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}(g;(z_0,0))^{-1}F(g(z_0,0)) \qquad (g\in Sp(V)_J)$$

により定義すると

1) 任意の $g'\in\Gamma_J$ に対して $f_F(g'g) = \chi_J(g')f_F(g)$,
2) 任意の $k\in K$ に対して $f_F(gk) = \delta(k)^{-1}f_F(g)$,
3) $\displaystyle\int_{\Gamma_J\backslash Sp(V)_J}|f_F(g)|^2 d(\dot{g}) = \int_{\Gamma_J\backslash\mathfrak{H}_{V,J}}(\delta((\mathrm{Im}\,\widehat{0})^{-1}\mathrm{Im}\, z)F(z,w), F(z,w))_\delta\kappa_z(w,w)d_{\mathfrak{H}_V}(z)d_z(w) < \infty$

である．より正確には次の定理が成り立つ；

定理 7.4.1 $F\mapsto f_F$ は複素線形同型写像

$$S_\delta(\Gamma_J,\chi)\tilde{\to}\mathcal{A}_\delta(\Gamma_J\backslash Sp(V)_J, \chi_J^{-1}, \pi_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}})$$

を与える．従って $F\in S_\delta(\Gamma_J,\chi)$ と $\alpha\in V_\delta^*$ に対して

$$\theta_{F\otimes\alpha}(g) = (\dim\delta)^{1/2}\langle\alpha, f_F(g)\rangle \qquad (g\in Sp(V)_J)$$

とおくと，$F\otimes\alpha\mapsto\theta_{F\otimes\alpha}$ は複素 Hilbert 空間のユニタリ同型

$$S_\delta(\Gamma_J,\chi)\otimes_{\mathbb{C}}V_\delta^*\tilde{\to}L^2(\Gamma_J\backslash Sp(V)_J;\chi_J;\check{\pi}_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}},\check{\delta})$$

に延長される．

7.5 実斜交空間 (V,D) の偏極 $V=W'\oplus W$ をとり，$\mathbb{Z}$-格子 $L'\subset W',L\subset W$ は

$$L'=\{x\in W'\mid\langle x,L\rangle\subset\mathbb{Z}\}$$

なるものとして $\Lambda=L'\oplus L$ とおく．$H(\Lambda)$ のユニタリ指標

$$\chi_\Lambda:H(\Lambda)\to\mathbb{C}^1\qquad(((x,y),t)\mapsto\mathbf{e}\left(t+\frac{1}{2}\langle x,y\rangle\right))$$

に対して

$$Sp_0(\Lambda)=\{\gamma\in Sp(\Lambda)\mid\chi_\lambda(h^\gamma)=\chi_\Lambda(h)\text{ for }\forall h\in H(\Lambda)\}$$

は $Sp(\Lambda)$ の部分群で，十分大きな $0<N\in\mathbb{Z}$ をとれば $Sp(\Lambda,N)\subset Sp_0(\Lambda)$ であるから，$Sp(\Lambda,N)\subset\Gamma\subset Sp_0(\Lambda)$ なる部分群 Γ をとる．$\Gamma_J=\Gamma\ltimes H(\Lambda)$ のユニタリ指標

$$\chi_{\Lambda,J}:\Gamma_J\to\mathbb{C}^1\qquad((\gamma,h)\mapsto\chi_\Lambda(h))$$

からの誘導表現 $\pi^{\chi_{\Lambda,J}}=\mathrm{Ind}_{\Gamma_J}^{Sp(V)_J}\chi_{\Lambda,J}$ を考える．$Sp(V)$ の二重被覆群

$$\varpi:\widetilde{Sp}(V)=\widetilde{Sp}(V;z_0)\to Sp(V)$$

に対して $\widetilde{\Gamma}-\varpi^{-1}(\Gamma)\subset\widetilde{Sp}(V)$ とおく．$\widetilde{Sp}(V)_J=\widetilde{Sp}(V)\ltimes H(V)$ とおき，自然な射影 $\varpi_J:\widetilde{Sp}(V)_J\to SP(V)_J$ を通して $\widetilde{\pi}^{\chi_{\Lambda,J}}=\pi^{\chi_{\Lambda,J}}\circ\varpi_J$ を $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現とみれば

$$\widetilde{\pi}^{\chi_{\Lambda,J}}=\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}_J}^{\widetilde{Sp}(V)_J}\widetilde{\chi}_{\Lambda,J}\qquad(\widetilde{\Gamma}_J=\widetilde{\Gamma}\ltimes H(\Lambda),\widetilde{\chi}_{\Lambda,J}=\chi_{\Lambda,J}\circ\varpi_J)$$

である．$\widetilde{\pi}^{\chi_{\Lambda,J}}$ に定理 4.5.1 を適用しよう．実際，$\widetilde{Sp}(V)$ の Weil 表現を $\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ 上に実現しておこう．このとき $\varphi\in\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{Sp}(V)}\rho_\Lambda^{-1}$ と $\psi\in\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ に対して

$$(\varphi\boxtimes\psi)(\widetilde{g})=\varphi(\widetilde{\sigma})(\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)\qquad(\widetilde{g}=(\widetilde{\sigma},h)\in\widetilde{Sp}(V)_J)$$

とおくと，$(\widetilde{\gamma},h')\in\widetilde{\Gamma}_J$ に対して

$$\begin{aligned}(\varphi\boxtimes\psi)((\widetilde{\gamma},h')\widetilde{g})&=\varphi(\widetilde{\gamma}\widetilde{\sigma})(\omega_J(\widetilde{\gamma},h')\circ\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)\\&=\rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})^{-1}\varphi(\widetilde{\sigma})(\rho_\Lambda(\widetilde{\gamma})\mathbf{r}(\gamma)\circ\Pi(h')\circ\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)\\&=\varphi(\widetilde{\sigma})(\omega_J(\widetilde{g})\psi)(h')=\chi_\Lambda(h')\varphi(\widetilde{\sigma})(\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)\\&=\widetilde{\chi}_{\Lambda,J}(\widetilde{\gamma},h')(\varphi\boxtimes\psi)(\widetilde{g})\end{aligned}$$

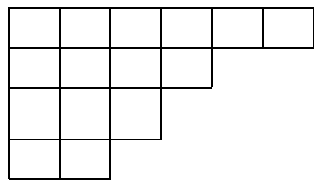
となるから $\varphi\boxtimes\psi\in\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}_J}^{\widetilde{Sp}(V)_J}\widetilde{\chi}_{\Lambda,J}$ となる．更に正確には

命題 7.5.1 $\varphi\otimes\psi\mapsto\varphi\boxtimes\psi$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現のユニタリ同値写像

$$(\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}^{\widetilde{Sp}(V)}\rho_\Lambda^{-1})_J\otimes\omega_J\tilde{\to}\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}_J}^{\widetilde{Sp}(V)_J}\widetilde{\chi}_{\Lambda,J}$$

に延長される．

さて $GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の有限次元既約表現 (δ,V_δ) は Young 図形



m_1 個の正方形
m_2 個の正方形
$\vdots$
m_n 個の正方形

に対応しているとして，$m_n>n$ とする．このとき $\widetilde{Sp}(V)_J$ のユニタリ表現のユニタリ同値(7) から反傾表現のユニタリ同値

$$\check{\pi}_{\delta\otimes\det^{-1/2}}\otimes\omega_J\tilde{\to}\check{\pi}_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$$

を得る．ここで $\check{\pi}_{\delta\otimes\overline{\mathbf{e}}}$ の最小の $\widetilde{K}$-タイプ $\check{\delta}$ は $\check{\pi}_{\delta\otimes\det^{-1/2}}$ の最小の $\widetilde{K}$-タイプ $\check{\delta}\otimes\det^{1/2}$ と ω_J の最小の $\widetilde{K}$-タイプ $\det^{-1/2}$ のテンソル積に対応する．ところで 5.3 節で見たように $\psi\in\mathrm{Ind}_{H(\Lambda)}^{H(V)}\chi_\Lambda$ を $\det^{-1/2}$-ベクトルとすると

$$(\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)=\varepsilon\cdot\eta(g;z_0,0)\det(2\mathrm{Im}\sigma(z_0))^{1/4}\vartheta(g(z_0,0)),$$

$(\widetilde{g}=(\widetilde{\sigma},h)\in\widetilde{Sp}(V)_J)$ である．但し

$$\vartheta(z,w)=\sum_{l\in L'}\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\langle l,lz\rangle+\langle l,w\rangle\right)\qquad((z,w)\in\mathfrak{H}_{V,J}=\mathfrak{H}_V\times W_{\mathbb{C}})$$

である．さて Jacobi 尖点形式 $F\in S_\delta(\Gamma_J,\chi_\Lambda)$ と $\alpha\in V_\delta^*$ に対して $\theta_{F\otimes\alpha}\in\mathrm{Ind}_{\Gamma_J}^{Sp(V)_J}\chi_J$ をみれば

$$\theta_{F\otimes\alpha}(g)=\theta_{f\otimes\alpha}(\widetilde{\sigma})\cdot(\omega_J(\widetilde{g})\psi)(1)\qquad(g=(\sigma,h)\in Sp(V)_J)$$

なる $f\in S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\widetilde{\Gamma},\rho_\Lambda^{-1})$ が定まる．即ち

$$\begin{aligned}&\eta(g;z_0,0)J_\delta(\sigma,z_0)^{-1}F(g(z_0,0))\\=&J_{1/2}(\widetilde{\sigma},z_0)J_\delta(\sigma,z_0)^{-1}f(\sigma(z_0))\times\varepsilon\cdot\eta(g;z_0,0)\det(2\mathrm{Im}\sigma(z_0))^{1/4}\vartheta(g(z_0,0))\end{aligned}$$

$(\widetilde{\sigma}=(\varepsilon,\sigma)\in\widetilde{Sp}(V))$，よって

$$F(z,w)=\det(2\mathrm{Im}\,z_0)^{1/4}f(z)\vartheta(z,w)\qquad((z,w)\in\mathfrak{H}_{V,J})$$

である．よって定理 5.5.3 から次の定理を得る；

定理 7.5.2 $m_n > n$ のとき，Jacobi 尖点形式 $F \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$ に対して

$$\begin{aligned} f(z) = &\det(2\mathrm{Im}\, z_0)^{-1/4} \det(2\mathrm{Im}\, z)^{1/2} \\ &\times \int_{W_{\mathbb{C}}/\Lambda_z} F(z,w)\overline{\vartheta(z,w)}\kappa_z(w,w)d_z(w)(z \in \mathfrak{H}_V) \end{aligned}$$

とおくと，$F \mapsto f$ は $S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$ から $S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\widetilde{\Gamma}, \rho_\Lambda)$ への複素線形同型写像である．

7.6 $V = \mathbb{R}^{2n}$ 上の交代形式を $D(x,y) = xJ_n\,{}^t y$ ($J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix}$) により定義し，実斜交空間 (V, D) の偏極 $V = W' \oplus W$ を

$$W' = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \qquad W = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}^n\}$$

により定める．$(x,0) = x, (0,y) = y$ によりそれぞれ $W' = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^n$ と同一視する．W', W の $\mathbb{Z}$-格子を

$$L' = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{Z}^n\}, \qquad L = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Z}^n\}$$

として $\Lambda = L' \oplus L$ とおく．$f \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ に対して

$$f'(z) = f(z/2) = f(\mathrm{Ad}(\tau^{-1})z) \qquad (\tau = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GSp(V))$$

とおくと $f' \in S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \rho_\Lambda)$ である．ここで

$$\Gamma = \tau\Gamma_0(4)\tau^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(\Lambda) \;\middle|\; b \equiv c \equiv 0 \pmod 2 \right\}$$

は $Sp_0(\Lambda)$ の部分群であり，$GL_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}})$ の既約表現 $\delta = \det^k$ をとる．一方，$F \in J_{k,1}^{\mathrm{cusp}}$ に対して

$$F'(z,w) = F(2z,w) = F(\mathrm{Ad}(\tau)(z,w))$$

とおくと，任意の

$$g = (\gamma, h) \in \tau^{-1}Sp(\Lambda)_J\tau = \tau^{-1}Sp(\Lambda)\tau \ltimes H(\Lambda\tau)$$

に対して

$$F'(g(z,w)) = \chi_\Lambda(h)\eta(g;z,w)^{-1}\det J(\gamma,z)^k F'(z,w)$$

となる．更に

$$F''(z,w) = \sum_{h \in H(\Lambda\tau)\backslash H(\Lambda)} \chi_\Lambda(h)^{-1}\eta(h;z,w)F'(h(z,w))$$

とおくと $F'' \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$ となるから，定理 7.5.2 に従って F'' に対応する $S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \rho_\Lambda)$ の元を求めよう．ここで，定理 5.5.3 から，$r, s \in L'$ に対して

$$\int_{W_\mathbb{C}/\Lambda'_z} \theta_r(2z, w)\overline{\theta_s(2z, w)}\kappa_z(w, w)d_z(w) = \begin{cases} 2^n \det(2\mathrm{Im}\, z)^{-1/2} & r \equiv s \pmod{2L'}, \\ 0 & r \not\equiv s \pmod{2L'} \end{cases}$$

($\Lambda'_z = \{xz + y \mid x \in 2L', y \in L\}$) であることと

$$\vartheta(z, w) = \sum_{r \in L'/2L'} \theta_r(2z, w)$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} &\int_{W_\mathbb{C}/\Lambda_z} F''(z, w)\overline{\vartheta(z, w)}\kappa_z(w, w)d_z(w) \\ &= \int_{W_\mathbb{C}/\Lambda_z} \sum_{\lambda \in \Lambda_z/\Lambda'_z} F'(z, w+\lambda)\overline{\vartheta(z, w+\lambda)}\kappa_z(w+\lambda, w+\lambda)d_z(w) \\ &= \int_{W_\mathbb{C}/\Lambda'_z} F'(z, w)\overline{\vartheta(z, w)}\kappa_z(w, w)d_z(w) \\ &= 2^n \det(2\mathrm{Im}\, z)^{-1/2} \sum_{r \in L'/2L'} f_r(2z) \end{aligned}$$

となる．よって $F'' \in S_\delta(\Gamma_J, \chi_\Lambda)$ には

$$\sum_{r \in L'/2L'} f_r(2z) \in S_{\delta\otimes\det^{-1/2}}(\Gamma, \rho_\Lambda)$$

が対応する．即ち $\displaystyle\sum_{r \in L'/2L'} f_r(4z) \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ が対応する．

8　有元素点での様子

8.1　　局所コンパクト群上の帯球関数の一般論を復習しておく．詳細は Tamagawa [17], Gaal [4] 等を参照のこと．2.1 節の設定を思い出そう．即ち，G は局所コンパクト・ユニモジュラー群で，K はそのコンパクト部分群，A は G の中心 $Z(G)$ の閉部分群として，χ を A の連続なユニタリ指標とする．K の自明な一次元ユニタリ表現を $\mathbf{1}_K$ と書いて，簡単のために $\mathcal{H} = C_c(G/A, \chi; \mathbf{1}_K)$ とおく．即ち，$\mathcal{H}$ は G 上の複素数値連続関数 φ であって

1) 任意の $a \in A$ に対して $\varphi(ax) = \chi(a)^{-1}\varphi(x)$,
2) G/A 上の関数 $\dot{x} \mapsto |\varphi(x)|$ の台はコンパクト,
3) 任意の $k, k' \in K$ に対して $\varphi(kxk') = \varphi(x)$

なるもののなす複素ベクトル空間を，G/A 上の畳込み積

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{G/A} \varphi(xy)\psi(y^{-1})d_{G/A}(\dot{y})$$

により $\mathbb{C}$-代数としたものである．さて θ を G 上の複素数値連続関数として，任意の $a \in A$ に対して $\theta(ax) = \chi(a)\theta(x)$ であるとすると，任意の $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\widehat{\theta}(\varphi) = \int_{G/A} \varphi(x)\theta(x)d_{G/A}(\dot{x}), \qquad \check{\theta}(\varphi) = \int_{G/A} \varphi(x)\theta(x^{-1})d_{G/A}(\dot{x})$$

が定義される．そこで G 上の**帯球関数**を次のように定義する；

定義 8.1.1 G 上の複素数値連続関数 θ が

1) 任意の $a \in A$ に対して $\theta(ax) = \chi(a)\theta(x)$,
2) 任意の $k \in K$ に対して $\theta(kxk^{-1}) = \theta(x)$,
3) $\widehat{\theta} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像

を満たすとき，θ を中心指標 χ をもつ K に関する G 上の帯球関数と呼ぶ.

上のような帯球関数の全体を $\Theta(G/A, \chi, K)$ と書こう．帯球関数の基本的な性質として

命題 8.1.2 $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$ に対して

1) 任意の $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して $\varphi * \theta = \theta * \varphi = \check{\theta}(\varphi) \cdot \theta$,
2) θ は両側 K-不変で $\theta(1) = 1$,
3) $\displaystyle\int_K \theta(xky)d_K(k) = \theta(x)\theta(y)$.

逆にこれらの性質により帯球関数が特徴付けられる；

定理 8.1.3 G 上の複素数値可側関数 θ で，任意の $a \in A$ に対して $\theta(ax) = \chi(a)\theta(x)$ であり，G/A 上の関数 $\dot{x} \mapsto |\theta(x)|$ が G/A 上局所可積分であるとき，次は同値である；

1) $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$,
2) θ は両側 K-不変で $\theta(1) = 1$ かつ，任意の $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して $\varphi * \theta = \lambda_\varphi \cdot \theta$ $(\lambda_\varphi \in \mathbb{C})$,
3) $\theta \neq 0$ かつ $\displaystyle\int_K \theta(xky)d_K(k) = \theta(x)\theta(y)$,
4) 任意の $k \in K$ に対して $\theta(kxk^{-1}) = \theta(x)$ であって，$\widehat{\theta} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像.

$\mathcal{H}$ に特殊な移送を導入しよう．コンパクト部分集合 $M \subset G/A$ をとり，$\mathrm{supp}[\dot{x} \mapsto |\varphi(x)|] \subset M$ なる $\varphi \in \mathcal{H}$ の全体を $\mathcal{H}_M$ と書くと，$\mathcal{H}_M$ は $|\varphi| =$

$\sup_{\dot{x}\in G/A} |\varphi(x)|$ をノルムとする複素 Banch 空間となる．$\mathcal{H} = \bigcup_M \mathcal{H}_M$ だから，部分集合 $V \subset \mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$ における開集合であることを，任意のコンパクト部分集合 $M \subset G/A$ に対して $V \cap \mathcal{H}_M$ が $\mathcal{H}_M$ における開部分集合なることと定義する．すると任意の $0 < r \in \mathbb{R}$ に対して，$\{\varphi \in \mathcal{H} \mid |\varphi| < r\}$ は $\mathcal{H}$ の開部分集合となるから，$\mathcal{H}$ は局所凸 Hausdorff 空間となる．このとき

定理 8.1.4 1) $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$ に対して，$\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\widehat{\theta} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は連続である，

2) 連続な全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\lambda : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ に対して，$\widehat{\theta} = \lambda$ なる $\theta \in \Theta(G/A, \chi, K)$ が唯一存在する．

保型形式の Hecke 作用素との関連で考えるときには，K が G の開コンパクト部分群である場合が重要である．この場合には

命題 8.1.5 K が G の開コンパクト部分群ならば，$\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への全射 $\mathbb{C}$-代数準同型写像は全て連続である．

従ってこの場合，$\theta \mapsto \widehat{\theta}$ は $\Theta(G/A, \chi, K)$ から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ への全単射を与える．

8.2 $p \neq 2$ を有限素点として，加法群 $\mathbb{Q}_p$ の非自明なユニタリ指標を $\chi = \mathbf{e}_p$ とする．ここで

$$\mathbf{e}_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \tilde{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ni \dot{t} \mapsto e^{-2\pi\sqrt{-1}t} \in \mathbb{C}^1$$

である．$\mathbb{Q}_p$-斜交空間 (V, D) の偏極 $V = W' \oplus W$ を一つ固定しておく．$\mathbb{Z}_p$-格子 $L \subset W$ をとり

$$L' = \{x \in W' \mid \langle x, L\rangle \subset \mathbb{Z}_p\} \qquad (\langle x, y\rangle = D(x, y) \text{ for } x \in W', y \in W)$$

とおいて $\mathbb{Z}_p$-格子 $\Lambda = L' \oplus L \subset V$ を定める．$p \neq 2$ だから $H[\Lambda] = \Lambda \times \mathbb{Z}_p$ は $H(V)$ の開コンパクト部分群である．

$$K = \{\sigma \in Sp(V) \mid \Lambda\sigma = \Lambda\}$$

は $Sp(V)$ の開コンパクト部分群であり，$H[\Lambda]$ に $(x, t)^\sigma = (x\sigma, t)$ により作用して，半直積 $K_J = K \ltimes H[\Lambda]$ は $Sp(V)_J$ の開コンパクト部分群となる．K_J の自明な 1 次元表現を $\mathbf{1}_{K_J}$ として，8.1 節の一般論に従って

$$\mathcal{H}_J = C_c(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi; \mathbf{1}_{K_J})$$

とおく．即ち，$\mathcal{H}_J$ は，$Sp(V)_J$ 上の複素数値連続関数 φ であって

1) 任意の $a \in Z(H(V)) = \mathbb{Q}_p$ に対して $\varphi(ag) = \chi(a)^{-1}\varphi(g)$,

2) 任意の $k,k'\in K_J$ に対して $\varphi(kgk')=\varphi(g)$,
3) $Sp(V)_J/Z(H(V))$ 上の連続関数 $\dot{g}\mapsto|\varphi(g)|$ の台はコンパクト

なるもの全体のなす複素ベクトル空間を畳込み積

$$(\varphi*\psi)(g)=\int_{Sp(V)_J/Z(H(V))}\varphi(gx^{-1})\psi(x)d_{Sp(V)_J/Z(H(V))}(\dot{g})$$

により $\mathbb{C}$-代数としたものである．ここで L の $\mathbb{Z}_p$-基底 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ を一つ固定して $v_i'\in L'$ を $\langle v_i',v_j\rangle=\delta_{ij}$ により定める．このとき $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対して

$$p^\alpha\in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')\ \text{s.t.}\ p^\alpha v_i'=p^{\alpha_i}v_i',\quad p^\alpha\in GL_{\mathbb{Q}_p}(W)\ \text{s.t.}\ p^\alpha v_i=p^{\alpha_i}v_i$$

とおくと ${}^tp^\alpha=p^\alpha$ となる．そこで $\mathrm{d}(p^\alpha)=\begin{bmatrix}p^\alpha & 0\\ 0 & p^{-\alpha}\end{bmatrix}\in Sp(V)$ とおくと

$$Sp(V)=\bigsqcup_{\alpha\in\Upsilon}K\mathrm{d}(p^\alpha)K\quad(\Upsilon=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n\mid\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_n\geq0\})$$

である．更に，任意の $\varphi\in\mathcal{H}_J$ に対して

$$\mathrm{supp}\varphi\subset\bigsqcup_{\alpha\in\Upsilon}K_J\mathrm{d}(p^\alpha)K_JZ(H(V))$$

であることが示される．そこで任意の $\alpha\in\Upsilon$ に対して，$Sp(V)_J$ の開コンパクト部分集合 $K_J\mathrm{d}(p^\alpha)K_J$ の特性関数を φ_α とすると，$\varphi_\alpha\in C_c(Sp(V)_J;\mathbf{1}_{K_J})^o$ だから，7 頁の方法に従って $\varphi_{\alpha,\chi}\in\mathcal{H}_J$ とおくと，$\{\varphi_{\alpha,\chi}\}_{\alpha\in\Upsilon}$ が $\mathcal{H}_J$ の $\mathbb{C}$-上の基底となる．ここで $\varepsilon=\begin{bmatrix}0 & 1_n\\ 1_n & 0\end{bmatrix}\in GSp(n,\mathbb{Q}_p)=GSp(V)$ とおくと，$g\mapsto g'=\varepsilon g^{-1}\varepsilon^{-1}$ が $Sp(V)_J$ の反自己同型写像で $\varphi_{\alpha,\chi}(g')=\varphi_{\alpha,\chi}(g)$ $(\alpha\in\Upsilon)$ となるから，$\mathcal{H}_J$ は可換代数でることがわかる．更に Murase [12] により $\mathcal{H}_J$ の構造は詳しく調べられていて，我々に必要な部分を書けば

命題 8.2.1 $\mathcal{H}_J$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な可換整域である．

8.3 $p\neq2$ から $k\in K$ に対して $\mathbf{r}'_\chi(k)=(k,\mathbf{r}_\chi(k))\in\widetilde{Sp}(V)$ であることが示される．そこで $\widetilde{K}=\mathbf{r}'_\chi(K)$ とおくと，これは $\widetilde{Sp}(V)$ の開コンパクト部分群である．$p^\alpha\in GL_{\mathbb{Q}_p}(W')$ $(\alpha\in\mathbb{Z}^n)$ に対して，(3) に従って $\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)\in\widetilde{Sp}(V)$ を定めれば

$$\widetilde{Sp}(V)=\bigsqcup_{\alpha\in\Upsilon}\widetilde{K}\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)\widetilde{K}\mathrm{Ker}(\varpi_\chi)$$

となる．そこで $\alpha\in\Upsilon$ に対して，$\widetilde{Sp}(V)$ のコンパクト開部分集合 $\widetilde{K}\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)\widetilde{K}$ の特性関数を ψ_α とおくと，$\psi_\alpha\in C_c(\widetilde{Sp}(V);\mathbf{1}_{\widetilde{K}})^o$ だから，7 頁の方式に従って $\psi_{\alpha,\nu}\in\mathcal{H}=C_c(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi_\chi),\nu;\mathbf{1}_{\widetilde{K}})^o$ を定義する．ここで ν は

$\mathrm{Ker}(\varpi_\chi)$ の唯一の非自明なユニタリ指標である．$\{\psi_{\alpha,\nu}\}_{\alpha\in\Upsilon}$ は $\mathcal{H}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底である．

さて $(\omega_J, L^2(W'))$ は $\widetilde{Sp}(V)_J$ に既約ユニタリ表現で，$\widetilde{K}$-不変ベクトルは L' の特性関数 $\varphi_{L'}$ の定数倍に限るから，付随する $\widetilde{Sp}(V)_J$ の帯球関数を $\Phi(g) = (\omega_J(g)\varphi_{L'}, \varphi_{L'})$ $(g \in \widetilde{Sp}(V)_J)$ とおくと

1) $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\Phi(\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)) = (p^{1/2}\cdot\eta_p)^{-|\alpha|}$, 但し $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 及び $\eta_p = \gamma_\chi(Q_1)\gamma_\chi(-p\cdot Q_1)$ とおく，
2) $\mathrm{supp}(\Phi) = \displaystyle\bigsqcup_{\alpha\in\Upsilon} \widetilde{K}_J\widetilde{\mathbf{d}}(p^\alpha)\widetilde{K}_J \cdot (\mathrm{Ker}(\varpi_\chi) \times Z(H(V)))$

である．次の命題は Shintani [16] による；

命題 8.3.1 $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\varphi_J(\sigma, h) = \varphi(\widetilde{\sigma}) \cdot \overline{\Phi(\widetilde{\sigma}, h)} \quad ((\sigma, h) \in Sp(V)_J, \widetilde{\sigma} \in \widetilde{Sp}(V)\,\mathrm{s.t.}\,\varphi_\chi(\widetilde{\sigma}) = \sigma)$$

とおくと，$\varphi \mapsto \varphi_J$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_J$ への $\mathbb{C}$-代数の同型写像を与える．

8.4 　　二重被覆群 $\widetilde{Sp}(V)$ と Jacobi 群 $Sp(V)_J$ 上の帯球関数の関係を考えよう．まず

命題 8.4.1 $\theta \in \Theta(\widetilde{SP}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi_\chi), \nu, \widetilde{K})$ に対して，$Sp(V)_J$ 上の連続関数 θ_J を

$$\theta_J(\sigma, h) = \theta(\widetilde{\sigma})\Phi(\widetilde{\sigma}, h) \qquad (\varpi(\widetilde{\sigma}) = \sigma)$$

により定義すると，$\theta_J \in \Theta(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$ である．

そこで $\mathcal{H}_J$ と $\mathcal{H}$ の $\mathbb{C}$-基底 $\{\varphi_{\alpha,\chi}\}_{\alpha\in\Upsilon}$ と $\{\psi_{\alpha,\nu}\}_{\alpha\in\Upsilon}$ を用いて，複素線形同型写像 $T : \mathcal{H}_J \tilde{\to} \mathcal{H}$ を $T\varphi_{\alpha,\chi} = (p^{1/2}\cdot\eta_p^{-1})^{|\alpha|}\psi_{\alpha,\nu}$ $(\alpha \in \Upsilon)$ により定義しよう．すると

定理 8.4.2 　1) T は $\mathcal{H}_J$ から $\mathcal{H}$ への $\mathbb{C}$-代数の同型写像で，命題 8.3.1 で与えた同型写像の逆写像となる，
2) 任意の $\theta \in \Theta(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi), \nu, \widetilde{K})$ に対して $\widehat{\theta} \circ T = \widehat{\theta_J}$ となる．

ここから直ちに次の系が得られる；

系 8.4.3 $\theta \mapsto \theta_J$ は $\Theta(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi_\chi), \nu, \widetilde{K})$ から $\Theta(Sp(V)_J/Z(H(V))), \chi, K_J)$ への全単射を与える．

$\widetilde{Sp}(V)$ の既約ユニタリ表現 τ で，$\tau|_{\mathrm{Ker}(\varpi)} = \nu$ かつ自明でない $\widetilde{K}$-不変ベクトルをもつもの全体を $\mathcal{R}(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi), \nu, \widetilde{K})$ とおく．又，$Sp(V)_J$ の既約ユニタリ表現 π で，$\pi|_{Z(H(V))} = \chi$ かつ自明でない K_J-不変ベクトルをもつもの全体を $\mathcal{R}(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$ とかく．$\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_J$ はともに可換だ

から，これらの既約表現の $\widetilde{K}$-不変ベクトル，或いは K_J-不変ベクトルは 1 次元となり，既約表現は対応する帯球関数によって定まるから（定理 2.3.3）．従って上で示したことから次の定理が示される；

定理 8.4.4 $\tau \mapsto \pi = \tau_J \otimes \omega_J$ は全単射

$$\mathcal{R}(\widetilde{Sp}(V)/\mathrm{Ker}(\varpi), \nu, \widetilde{K}) \tilde{\to} \mathcal{R}(Sp(V)_J/Z(H(V)), \chi, K_J)$$

を与え，対応する帯球関数は $\theta_\pi = (\theta_\tau)_J$ となる．

参考文献

[1] W.L.Baily,Jr. and A.Borel : *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains* (Ann. of Math. 84 (1966), 442–528)

[2] J.Dixmier : C^*-algebras (North-Holland, 1982)

[3] M.Eichler and D.Zagier : Theory of Jacobi Forms (Progress in Math. 55 (1985))

[4] S.A.Gaal: Linear analysis and representation theory (Die Grund. math. Wiss. Einzel. 198, Springer-Verlag, 1973)

[5] R.Godement : *Généralités sur les formes modulaires, I,II* (Séminaire H.Cartan, 1957/58)

[6] Harish-Chandra : *Invariant eigen distributions an a semisimple Lie group* (Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), 457-508)

[7] Harish-Chandra (Notes by G. van Dijk) : Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups (Lecture Notes in Math. 162, Springer-Verlag, 1970)

[8] R.Howe : *Transcending classical invarinat theory* (J. of American Math. Soc. 2 (1989), 535–552)

[9] T.Ibukiyama : *On Jacobi forms and Siegelmodular forms of half integral weights* (Comment. Math. Univ. St. Pauli 41 (1992), 109–124

[10] J.-I.Igusa : Theta Functions (Die Grundlehren der math. Wiss. Einz. 194, Springer-Verlag, 1972)

[11] G.Lion, M.Vergne : The Weil representation, Maslov index and Theta series (Progress in Math. vol.6, Birkhäuser, 1980)

[12] A.Murase : *L-functions attached to Jacobi forms of degree n, Part I. The basic identity* (J. reine angew. Math. 401 (1989), 122–156)

[13] I.Satake : *Caractérisation de l'espace des Spitzenformen* (Séminaire H. Cartan 1957/58)

[14] I.Satake : *Factors of automorphy and Fock representations* (Advances in Math. 7 (1971), 83–110)

[15] I.Satake : Algebraic Structures of Symmetric Domains (Math. Soc. Japan, Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980)

[16] T.Shintani : unpublished nonte

[17] T.Tamagawa : *On Selberg's trace formula* (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 8 (1960), 363–386)

[18] A.Weil :*Sur certauns groupes d'opérateurs unitaires* (Acta math. 111 (1964), 143–211)