p-進群の表現論；GL_2 and beyond

高瀬幸一

ver.2012.3.21

これは 2012 年 2 月 12 日から 17 日に横浜国大で開かれた p-進群の表現論の勉強会で話す準備として書いたものである．

第 1 章から第 3 章，及び第 5 章は Bernshtein-Zelevinskii [1] に基づいて書いた．第 4 章は清水英男 [10] の第１１章及び Godement [7] の §1 に基づいて書いた．付録 A は山崎圭次郎 [11] をまとめたものである．

幾つかの部分は勉強会の後に追加された．まず 5.8 節は石井卓氏の講義と [8, Chap.1] を参考に書いた．5.7 は [9, 6 節] による．5.9 節は宮内通孝氏の講義と [9, 7,8,9 節] を参考に書いた．

目 次

第1章　完全非連結空間上の解析学

1.1　局所コンパクト空間の連結成分

位相空間 X が**連結**であるとは，X の開かつ閉な部分集合が X と $\emptyset$ に限ることをいう．X の極大な連結部分空間を X の**連結成分**と呼ぶ．部分空間 $M \subset X$ が連結ならば，X におけるその閉包 $\overline{M}$ も連結である．よって X の連結成分は X の閉集合である．

命題 1.1.1 コンパクト Haudorff 空間 X の連結成分 M に対して $M = \bigcap_{W\in\mathcal{F}} W$ である．ここで $\mathcal{F}$ は M を含む X の開かつ閉部分集合の全体である．

[**証明**] $L = \bigcap_{W\in\mathcal{F}} W$ は連結でないとすると，X の閉集合 E, F で $L = E \cup F$ かつ $E \cap F = \emptyset$ なるものがある．$A = M \cap E, B = M \cap F$ とおくと，$M = A \cup B$ かつ $A \cap B = \emptyset$ だから $A = M$ 又は $B = M$．そこで $A = M$, 即ち $M \subset E$ とする．X の開集合 U, V で $E \subset U, F \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ なるものがある[1]．$X = U \cup V \cup \bigcup_{W\in\mathcal{F}} W^c$ だから，有限個の $W_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ があって, $X = U \cup V \cup W_1^c \cup \cdots \cup W_r^c$ となる．よって

$$L \subset W_1 \cap \cdots \cap W_r \subset U \cup V.$$

ここで $U' = U \cap W_1 \cap \cdots \cap W_r \in \mathcal{F}$，実際,

$$U'^c = U^c \cup W_1^c \cup \cdots \cup W_r^c = V \cup W_1^c \cup \cdots \cup W_r^c$$

[1] Hausdorff 空間 X のコンパクト部分集合 E, F に対して，X の開集合 U, V で $E \subset U, F \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ なるものがある．

だから U' は X の開かつ閉集合で $M \subset U'$ である．よって

$$F \subset L \cap V \subset U' \cap V \subset U \cap V = \emptyset$$

となり，矛盾する．■

命題 1.1.2 局所コンパクト Hausdorff 空間 X のコンパクトな連結成分 M，及び $M \subset U$ なる X の開集合 U に対して，$M \subset W \subset U$ なる X のコンパクト開集合 W が存在する．

[**証明**] $x \in M$ に対して $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U$ かつ $\overline{V}_x$ がコンパクトなる X の開集合 V_x があり，有限個の $\{x_1, \cdots, x_r\} \subset M$ をとって $M \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_r} = V$ とできる．

$$Y = \overline{V} = \overline{V}_{x_1} \cup \cdots \cup \overline{V}_{x_r}$$

はコンパクトで，M は Y の連結成分である．よって命題 1.1.1 より $M = \bigcap_{W \in \mathcal{F}} W$ ($\mathcal{F}$ は $M \subset W$ なる Y の開かつ閉部分集合の全体）となる．ここで

$$Y = V \cup (Y \setminus M) = V \cup \bigcup_{W \in \mathcal{F}} (Y \setminus W)$$

より，有限個の $\{W_1, \cdots, W_t\} \subset \mathcal{F}$ をとって

$$Y = V \cup (Y \setminus W_1) \cup \cdots \cup (Y \setminus W_t), \qquad \therefore M \subset W_1 \cap \cdots \cap W_t \subset V$$

とできる．このとき $W = W_1 \cap \cdots \cap W_t$ は Y の閉集合だからコンパクトである．一方，W は Y の開集合でもあるから，X の開集合 W' があって $W = W' \cap Y$ となるが，$W \subset V \subset Y$ で V は X の開集合だから，$W = W' \cap V$ は X の開集合となる．最後に $W \subset Y \subset U$ である．■

命題 1.1.3 局所コンパクト Hausdorff 空間 X に対して，次は同値；

1) X は**完全非連結**（即ち，X の連結成分は全て一点からなる），
2) X はコンパクト開集合からなる基本近傍系をもつ（即ち，任意の $x \in X$ と $x \in V$ なる X の開集合 V に対して，$x \in W \subset V$ なる X のコンパクト開集合 W が存在する）．

[**証明**] 1)⇒ 2) 命題 1.1.2 よりより．

2)⇒ 1) X の連結成分 M が相異なる二点 x, y を含むとすると，$x \in W$ かつ $y \notin W$ なる X のコンパクト開集合 W がとれる．このとき $U = M \cap W, V = M \cap W^c$ は M の開集合で $M = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ かつ $x \in U, y \in V$ となり， M が連結であることに反する．■

命題 1.1.4 局所コンパクト Hausdorff 群 G に対して，次は同値である；

1) G は完全非連結，
2) 単位元 $1 \in G$ を含む開集合 $U \subset G$ に対して，$K \subset U$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ が存在する．

[**証明**] 1) ⇒ 2) $1 \in M \subset U$ なるコンパクト開集合 M がとれる（命題 1.1.3）．このとき $Q = \{x \in G \mid Mx \subset M\}$ は G の開かつ閉部分集合である，実際，$q \in Q$ とする．任意の $x \in M$ に対して $xq \in M$ で $M \subset G$ は開集合だから，x, q の開近傍 U_x, V_x で $U_xV_x \subset M$ なるものがとれる．M はコンパクトだから，有限個の $\{x_1, \cdots .x_r\} \subset M$ をとって $M \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_r}$ とできる．このとき $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_r}$ は q の開近傍で $MV \subset M$ となり，$V \subset Q$ となるから，Q は G の開集合である．$p \in Q^c$ とする．$Mp \not\subset M$ だから $mp \notin M$ なる $m \in M$ がとれる．M は G の閉集合だから $mW \cap M = \emptyset$ なる p の開近傍 W がある．よって $W \cap Q = \emptyset$ となり，Q は G の閉集合である．さて，$1 \in M$ だから $Q \subset M$，よって Q はコンパクトで $1 \in Q$ である．よって $K = Q \cap Q^{-1}$ は G のコンパクト開集合で $1 \in K$ である．更に $x, y \in K$ に対して，$\{x, y^{-1}, x^{-1}, y\} \subset Q$ だから

$$Mxy^{-1} \subset My^{-1} \subset M, \qquad Myx^{-1} \subset Mx^{-1} \subset M,$$

よって $xy^{-1} \in Q \cap Q^{-1} = K$ となるから，K は G の部分群である．■

命題 1.1.5 コンパクト Hausdorff 群 G が完全非連結ならば，開集合 $1 \in U \subset G$ に対して $K \subset U$ なる正規部分群 $K \triangleleft G$ が存在する．

[**証明**] 命題 1.1.4 より $H \subset U$ なるコンパクト開部分群 $H \subset G$ がとれる．このとき $K = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$ は G のコンパクト正規部分群で $K \subset U$ である．

任意の $x \in G$ に対して，$1 \in G$ の開近傍 V_x と x の開近傍 W_x があって $W_x^{-1}V_xW_x \subset H$ となる．G はコンパクトだから，有限個の $\{x_1, \cdots, x_r\} \subset G$ をとって $G = W_{x_1} \cup \cdots \cup w_{x_r}$ とできる．このとき $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_r}$ は 1 の開近傍で，任意の $x \in G$ に対して $x^{-1}Vx \subset H$ となるから，$V \subset K$．よって K は G の開部分群である．■

命題 1.1.6 完全非連結な局所コンパクト Hausdorff 群 G は可算個のコンパクト集合の和集合とする．G が局所コンパクト Hausdorff 空間 X に連続に作用していて G-軌道が可算個とすると，G-軌道で X の開集合となるものが存在する．

[**証明**] 開コンパクト部分群 $K \subset G$ をとると，可算個の左剰余類 $G = \bigsqcup_i g_iK$ に分解する．X の G-軌道分解を $X = \bigsqcup_j \Omega_j$ として $x_j \in \Omega_j$ とすると，X は可算個のコンパクト集合の和集合となる；

$$X = \bigcup_{i,j} g_iN \cdot x_j.$$

X は Baire の性質をもつから，X の閉集合 $g_iN \cdot x_j$ の少なくとも一つは内点をもつ．$g_in \cdot x_j \in g_iN \cdot x_j$ が内点とすると

$$x_j = (g_in)^{-1}(g_in) \cdot x_j \in N \cdot x_j \in N \cdot x_j \subset \Omega_j$$

は Ω_j の内点となり，Ω_j は X の開集合となる．■

1.2　完全非連結空間上の C^∞-関数

以下，局所コンパクト Hausdorff 空間 X は完全非連結であるとする．
複素ベクトル空間 E と関数 $f : X \to E$ に対して

1) 任意の $v \in E$ に対して $f^{-1}(v) \subset X$ が開集合となるとき，f は**局所定数関数**又は **C^∞-関数**であるといい，その全体を $C^\infty(X; E)$ と書く．$f \in C^\infty(X; E)$ ならば任意の $v \in E$ に対して $f^{-1}(v) \subset X$ は開かつ閉集合である．

2) $f \in C^\infty(X;E)$ に対して，$f^{-1}(0) \subset X$ が開集合だから，f の**台**

$$\mathrm{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

は X の閉集合である．$\mathrm{supp}(f) \subset X$ がコンパクトなる $f \in C^\infty(X;E)$ の全体を $\mathcal{S}(X;E)$ と書く．

$f \in C^\infty(X;E)$ に対して $\mathrm{supp}(f) = \displaystyle\bigsqcup_{0 \neq v \in f(X)} f^{-1}(v)$ だから

$$f \in \mathcal{S}(X;E) \iff \begin{cases} \sharp f(X) < \infty, \\ f^{-1}(v) \subset X : \text{compact for } \forall 0 \neq v \in f(X) \end{cases}$$

である．$C^\infty(X) = C^\infty(X;\mathbb{C})$, $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(X;\mathbb{C})$ と書く．複素線形写像

$$i_E : C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{C}} E \to C^\infty(X;E) \qquad (\varphi \otimes v \mapsto [x \mapsto \varphi(x)v])$$

は単射であり，$\dim_{\mathbb{C}} E < \infty$ ならば同型である．常に複素線形同型

$$i_{E,c} : \mathcal{S}(X) \otimes_{\mathbb{C}} E \tilde{\to} \mathcal{S}(X;E)$$

が成り立つ．開コンパクト集合 $M \subset X$ の特性関数を χ_M とすると

$$\mathcal{S}(X) = \langle \chi_M \mid M \subset X : \text{open-compact subset} \rangle_{\mathbb{C}\text{-vector space}}$$

である．$f, g \in C^\infty(X)$ に対して

$$(f \cdot g)^{-1}(a) = \begin{cases} f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) & : a = 0, \\ \displaystyle\bigcup_{bc=a} (f^{-1}(b) \cap g^{-1}(c)) & : a \neq 0 \end{cases} \quad \text{for } \forall a \in \mathbb{C}$$

より $f \cdot g \in C^\infty(X)$ となり，$C^\infty(X)$ は $\mathbb{C}$-代数である．又

$$\mathrm{supp}(f \cdot g) = \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g)$$

より $\mathcal{S}(X)$ は $C^\infty(X)$ のイデアルである．

定義 1.2.1 C_X を X 上の複素数値連続関数のなす $\mathbb{C}$-代数の層とする（即ち，開集合 $V \subset X$ に対して $\Gamma(V, C_X) = C_X(V)$ は V 上の複素数値連続関数の

なす $\mathbb{C}$-代数で，開集合 $V \subset W \subset X$ に対して制限写像を $\mathrm{res}_V^W(\varphi) = \varphi|_V$ ($\varphi \in C_X(W)$) とする）．同様に C_X^∞ を X 上の複素数値 C^∞-関数のなす $\mathbb{C}$-代数の層とする．$x \in X$ における C_X^∞ の stalk $C_{X,x}^\infty$ は $[\varphi] = \varphi(x)$ により $\mathbb{C}$ と同一視する．

開集合 $V \subset X$ に対して

$$\mathcal{S}(X)_V = \{f \in \mathcal{S}(X) \mid \mathrm{supp}(f) \subset V\}$$

とおくと，$f \mapsto f|_V$ は複素線形同型 $\mathcal{S}(X)_V \tilde{\to} \mathcal{S}(V)$ を与える．$g \mapsto \widetilde{g}$ は

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & : x \in V, \\ 0 & : x \notin V \end{cases}$$

により与えられる．これにより $\mathcal{S}(X)_V = \mathcal{S}(V)$ と同一視して，$\mathcal{S}(X)_V$ を $C_X^\infty(V)$-加群とみなす.

命題 1.2.2 コンパクト集合 $M \subset X$ の有限開被覆 $\{V_i\}_{i=1,2,\cdots,r}$ に対して，$\varphi_i \in \mathcal{S}(X)_{V_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ を次の三条件を満たすように取れる；

1) $\varphi_i(x) \geq 0$ かつ $\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_r(x) \leq 1$ for $\forall x \in X$,
2) $\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_r(x) = 1$ for $\forall x \in M$,
3) $\varphi_i(x) = 0$ for $\forall x \notin V_i$.

$\{\varphi_i\}_{i=1,2,\cdots,r}$ を M と $\{V_i\}_{i=1,2,\cdots,r}$ に関する 1 **の分解**と呼ぶ.

[**証明**] 任意の $x \in M \cap V_i$ に対して，開コンパクト集合 $x \in W_x \subset V_i$ がとれて，M はコンパクトだから，開コンパクト集合 $W_i \subset V_i$ をとって $M \subset W_1 \cup \cdots \cup W_r$ とできる．ここで

$$U_1 = W_1,\ U_2 = W_2 \cap W_1^c,\ U_3 = W_3 \cap W_1^c \cap W_2^c, \cdots$$

とおくと，$U_i \subset V_i$ は開コンパクト部分集合で

$$M \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r, \qquad U_i \cap U_j = \emptyset \text{ if } i \neq j$$

となる．よって $\varphi_i = \chi_{U_i} \in \mathcal{S}(X)_{V_i}$ とおけばよい．■

命題 1.2.3 局所コンパクト Hausdorff 群 G は完全非連結とする．このとき $\forall\varphi\in S(G)$ に対して

$$\varphi=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot\chi_{g_i\cdot K}\quad(\lambda_i\in\mathbb{C},g_i\in G).$$

なる開コンパクト部分群 $K\subset G$ が存在する．更に G がコンパクトならば $K\triangleleft G$ とできる．

[**証明**] まず $\forall\varphi\in S(G)$ は $\varphi=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\cdot\chi_{M_i}$ ($M_i\subset G$：開コンパクト) と書ける．開コンパクト集合 $M\subset G$ をとる．$\forall x\in M$ に対して $x\cdot K_x\subset M$ なる開コンパクト部分群 $K_x\subset G$ がとれる．よって

$$M=\bigcup_{i=1}^{n}x_i\cdot K_{x_i}\qquad\therefore K=\bigcap_{i=1}^{n}K_{x_i}\subset G:\text{開コンパクト部分群}.$$

ここで $(K_{x_i}:K)<\infty$ だから $M=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{r}g_iK$ とできるから，$\chi_M=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\chi_{g_iK}$ となる．■

補題 1.2.4 複素ベクトル空間 W,V に対して，複素線形同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,V^*)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W\otimes_{\mathbb{C}}V,C)\qquad(T\mapsto[w\otimes v\mapsto\langle T(w),v\rangle])$$

が成り立つ．

[**証明**] 単射は明らか．W の $\mathbb{C}$ 上の基底を $\{w_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とする．任意の $S\in\mathrm{Hom}(W\otimes_{\mathbb{C}}V,\mathbb{C})$ に対して

$$\alpha_\lambda=[V\ni v\mapsto S(w_\lambda\otimes v)\in\mathbb{C}]\in V^*\qquad(\lambda\in\Lambda)$$

として，$T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,V^*)$ を $T(w_\lambda)=\alpha_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$ により定義すると，$z=\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}w_\lambda\otimes v_\lambda\in W\otimes_{\mathbb{C}}V$ に対して

$$T(z)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle T(w_\lambda),v_\lambda\rangle=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle\alpha_\lambda,v_\lambda\rangle=\sum_{\lambda\in\Lambda}S(w_\lambda\otimes v_\lambda)=S(z)$$

となる．■

1.3　l-sheaf

以下，X を局所コンパクト Hausdorff 空間で完全非連結とする．

$\mathcal{L}$ を C_X^∞-加群とする．開集合 $V \subset X$ に対して $\mathcal{L}(V) = \Gamma(\mathcal{L}, V)$ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間だから，$x \in X$ における stalk $\mathcal{L}_x$ も $\mathbb{C}$-ベクトル空間である．$s \in \mathcal{L}(X)$ と $\varphi \in C^\infty(X) = C_X^\infty(X)$ に対して $\varphi \cdot s \in \mathcal{L}(X)$ で $[\varphi \cdot s] = \varphi(x)[s] \in \mathcal{L}_x$ $(x \in X)$ だから

$$\mathrm{supp}(\varphi \cdot s) = \mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(s).$$

従って

$$\mathcal{L}_c(X) = \{s \in \mathcal{L}(X) \mid \mathrm{supp}(s) \subset X : \mathrm{compact}\}$$

は $\mathcal{L}(X)$ の $C^\infty(X)$-部分加群である．更に

命題 1.3.1 $\mathcal{S}(X) \cdot \mathcal{L}_c(X) = \mathcal{L}_c(X)$.

[**証明**] $s \in \mathcal{L}_c(X)$ に対して，$M = \mathrm{supp}(s)$ はコンパクトだから，$M \subset W$ なる開コンパクト集合 $W \subset X$ がとれて $\chi_W \in \mathcal{S}(X)$ である．任意の $x \in X$ に対して，$\mathcal{L}_x$ で

$$\begin{aligned}
[\chi_W \cdot s] = \chi_W(x)[s] &= \begin{cases} [s] & \text{if } x \in W \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
&= \begin{cases} [s] & \text{if } x \in M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = [s]
\end{aligned}$$

より，開集合 $x \in \exists V \subset X$ があって $(\chi_W \cdot s)|_V = s|_V$．よって $\chi_W \cdot s = s$ となる．■

逆に $\mathcal{S}(X)$-加群 L は $\mathcal{S}(X) \cdot L = L$ を満たすとする．$x \in X$ に対して

$$\begin{aligned}
L(x) &= \langle \varphi \cdot s \mid s \in L,\, \varphi \in \mathcal{S}(X) \,\mathrm{s.t.}\, \varphi(x) = 0 \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \langle \chi_M \cdot s \mid s \in L,\, M \subset X : \text{open compact}\,\mathrm{s.t.}\, x \notin M \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \{ s \in L \mid \varphi \cdot s = 0 \,\text{for some}\, \varphi \in \mathcal{S}(X) \,\mathrm{s.t.}\, \varphi(x) \neq 0 \} \\
&\subset L : \mathbb{C}\text{-vector subspace}
\end{aligned}$$

とおくと，$t = \sum_i \varphi_i \cdot s_i \in L$ ($\varphi_i \in \mathcal{S}(X)$, $s_i \in L$) に対して

$$t \equiv \sum_i \varphi_i(x) s_i \pmod{L(x)} \text{ for } \forall x \in X$$

である，

[**証明**] コンパクト開集合 $M \subset X$ と $s \in L$ に対して $t = \chi_M \cdot s$ の場合に示せば十分である．$x \notin M$ のとき，$t \in L(x)$ だから $t \equiv \chi_M(x) \cdot s \equiv 0 \pmod{L(x)}$ は明らか．$x \in M$ のとき

$$\chi_M \cdot (\chi_M \cdot s - s) = 0,\ \chi_M \in \mathcal{S}(X)\, \text{s.t.}\ \chi_M(x) \neq 0$$

より $t - s \in L(x)$．よって $t \equiv \chi_M(x) \cdot s \pmod{L(x)}$．■

そこで，開集合 $V \subset X$ に対して

$$\mathcal{L}(V) = \left\{ (s_x)_{x \in V} \in \prod_{x \in V} L/L(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in V \text{ に対して} \\ x \in \exists W \subset V\text{:open},\ \exists s \in L \\ \text{s.t. } s_y \equiv s \pmod{L(y)} \text{ for } \forall y \in W \end{array} \right\}$$

とおき，これを

$$\varphi \cdot (s_x)_{x \in V} = (\varphi(x) \cdot s_x)_{x \in V} \qquad (\varphi \in C_X^\infty(V),\ (s_x)_{x \in V} \in \mathcal{L}(V))$$

により $C_X^\infty(V)$-module とし，開集合 $V \subset W \subset X$ に対して制限写像を

$$\text{res}_V^W : \mathcal{L}(W) \ni (s_x)_{x \in W} \mapsto (s_x)_{x \in V} \in \mathcal{L}(V)$$

により定義すると，$\mathcal{L} = (\mathcal{L}(V), \text{res}_V^W)$ は X 上の C_X^∞-module となり，$\forall x \in X$ に対して複素線形同型

$$\mathcal{L}_x \ni [(s_y)_{y \in V}] \xrightarrow{\sim} s_x \in L/L(x) \text{ as } \mathbb{C}\text{-vector space}$$

が成り立つ．$\mathcal{L}$ を $\mathcal{S}(X)$-加群 L により生成された C_X^∞-加群と呼ぶ．ここで

命題 1.3.2 $\mathcal{S}(X)$-加群の同型

$$L \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_c(X) \qquad (s \mapsto (s \pmod{L(x)})_{x \in X})$$

が成り立つ．特に $\bigcap_{x \in X} L(x) = 0$.

[証明] $s \in \bigcap_{x\in X} L(x)$ とする．

$s = \sum_i \chi_{M_i} \cdot s_i$ with $s_i \in L$, $M_i \subset X$:open compact s.t. $M_i \cap M_j = \emptyset$ if $i \neq j$

と書ける．$\forall x \in M_i$ に対して，$s \equiv s_i \pmod{L(x)}$ だから $s_i \in L(x)$．よって

$s_i = \sum_j \chi_{M_j^(x)} \cdot s_j^{(x)}$ with $M_j^{(x)} \subset X$:open compact s.t. $x \notin M_j^{(x)}$, $s_J^{(x)} \in L$

と書けて，$x \in \exists V^{(x)} \subset \bigcap_j M_j^{(x)c}$;open compact．よって有限個の $\{x_1, \cdots, x_r\} \subset M_i$ があって

$$M_i \subset V^{(x_1)} \cup \cdots \cup V^{(x_r)}, \qquad \therefore \chi_{M_i} = \chi_{M_i} \cdot (\chi_{V^{(x_1)}} + \cdots + \chi_{V^{(x_r)}}).$$

よって

$$\chi_{M_i} \cdot s_i = \sum_{k,j} \chi_{M_i} \cdots \chi_{V^{(x_k)}} \cdot \chi_{M_j^{(x_k)}} \cdot s_j^{(x_k)} = 0.$$

よって $s = 0$ となる．$s \in L \hookrightarrow \mathcal{L}(X)$ とする．$\mathcal{S}(X) \cdot L = L$ より $s = \sum_j \chi_{M_j} \cdot s_j$ ($M_j \subset X$:open compact, $s_j \in L$) とできる．$x \notin \bigcup_j M_j$ ならば $s \in L(x)$ だから

$$\mathrm{supp}(s) = \{x \in X \mid s \notin L(x)\} \subset \bigcup_j M_j, \qquad \therefore \mathrm{supp}(s) : \text{compact}.$$

よって $L \hookrightarrow \mathcal{L}_c(X)$ である．一方，$s = (s_x)_{x\in X} \in \mathcal{L}_c(X)$ として

$$M = \mathrm{supp}(s) = \{x \in X \mid s_x \neq 0\}$$

とおく．$M \subset \exists U \subset$:open compact である，$x \in U$ に対して

$x \in \exists V_x \subset X$: open compact, $\exists t_x \in L$ s.t. $s_y \equiv t_1 \pmod{L(y)}$ for $\forall y \in V_x$.

よって有限個の $\{x_1, \cdots, x_r\} \subset U$ をとって $U \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_r}$ とできる．ここで

$$W_1 = V_{x_1},\ W_2 = V_{x_2} \cap V_{x_1}^c,\ W_3 = V_{x_3} \cap V_{x_1}^c \cap V_{x_2}^c, \cdots$$

とおくと

$$U \subset W_1 \cup \cdots \cup W_r \text{ with } W_i \subset X : \text{open compact}, \ W_i \cap W_j = \emptyset \text{ if } i \neq j.$$

よって $t = \sum_i^r \chi_u \cdot \chi_{W_i} \cdot t_{x_i} \in L$ とおくと，$x \in U$ ならば

$$t \equiv t_{x_i} \equiv s_x \pmod{L(x)} \text{ if } x \in W_i \subset V_{x_i},$$

$x \notin U$ ならば

$$t \equiv 0 \equiv s_x \pmod{L(x)}.$$

よって $s = t$ である．■

さて C_X^∞-module $\mathcal{L}$ に対して，$L = \mathcal{L}_c(X)$ は $\mathcal{S}(X) \cdot L = L$ なる $\mathcal{S}(X)$-module だから，L により生成された C_X^∞-module を $\mathcal{L}^*$ とする．すると

$$\mathrm{Ker}[L = \mathcal{L}_c(X) \ni s \mapsto [s] \in \mathcal{L}_x] = L(x) \quad \text{for } \forall x \in X.$$

[**証明**] $s \in L = \mathcal{L}_c(X)$ s.t. $[s] = 0$ in $\mathcal{L}_x$ とすると，$x \notin \mathrm{supp}(s)$，よって $x \in \exists V \subset X$:open compact s.t. $\mathrm{supp}(s) \cap V = \emptyset$．よって $\chi_V \in \mathcal{S}(X)$ s.t. $\chi_V(x) \neq 0$ かつ $\chi_V \cdot s = 0$ ($\because [\chi_V \cdot s] = \chi_V(y)[s] = 0$ in $\mathcal{L}_y$ for $\forall y \in X$)．よって $s \in L(x)$ である．逆に $s \in L(x)$ とすると，$\exists \varphi \in \mathcal{S}(X)$ s.t. $\varphi(x) \neq 0$ かつ $\varphi \cdot s = 0$．よって　$\varphi(x)[s] = [\varphi \cdot s] = 0$ in $\mathcal{L}_x$．よって $[s] = 0$ in $\mathcal{L}_x$ となる．■

そこで，開集合 $V \subset X$ に対して

$$\mathcal{L}^*(V) = \left\{ (s_x)_{x \in V} \in \prod_{x \in V} L/L(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in V \text{ に対して} \\ x \in \exists W \subset V\text{:open}, \exists s \in L = \mathcal{L}_c(X) \\ \text{s.t. } s_y \equiv s \pmod{L(y)} \text{ for } \forall y \in W \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{L}(V) = \left\{ (s_x)_{x \in V} \in \prod_{x \in V} \mathcal{L}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in V \text{ に対して} \\ x \in \exists W \subset V\text{:open}, \exists s \in \mathcal{L}(W) \\ \text{s.t. } s_y = [s] \in \mathcal{L}_y \text{ for } \forall y \in W \end{array} \right\}$$

だから

$$i_V : \mathcal{L}^*(V) \ni (\overline{s}_x \in L/L(x))_{x \in V} \mapsto ([s_x] \in \mathcal{L}_x)_{x \in V} \in \mathcal{L}(V)$$

とおくと C_X^∞-加群の準同型写像

$$i = (i_V)_{V\,\subset\,X:\mathrm{open}} : \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}$$

は単射である

[**証明**] $\forall x \in X$ に対して

$$i_x : \mathcal{L}_x^* = L/L(x) \ni \overline{s} \mapsto [s] \in \mathcal{L}_x$$

は単射．■

ここで次は同値である；

1) $i : \mathcal{L}^* \tilde{\to} \mathcal{L}$: C_X^∞-module isom.
2) $\mathcal{L}_c(X) \ni s \mapsto [s] \in \mathcal{L}_x$: surjective for $\forall x \in X$,
3) $\mathcal{L}(X) \ni s \mapsto [s] \in \mathcal{L}_x$: surjective for $\forall x \in X$（このとき $\mathcal{L}$ は **locally flabby** であるという）.

[**証明**] 1)$\Leftrightarrow$ 2)$\Rightarrow$ 3) は明らか．$\forall s \in \mathcal{L}(X)$ に対して，$V \subset X$:open compact をとれば $\mathrm{supp}(\chi_V \cdot s) = V \cap \mathrm{supp}(s)$ となるから，3)$\Rightarrow$ 2) が従う．■

定義 1.3.3 X 上の locally flabby な C_X^∞-module を簡単に ***l*-sheaf** と呼ぶ.

C_X^∞ 自身は C_X^∞-module で，$\forall x \in X$ に対して

$$C_X^\infty(X) \ni \varphi \mapsto [\varphi] = \varphi(x) \in C_{X,x}^\infty = \mathbb{C}$$

は surjective となるから，C_X^∞ は l-sheaf である.

局所閉集合 $Y \subset X$ に対して Y 上の層 $\mathcal{L}|_Y$ が定義される．言い換えれば局所閉集合 $M \subset X$ に対して

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ (s_x)_{x\in M} \in \prod_{x\in M} \mathcal{L}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in M \text{ に対して} \\ x \in \exists V \subset X\text{:open}, \exists s \in \mathcal{L}(V) \\ \text{s.t. } s_y = [s] \in \mathcal{L}_y \text{ for } \forall y \in M \cap V \end{array} \right\}$$

とおくと，これは $\varphi \cdot (s_x)_{x\in M} = (\varphi(x)s_x)_{x\in M}$ $(\varphi \in C^\infty(M), (s_x)_{x\in M} \in \mathcal{L}(M))$ により $C^\infty(M)$-加群となる.

[**証明**] $M \subset X$ が閉集合の場合に示せばよい．このとき

$$C^\infty(X) \ni \psi \mapsto \psi|_M \in C^\infty(M) : \text{surjective}.$$

実際，$L \subset M$:open compact subset に対して

$$\exists V \subset X : \text{open s.t. } L = M \cap V,\ L \subset \exists W \subset V : \text{open compact subset}$$

だから $L \subset M \cap W \subset M \cap V = L$ より $L = M \cap W$ だから，$\chi_L^{(M)} = \chi_W|_M$ となる．よって $\varphi \in C^\infty(M)$ に対して $\psi \in C^\infty(X)$ s.t. $\varphi = \psi|_M$ とおくと

$$\begin{aligned}(s_x)_{x\in M} \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow \forall x \in M \text{ に対して } & x \in \exists V \subset X\text{:open}, \exists s \in \mathcal{L}(V) \\ & \text{s.t. } s_y = [s] \in \mathcal{L}_y \text{ for } \forall y \in M \cap V \\ & \Rightarrow \varphi(y)s_y = \psi(y)[s] = [\psi|_V \cdot s] \in \mathcal{L}_y \text{ for } \forall y \in M \cap V \\ & \Rightarrow (\varphi(x)s_x)_{x\in M} \in \mathcal{L}(M).\end{aligned}$$

■

即ち $\mathcal{L}|_Y$ は C_Y^∞-加群となる．更に

命題 1.3.4 $\mathcal{L}$ が l-sheaf ならば，局所閉集合 $M \subset X$ に対して

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ (s_x)_{x\in M} \in \prod_{x\in M} \mathcal{L}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in M \text{ に対して} \\ x \in \exists V \subset X\text{:open}, \exists s \in \mathcal{L}_c(X) \\ \text{s.t. } s_y = [s] \in \mathcal{L}_y \text{ for } \forall y \in M \cap V \end{array} \right\}$$

で

$$\mathcal{L}_c(X) \ni s \mapsto s|_M = ([s] \in \mathcal{L}_x)_{x\in M} \in \mathcal{L}_c(M)$$

は全射である．特に局所閉集合 $Y \subset X$ に対して $\mathcal{L}|_Y$ は Y 上の l-sheaf となる．

[**証明**] $(s_x)_{x\in M} \in \mathcal{L}(M)$ として，$x \in M$ を固定しておく．開集合 $x \in V \subset X$ と $s \in \mathcal{L}(V)$ があって，任意の $y \in M \cap V$ に対して $s_y = [s] \in \mathcal{L}_y$ となる．一方，$s_x = [t] \in \mathcal{L}_x$ なる $t \in \mathcal{L}_c(X)$ がとれる．$[s] = s_x = [t] \in \mathcal{L}_x$ だか

ら，コンパクト開集合 $x \in U \subset V$ があって $s|_U = t|_U$ となる．よって任意の $y \in M \cap U$ に対して $s_y = [s] = [t] \in \mathcal{L}_y$ となる．$(s_x)_{x\in M} \in \mathcal{L}_c(M)$ として

$$L = \{x \in M \mid s_x \neq 0\} \subset M : \text{コンパクト}$$

とする．任意の $x \in M$ に対して $t_x \in \mathcal{L}_c(X)$ とコンパクト開集合 $x \in V_x \subset X$ があって，任意の $y \in M \cap V_x$ に対して $s_y = [t_x] \in \mathcal{L}_y$ となる．$L \subset \bigcup_{x\in M} V_x$ だから

$$L \subset V = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \cdots \cup V_{x_r}$$

となる．よって

$$W_1 = V_{x_1},\ W_2 = V_{x_2} \setminus V_{x_1},\ W_3 = V_{x_3} \setminus (V_{x_1} \cup V_{x_2}), \cdots$$

とおくと，$W_i \subset X$ はコンパクト開集合で $V = W_1 \sqcup W_2 \sqcup \cdots \sqcup W_r$ となり，任意の $y \in M \cap W_i$ に対して $s_y = [t_{x_i}] \in \mathcal{L}_y$ となる．そこで $t = \sum_{i=1}^{r} \chi_{W_i} \cdot t_{x_i} \in \mathcal{L}_c(X)$ とおくと，任意の $x \in M$ に対して，$x \in \bigcup_{i=1}^{r} W_i$ ならば $x \in M \cap W_i$ なる i があって

$$s_x = [t_{x_i}] = [t] \in \mathcal{L}_x$$

となる．$x \notin \bigcup_{i=1}^{r} W_i$ ならば，$x \notin L$ だから $s_x = 0$．一方，$[t] = 0 \in \mathcal{L}_x$ だから $s_x = [t] \in \mathcal{L}_x$ となる．よって $(s_x)_{x\in M} = ([t] \in \mathcal{L}_x)_{x\in M}$ となる．■

1.4　l-sheaf の自己同型群

X, Y を局所コンパクト Hausdorff 完全非連結空間として，X 上の C_X^∞-加群 $\mathcal{L}$ と Y 上の C_Y^∞-加群 $\mathcal{M}$ をとる．連続写像 $f : X \to Y$ に対して

$$C_Y^\infty(V) \ni \varphi \mapsto \varphi \circ f \in C_X^\infty(f^{-1}(V)) \qquad (V \subset Y : \text{open})$$

は $\mathbb{C}$-代数準同型写像だから，任意の開集合 $V \subset Y$ に対して，$\psi \cdot s = (\psi \circ f) \cdot s$ ($\psi \in C_Y^\infty(V)$, $s \in \mathcal{L}(f^{-1}(V))$) により，$\mathcal{L}(f^{-1}(V))$ は $C_Y^\infty(V)$-加群となる．

そこで

$$(f, f_V^\sharp) : (X, \mathcal{L}) \to (Y, \mathcal{M})$$

が準同型写像であるとは

1) $f : X \to Y$ は連続写像,
2) $f_V^\sharp : \mathcal{M}(V) \to \mathcal{L}(f^{-1}(V))$ は $C_Y^\infty(V)$-加群準同型写像 ($\forall V \subset Y$: open),
   即ち, $\psi \in C_Y^\infty(V)$, $s \in \mathcal{M}(V)$ に対して $f_V^\sharp(\psi \cdot s) = (\psi \circ f) \cdot f_V^\sharp(s)$,
3) 任意の開集合 $V \subset W \subset Y$ に対して次の図式が可換；

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(W) \arrow[r, "f_W^\sharp"] \arrow[d, "\mathrm{res}_V^W"'] & \mathcal{L}(f^{-1}(V)) \arrow[d, "\mathrm{res}_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(W)}"] \\
\mathcal{M}(V) \arrow[r, "f_V^\sharp"'] & \mathcal{L}(f^{-1}(V)).
\end{tikzcd}$$

なることを言う．又

$$(f, f_V^\sharp) : (X, \mathcal{L}) \tilde{\to} (Y, \mathcal{M})$$

が同型写像であるとは

1) $(f, f_V^\sharp) : (X, \mathcal{L}) \to (Y, \mathcal{M})$ は準同型写像,
2) $f : X \tilde{\to} Y$ は位相同型写像,
3) $f_V^\sharp : \mathcal{M}(V) \tilde{\to} \mathcal{L}(f^{-1}(V))$ は $C_Y^\infty(V)$-加群の同型写像

なることを言う.

定義 1.4.1 X 上の C_X^∞-加群 $\mathcal{L}$ に対して

$$\mathrm{Aut}(X, \mathcal{L}) = \{(f, f_V^\sharp) : (X, \mathcal{L}) \tilde{\to} (X, \mathcal{L}) : \text{同型写像}\}$$

は群演算 $(f, f_V^\sharp) \cdot (g, g_V^\sharp) = (f \circ g, g_{f^{-1}(V)}^\sharp \circ f_V^\sharp)$ により群となる.

定義 1.4.2 $\mathcal{S}(X)$-加群 L に対して

$$\mathrm{Aut}(X, L) = \left\{ (f, \theta) \;\middle|\; \begin{array}{l} f : X \tilde{\to} X : \text{homeo.} \\ \theta : L \tilde{\to} L : \mathbb{C}\text{-linear isom.} \\ \text{s.t. } \theta(\varphi \cdot s) = (\varphi \circ f) \cdot \theta(s) \text{ for } \varphi \in \mathcal{S}(X),\ s \in L \end{array} \right\}$$

は群演算

$$(f,\theta)\cdot(f',\theta')=(f\circ f',\theta'\circ\theta)$$

により群となる.

X 上の C_X^∞-加群 $\mathcal{L}$ と $(f,f_V^\sharp)\in\mathrm{Aut}(X,\mathcal{L})$ に対して

$$\begin{aligned}&f_X^\sharp f:\mathcal{L}(X)\tilde{\to}\mathcal{L}(X):\mathbb{C}\text{-linear isom.}\\&\quad\text{s.t. } f_X^\sharp(\varphi\cdot s)=(\varphi\circ f)\cdot f_X^\sharp(s)\text{ for }\varphi\in C_X^\infty(X),\ s\in\mathcal{L}(X)\end{aligned}$$

で，任意の $x\in X$ に対して

$$f_{X,x}^\sharp:\mathcal{L}_{f(x)}\ni[s\in\mathcal{L}(V)]\tilde{\mapsto}[f_V^\sharp(s)\in\mathcal{L}(f^{-1}(V))]\in\mathcal{L}_x:\mathbb{C}\text{-linear isom.}$$

である．特に任意の $s\in\mathcal{L}(X)$ に対して $\mathrm{supp}(f_X^\sharp(s))=f^{-1}(\mathrm{supp}(s))$ である. よって $\mathcal{S}(X)$-加群 $L=\mathcal{L}_c(X)$ に対して $\theta=f_X^\sharp|_L$ とおくと $(f,\theta)\in\mathrm{Aut}(X,L)$ となり

$$\mathrm{Aut}(X,\mathcal{L})\ni(f,f_V^\sharp)\mapsto(f,\theta)\in\mathrm{Aut}(X,L)$$

は群準同型写像となる．更に

命題 1.4.3 X 上の l-sheaf $\mathcal{L}$ に対して $L=\mathcal{L}_c(X)$ とおくと

$$\mathrm{Aut}(X,\mathcal{L})\ni(f,f_V^\sharp)\tilde{\mapsto}(f,f_X^\sharp|_L)\in\mathrm{Aut}(X,L):\text{group isom.}$$

[**証明**] まず $(f,\theta)\in\mathrm{Aut}(X,L)$ に対して

$$\theta L(f(x))=L(x)\quad\text{for }\forall x\in X.\tag{1.1}$$

実際，$L(f(x))=\langle\varphi\cdot s\mid s\in L,\varphi\in\mathcal{S}(X)\,\text{s.t.}\,\varphi(f(x))=0\rangle_{\mathbb{C}}$ より

$$\begin{aligned}\therefore\theta L(f(x))&=\langle\theta(\varphi\cdot s)=(\varphi\circ f)\cdot\theta s\mid s\in L,\varphi\in\mathcal{S}(X)\,\text{s.t.}\,\varphi(f(x))=0\rangle_{\mathbb{C}}\\&=\langle\varphi\cdot s\mid s\in L,\varphi\in\mathcal{S}(X)\,\text{s.t.}\,\varphi(x)=0\rangle_{\mathbb{C}}\\&=L(x).\end{aligned}$$

よって $V\subset X$:open に対して

$$\mathcal{L}(V)=\left\{(s_x)_{x\in V}\in\prod_{x\in V}L/L(x)\ \middle|\ \begin{array}{l}\forall x\in V\text{ に対して}\\x\in\exists W\subset V\text{:open},\ \exists s\in L\\\text{s.t. } s_y\equiv s\pmod{L(y)}\text{ for }\forall y\in W\end{array}\right\}$$

とおくと

$$f_V^\sharp : \mathcal{L}(V) \ni (s_x \in L/L(x))_{x\in V} \tilde{\mapsto} (\theta(s_{f(y)}) \in L/L(y))_{y\in f^{-1}(V)} \in \mathcal{L}(f^{-1}(V))$$

は $\mathbb{C}$-線形同型写像である．実際，$\forall x \in f^{-1}(V)$ に対して

$$f(x) \in \exists W \subset V : \text{opne}, \ \exists s \in L \text{ s.t. } s_y \equiv s \pmod{L(y)} \text{ for } \forall y \in W.$$

よって $x \in f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V)$:open に対して

$$s_{f(y)} \equiv s \pmod{L(f(y))} \,\text{for}\, \forall y \in f^{-1}(W)$$

$$\therefore \theta(s_{f(y)}) \equiv \theta(s) \pmod{L(y)} \,\text{for}\, \forall y \in f^{-1}(W) \text{ by } (1.1)$$

又

$$L/L(f(x)) \ni \overline{s} \tilde{\mapsto} \overline{\theta}(s) \in L/L(x) : \mathbb{C}\text{-linear isom. for } \forall x \in V$$

より $f_V^\sharp$:$\mathbb{C}$-linear isom. となる．更に

$$\begin{aligned} f_V^\sharp(\varphi \cdot (s_x \in L/L(x))_{x\in V}) &= f_V^\sharp((\varphi(x)s \in L/L(x))_{x\in V}) \\ &= (\theta(\varphi(f(x))s_{f(x)}) \in L/L(x))_{x\in f^{-1}(V)} \\ &= (\varphi(f(x))\theta(s_{f(x)}) \in L/L(x))_{x\in f^{-1}(V)} \\ &= (\varphi \circ f) \cdot f_V^\sharp((s_x \in L/L(x))_{x\in V}). \end{aligned}$$

■

1.5 l-sheaf に付随した分布

以下 X を局所コンパクト Hausdorff 完全非連結空間とする．X 上の l-sheaf $\mathcal{L}$ をとると，開集合 $V \subset X$ に対して複素線形同型

$$\mathcal{L}_c(X)_V = \{s \in \mathcal{L}_c(X) \mid \text{supp}(s) \subset V\} \ni s \tilde{\to} s|_V \in \mathcal{L}_c(V)$$

が成り立つ．

[**証明**] $s \in \mathcal{L}_c(V)$ とすると $\text{supp}(s) \subset W$ なるコンパクト開集合 $W \subset V$ がとれるから，命題 1.3.4 より $t|_V = s$ なる $s \in \mathcal{L}_c(X)$ をとって $u = \chi_W \cdot t \in \mathcal{L}_c(X)_V$

とおけば，$u|_V = s$ となる．一方，$s \in \mathcal{L}_c(X)_V$ に対して $s|_V = 0$ ならば $\mathrm{supp}(s) \cap V = \emptyset$，よって $s = 0$ となる．■

この同型を通して $\mathcal{L}_c(X)_V$ を $C_X^\infty(V)$-加群とすると

$$\mathcal{L}_c^*(V) = \{T : \mathcal{L}_c(X)_V \to \mathbb{C} : \mathbb{C}\text{-線形写像}\ \}$$

は $(\varphi \cdot T)(s) = T(\varphi \cdot s)$ $(\varphi \in C_X^\infty(V),\, T \in \mathcal{L}_c^*(V))$ により $C_X^\infty(V)$-加群となる．又，開集合 $V \subset W \subset X$ に対して

$$\mathrm{res}_V^W : \mathcal{L}_c^*(W) \ni T \mapsto T|_{\mathcal{L}_c(X)_V} \in \mathcal{L}_c^*(V)$$

とおくと（簡単の為に $\mathrm{res}_V^W(T) = T|_V$ と書く）

$$\mathcal{L}_c^* = (\mathcal{L}_c^*(V), \mathrm{res}_V^W)$$

は X 上の C_X^∞-加群となる．ここで

$$\mathrm{res}_V^X : \mathcal{L}_c^*(X) \to \mathcal{L}_c^*(V) : \text{全射 for } \forall V \subset X : \text{開集合}$$

だから

$$\mathcal{L}_c^*(X) \ni T \mapsto [T] \in \mathcal{L}_{c,x}^* : \text{全射 for } \forall x \in X.$$

よって $\mathcal{L}_c^*$ は X 上の l-sheaf となり，これを X 上の **$\mathcal{L}$-分布の層**と呼ぶ．$T \in \mathcal{L}_c^*(X)$ と $s \in \mathcal{L}_c(X)$ に対して $\langle T, s\rangle = T(s)$ とおく．層の一般論から $T \in \mathcal{L}_c^*(X)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{supp}(T) &= \{x \in X \mid 0 \neq [T] \in \mathcal{L}_{c,x}^*\} \\
&= \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in \forall V \subset X : \text{open に対して} \\ \exists s \in \mathcal{L}_c(X)_V \text{ s.t. } \langle T, s\rangle \neq 0 \end{array} \right\} \\
&\subset X : \text{閉集合}
\end{aligned}$$

とおく．

命題 1.5.1　1) $T \in \mathcal{L}_c^*(X)$，$s \in \mathcal{L}_c(X)$ に対して，$\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(s) = \emptyset$ ならば $\langle T, s\rangle = 0$，

2) 開集合 $V \subset X$ に対して

$$\mathrm{Ker}[\mathcal{L}_c^*(X) \ni T \mapsto T|_V \in \mathcal{L}_c^*(V)] = \{T \in \mathcal{L}_c^*(X) \mid \mathrm{supp}(T) \cap V = \emptyset\}.$$

[証明] 1) $x \in \mathrm{supp}(s)$ ならば $x \notin \mathrm{supp}(T)$ だから $T|_{\mathcal{L}_c(X)_V} = 0$ なるコンパクト開集合 $x \in V \subset X$ がとれるから，$\mathrm{supp}(s) \subset V_1 \cup \cdots \cup V_r$ かつ $T|_{\mathcal{L}_c(X)_{V_i}} = 0$ なるコンパクト開集合 $V_i \subset X$ がとれる。ここで

$$W_1 = V_1, W_2 = V_2 \cap V_1^c, W_3 = V_3 \cap V_1^c \cap V_2^c, \cdots$$

とおくと，$W_i \subset X$ はコンパクト開集合で

$$\mathrm{supp}(\varphi) \subset W_1 \cup \cdots \cup W_r, \qquad W_i \cap W_j = \emptyset \text{ if } i \neq j.$$

そこで $s_i \in \mathcal{L}_c(X)$ を $s_i|_{W_i} = s|_{W_i}, s_i|_{W_i^c} = 0$ により定めると，$s_i \in \mathcal{L}_c(X)_{W_i}$ かつ $s = \sum_{i=1}^r s_i$ となり，$T(s) = \sum_{i=1}^r T(s_i) = 0$ を得る．

2) $T \in \mathcal{L}_c^*(X)$ に対して，$T|_V = T|_{\mathcal{L}_c(X)_V} = 0$ ならば $V \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset$ は明らか．逆に $\mathrm{supp}(T) \cap V = \emptyset$ ならば，任意の $s \in \mathcal{L}_c(X)_V$ に対して $\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(s) = \emptyset$ だから，上に示したとおり $T|_V = T|_{\mathcal{L}_c(X)_V} = 0$ となる．■

局所閉集合 $Y \subset X$ に対して $\mathcal{M} = \mathcal{L}|_Y$ は Y 上の l-sheaf となり（命題 1.3.4）

$$p_Y : \mathcal{L}_c(X) \ni s \mapsto ([s] \in \mathcal{L}_y)_{y \in Y} \mathcal{M}_c(Y)$$

は全射複素線形写像で（命題 1.3.4）

$$\mathrm{Ker}(p_Y) = \{s \in \mathcal{L}_c(X) \mid \mathrm{supp}(s) \cap Y = \emptyset\}$$

である．よって

$$p_Y^* : \mathcal{M}_c^*(Y) \ni T \mapsto [s \mapsto \langle T, p_Y(s) \rangle] \in \mathcal{L}_c^*(X)$$

は単射複素線形写像となる．更に

命題 1.5.2 閉部分空間 $Y \subset X$ に対して，$V = Y^c \subset X$ とおいて

$$0 \to \mathcal{M}_c^*(Y) \xrightarrow[p_Y^*]{} \mathcal{L}_c^*(X) \xrightarrow[\mathrm{res}_V^X]{} \mathcal{L}_c^*(V) \to 0 : \text{exact}.$$

[証明] $T \in \mathcal{L}_c^*(X)$ に対して

$$\begin{aligned} T \in \mathrm{Ker}(\mathrm{res}_V^X) &\Leftrightarrow \mathcal{L}_c(X)_V \subset \mathrm{Ker}(T) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(p_Y) \subset \mathrm{Ker}(T) \\ &\Leftrightarrow T : \mathcal{L}_c(X) \xrightarrow{p_Y} \mathcal{M}_c(Y) \xrightarrow{\exists S} \mathbb{C} \Leftrightarrow T \in \mathrm{Im}(p_Y^*). \end{aligned}$$

■

1.6 完全非連結空間上の分布

X を完全非連結な局所コンパクト Hausdorff 空間とする．X 上の C^∞-関数の層 C_X^∞ は l-sheaf だから，X 上の C_X^∞-分布の層を $\mathcal{D}_X$ と書く．即ち開集合 $V \subset X$ に対して

$$\mathcal{S}(X)_V = \{\varphi \in \mathcal{S}(X) \mid \mathrm{supp}(\varphi) \subset V\}$$

として

$$\mathcal{D}_X(V) = \{T : \mathcal{S}(X)_V \to \mathbb{C} : \mathbb{C}\text{-linear map.}\}$$

は $(\varphi \cdot T)(f) = T(\varphi \cdot f)$ $(\varphi \in C_X^\infty(V), T \in \mathcal{D}_X(V))$ により $C_X^\infty(V)$-加群となり，開集合 $V \subset W \subset X$ に対して

$$\mathrm{res}_V^W : \mathcal{D}_X(W) \ni T \mapsto T|_{\mathcal{S}(X)_V} \in \mathcal{D}_X(V)$$

である．

命題 1.6.1 X 上の複素測度のなす複素ベクトル空間を $\mathcal{M}(X)$ とおくと[2]

$$\mathcal{M}(X) \ni \mu \mapsto \mu|_{\mathcal{S}(X)} \in \mathcal{D}(X)$$

は単射複素線形写像である．

[2] X 上の複素数値連続関数でコンパクト台なるもの全体を $C_c(X)$ として，コンパクト集合 $M \subset X$ に対して $\mathrm{supp}(\varphi) \subset M$ なる $\varphi \in C_c(X)$ の全体 $C_M(X)$ は $|\varphi|_M = \sup_{x \in M} |\varphi(x)|$ をノルムとする複素 Banach 空間である．複素線形形式 $\mu : C_c(X) \to \mathbb{C}$ で，任意のコンパクト集合 $M \subset X$ に対して $\mu|_{C_M(X)}$ が連続となるもの全体を $\mathcal{M}(X)$ とおく．

[証明] $\mu \in \mathcal{M}(X)$ s.t. $\mu|_{\mathcal{S}(X)} = 0$ とする．$\forall\varphi \in C_c(X)$ と $\forall\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathrm{supp}(\varphi) = M \subset X : \text{compact} \quad \therefore M \subset \exists K \subset X : \text{open compact}$$

で，$\delta > 0$ をとって

$$|\mu(\varphi) - \mu(\psi)| < \varepsilon \text{ for } \forall\psi \in C_K(X) \text{ s.t. } \sup_{y \in K} |\varphi(y) - \psi(y)| \leq \delta$$

とできる．ここで $\forall x \in M$ に対して

$$x \in \exists V_x \subset X : \text{open compact s.t. } |\varphi(x) - \varphi(y)| < \delta/2 \text{ for } \forall y \in V_x$$

で，有限個の $\{x_1, \cdots, x_r\} \subset M$ があって $M \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_r}$ とできる．

$$W_1 = V_{x_1},\, W_2 = V_{x_2} \cap V_{x_1}^c,\, W_3 = V_{x_3} \cap V_{x_1}^c \cap V_{x_2}^c, \cdots$$

とおけば

$$M \subset W_1 \cup \cdots \cup W_r \subset K,\ W_i \subset X : \text{open compact},\ W_i \cap W_j = \emptyset \text{ if } i \neq j$$

となる．そこで

$$\psi = \sum_{i=1}^{r} \varphi(y_i) \cdot \chi_{W_i} \in \mathcal{S}(X) \cap C_K(X) \quad (y_i \in W_i)$$

とおくと，$y \in W_i$ ならば，$y_i \in W_i \subset V_{x_i}$ だから

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - \psi(y)| &= |\varphi(y) - \varphi(y_i)| \\ &\leq |\varphi(y) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x_i) - \varphi(y_i)| < \delta, \end{aligned}$$

$y \in K \setminus W_1 \cup \cdots \cup W_r$ ならば $|\varphi(y) - \psi(y)| = 0$ となるから

$$\sup_{y \in K} |\varphi(y) - \psi(y)| \leq \delta \quad \therefore |\mu(\varphi) - \mu(\psi)| < \varepsilon.$$

仮定から $\mu(\psi) = 0$ だから $|\mu(\varphi)| < \varepsilon$ となる．■

$T \in \mathcal{D}(X)$ と $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ に対して

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \int_X \varphi(x) dT(x) = \int_X \varphi dT \in \mathbb{C}$$

とおく．

命題 1.6.2 $f \in C^\infty(X)$ に対して

$$T_f = \left[\mathcal{S}(X) \ni \varphi \mapsto \int_G \varphi(x) f(x) d_G(x) \in \mathbb{C}\right] \in \mathcal{D}(X)$$

で $\mathrm{supp}(T_f) = \mathrm{supp}(f)$ である．特に $f \mapsto T_f$ は injective $\mathbb{C}$-linear map だから，同一視 $f = T_f$ により $C^\infty(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)$ とする．

[証明] $x \in X$ に対して，$0 = [T] \in \mathcal{D}_{X,x}$ なる必要十分条件は，コンパクト開集合 $x \in V \subset X$ があって，任意のコンパクト開集合 $W \subset V$ に対して

$$\int_G \chi_W(x) f(x) d_G(x) = 0$$

なることである．ここで $f \in C^\infty(X)$ は局所定数関数だから，これは $f(x) = 0$ と同値．■

局所閉部分空間 $Y \subset X$ に対して

$$p_Y : \mathcal{S}(X) \ni \varphi \mapsto \varphi|_Y \in \mathcal{S}(Y) : \text{surjective } \mathbb{C}\text{-linear map.}$$
$$\text{s.t. } \mathrm{Ker}(p_Y) = \{\varphi \in \mathcal{S}(X) \mid \mathrm{supp}(\varphi) \cap Y = \emptyset\}$$

[証明] $\mathcal{S}(X) = \langle \chi_M \mid M \subset X : \text{open compact}\rangle_{\mathbb{C}}$ で，開コンパクト集合 $M \subset Y$ に対して

$$\exists V \subset X : \text{open s.t. } M = V \cap Y, \quad M \subset \exists W \subset V : \text{open compact}$$

$$\therefore M \subset W \cap Y \subset V \cap Y = M \qquad \therefore M = W \cap Y.$$

よって $\chi_W|_Y = \chi_M$ となる．■

で（命題 1.3.4）

$$p_Y^* : \mathcal{D}(Y) \ni T \mapsto [\mathcal{S}(X) \ni \varphi \mapsto T(\varphi|_Y) \in \mathbb{C}] \in \mathcal{D}(X)$$

は単射複素線形写像である．特に閉部分空間 $Y \subset X$ に対して，$V = Y^c \subset X$ とおいて

$$0 \to \mathcal{D}(Y) \xrightarrow[p_Y^*]{} \mathcal{D}(X) \xrightarrow[\mathrm{res}_V^X]{} \mathcal{D}_X(V) \to 0 : \text{exact.}$$

複素ベクトル空間 E に対して $\mathcal{S}(X)\otimes_{\mathbb{C}}E = \mathcal{S}(X;E)$ $(\varphi \otimes v = [x \mapsto \varphi(x)v])$ と同一視して

$$\langle\,,\rangle : \mathcal{D}(X) \times \mathcal{S}(X;E) \to E : \mathbb{C}\text{-双線形写像 s.t. } \langle T, \varphi \otimes v\rangle = \langle T, \varphi\rangle \cdot v$$

とおき

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_X \varphi(x)dT(x) = \int_X \varphi dT \quad \text{for } T \in \mathcal{D}(X), \varphi \in \mathcal{S}(X;E)$$

とおく.

命題 1.6.3 $T \in \mathcal{D}(X)$, $\varphi \in \mathcal{S}(X;E)$ (E：複素ベクトル空間) に対して

1) 任意の $\alpha \in E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C})$ に対して $[x \mapsto \langle\varphi(x),\alpha\rangle] \in \mathcal{S}(X)$,
2) $v = \displaystyle\int_X \varphi(x)dT(x) \in E$ は

$$\langle v, \alpha\rangle = \int_X \langle\varphi(x),\alpha\rangle dT(x) \text{ for } \forall\alpha \in E^*$$

なる唯一の元である.

[**証明**] 1) $\mathcal{S}(X;E) = \mathcal{S}(X)\otimes_{\mathbb{C}}E$ より明らか.
2) $\varphi = \psi \otimes u \in \mathcal{S}(X;E)$ $(\psi \in \mathcal{S}(X), u \in E)$ とすると，$v = \langle T,\psi\rangle \cdot u \in E$ だから，任意の $\alpha \in E^*$ に対して

$$\langle v,\alpha\rangle = \langle T,\psi\rangle\langle u,\alpha\rangle = \langle T, \langle u,\alpha\rangle \cdot \psi\rangle = \int_X \langle\varphi(x),\alpha\rangle dT(x).$$

一意性は $0 \neq v \in E$ ならば $\langle v,\alpha\rangle \neq 0$ なる $\alpha \in E^*$ が存在することによる.
■

X, Y を局所コンパクト Hausdorff 完全非連結空間とする．$\varphi \in C^\infty(X)$, $\psi \in C^\infty(Y)$ に対して

$$\varphi \otimes \psi : X \times Y \ni (x,y) \mapsto \varphi(x)\cdot\psi(y) \in \mathbb{C}$$

とおくと

$$(\varphi\otimes\psi)^{-1}(a) = \begin{cases} (\varphi^{-1}(0) \times Y) \cup (X \times \psi^{-1}(0)) & : a = 0, \\ \displaystyle\bigcup_{bc=a} \varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(c) & : a \neq 0 \end{cases}$$

だから $\varphi \otimes \psi \in C^\infty(X \times Y)$ である．このとき

$$\mathrm{supp}(\varphi \otimes \psi) = \mathrm{supp}(\varphi) \times \mathrm{supp}(\psi)$$

だから $\varphi \in \mathcal{S}(X), \psi \in \mathcal{S}(Y)$ ならば $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{S}(X \times Y)$ である．特にコンパクト開集合 $L \subset X, M \subset Y$ に対して $\chi_L \otimes \chi_M = \chi_{L \times M}$ だから

$$\mathcal{S}(X \times Y) = \langle \varphi \otimes \psi \mid \varphi \in \mathcal{S}(X), \psi \in \mathcal{S}(Y) \rangle_{\mathbb{C}}$$

である．そこで $S \in \mathcal{D}(X), T \in \mathcal{D}(Y)$ に対して

$$S \otimes T : \mathcal{S}(X \times Y) \to \mathbb{C}$$

を $\langle S \otimes T, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \cdot \langle T, \psi \rangle$ $(\forall \varphi \in \mathcal{S}(X), \psi \in \mathcal{S}(Y))$ により定義すると $S \otimes T \in \mathcal{D}(X \times Y)$ である．即ち

$$\int_{X \times Y} \varphi \otimes \psi d(S \otimes T) = \int_X \varphi dS \cdot \int_Y \psi dT \text{ for } \forall \varphi \in \mathcal{S}(X), \psi \in \mathcal{S}(Y)$$

とおく．$\mathrm{supp}(S \otimes T) = \mathrm{supp}(S) \times \mathrm{supp}(T)$ である．

1.7　完全非連結空間上のコンパクト台の分布

X を局所コンパクト Hausdorff 完全非連結空間とする．

$$T \in \mathcal{D}_c(X) = \{T \in \mathcal{D}(X) \mid \mathrm{supp}(T) : \mathrm{compact}\}$$

に対して，$M = \mathrm{supp}(T)$ は X の閉集合で $T|_{M^c} = 0$ だから，命題 1.5.2 より

$$\exists T_0 \in \mathcal{D}(M) \text{ s.t. } T = p_M^*(T_0) = [\varphi \mapsto T_0(\varphi|_M)].$$

そこで $\varphi \in C^\infty(X; E)$ (E：複素ベクトル空間) に対して $\varphi|_M \in \mathcal{S}(M; E)$ だから

$$\langle T, \varphi \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \langle T_0, \varphi|_M \rangle \quad \text{for } \forall \varphi \in C^\infty(X; E)$$

（即ち，$\displaystyle\int_X \varphi(x) dT(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_M \varphi(x) dT_0(x)$ for $\forall \varphi \in C^\infty(X; E)$）と定義する．言い換えれば $T \in \mathcal{D}_c(X)$ と $\varphi \in C^\infty(X; E)$ に対して

$$[x \mapsto \langle \varphi(x), \alpha \rangle] \in C^\infty(X) \text{ for } \forall \alpha \in E^*$$

で，$v = \displaystyle\int_X \varphi(x) dT(x) \in E$ は

$$\langle v, \alpha\rangle = \int_M \langle \varphi(x), \alpha\rangle dT_0(x) \text{ for } \forall \alpha \in E^*$$

なる唯一の元である．

命題 1.7.1 $p \in X$ に対して

1) $\varepsilon_p = [\mathcal{S}(X) \ni \varphi \mapsto \varphi(p) \in \mathbb{C}] \in \mathcal{D}(X)$ で $\mathrm{supp}(\varepsilon_p) = \{p\}$,
2) $\langle \varepsilon_p, \varphi\rangle = \varphi(p)$ for $\forall \varphi \in C^\infty(X; E)$ (E：複素ベクトル空間).

[**証明**] 1) $p \neq x \in X$ に対して $x \in V$ かつ $p \notin V$ なるコンパクト開集合 $V \subset X$ がとれて

$$\varepsilon_p(\varphi) = \varphi(p) = 0 \text{ for } \forall \varphi \in \mathcal{S}(X)_V.$$

よって $\varepsilon_p|_V = 0$ となり，$[\varepsilon_p] = 0$ in $\mathcal{D}_{X,x}$.
2) 明らか. ■

1.8 C_X^∞-加群に付随した G-加群

X 上の C_X^∞-加群 $\mathcal{L}$ をとり，位相群 G に対して

$$G \ni g \mapsto (f_g, f^\sharp_{g,V}) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L}) : \text{群の準同型写像}$$
$$\text{s.t.}\, G \times X \ni (g, x) \mapsto f_g(x) \in X : \text{連続}$$

とする．よって $g \cdot x = f_g(x)$ $(g \in G, x \in X)$ により G は X に連続に作用する．このとき

1) $g \cdot s = f^\sharp_{g^{-1},X}(s)$ $(g \in G, s \in \mathcal{L}(X))$ により $\mathcal{L}(X)$ が G-加群となる,
2) $g \in G, \varphi \in C^\infty(X), s \in \mathcal{L}(X)$ に対して $g \cdot (\varphi \cdot s) = (g \cdot \varphi) \cdot (g \cdot s)$,
3) $g \in G, s \in \mathcal{L}(X)$ に対して $\mathrm{supp}(g \cdot s) = g \cdot \mathrm{supp}(s)$.

[**証明**] 1) $g, h \in G$ に対して

$$(gh) \cdot s = f^{\sharp}_{h^{-1}g^{-1},X}(s) = f^{\sharp}_{g^{-1},X} \circ f^{\sharp}_{h^{-1},X}(s) = g \cdot (h \cdot s).$$

2) $\varphi \in C^{\infty}(X)$ に対して

$$g \cdot (\varphi \cdot s) = f^{\sharp}_{g^{-1},X}(\varphi \cdot s) = (\varphi \circ f_{g^{-1}}) \cdot f^{\sharp}_{g^{-1},X}(s) = (g \cdot \varphi) \cdot (g \cdot s).$$

ここで $(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(g^{-1} \cdot x)$ である．

3) $t = g \cdot s \in \mathcal{L}(X)$ とおくと

$$\mathcal{L}_x \ni [t] = [f^{\sharp}_{g^{-1},X}(s)] = f^{\sharp}_{g^{-1},x}([s] \in \mathcal{L}_{g^{-1} \cdot x})$$

より $x \in \operatorname{supp}(t) \Leftrightarrow g^{-1} \cdot x \in \operatorname{supp}(s)$ を得る． ■

よって

$$\mathcal{L}_c(X) = \{s \in \mathcal{L}(X) \mid \operatorname{supp}(s) : \text{compact}\} \subset \mathcal{L}(X) : G\text{-部分加群}$$

となる．又

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(X)_{\infty} &= \{s \in \mathcal{L}(X) : \text{smooth vector}\} \\
&= \left\{ s \in \mathcal{L}(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K \subset G : \text{open compact subgroup} \\ \text{s.t. } f^{\sharp}_{k,X}(s) = s \text{ for } \forall k \in K \end{array} \right\} \\
&\subset \mathcal{L}(X) : G\text{-submodule}
\end{aligned}$$

とおく．

特に閉集合 $M \subset X$ に対して

$$G_M = \{g \in G \mid gM = M\} = \bigcap_{x \in M} \theta_x^{-1}(M \times M) \subset G : \text{閉部分群}$$

$(\theta_x : G \ni g \mapsto (g \cdot x, g^{-1} \cdot x) \in X \times X\text{:conti. for } \forall x \in X)$ で

$$\mathcal{L}(M)\text{:}G_M\text{-加群 by } g \cdot (s_x)_{x \in M} = (f^{\sharp}_{g^{-1},x}(s_x))_{x \in M} \text{ for } g \in G$$

とある．特に $\forall x \in X$ に対して

$$\begin{aligned}
&G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G : \text{closed subgroup} \\
&\mathcal{L}_x\text{:}G_x\text{-module by } g \cdot s = f^{\sharp}_{g^{-1},x}(s) \text{ for } g \in G,\ s \in \mathcal{L}_x.
\end{aligned}$$

さて X 上の $\mathcal{L}$-分布の層 $\mathcal{L}_c^*$ を考えよう．開集合 $V \subset X$ と $g \in G$ に対して，複素線形同型写像

$$f_{g^{-1},X}^\sharp : \mathcal{L}_c(X)_{g^{-1}\cdot V} \tilde{\to} \mathcal{L}_c(X)_V$$

より複素線形同型写像

$$\theta_{g,V}^\sharp : \mathcal{L}_c^*(V) \ni T \tilde{\mapsto} T \circ f_{g^{-1},X}^\sharp \in \mathcal{L}_c^*(g^{-1} \cdot V)$$

が定義されて，$\varphi \in C^\infty(V), \psi \in \mathcal{S}(g^{-1} \cdot V)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \theta_{g,V}^\sharp(\varphi \cdot T), \psi\rangle &= \langle \varphi \cdot T, f_{g^{-1},X}^\sharp(\psi)\rangle = \langle T, \varphi \cdot f_{g^{-1},X}^\sharp(\psi)\rangle \\ &= \langle T, f_{g^{-1},X}^\sharp((\varphi \circ f_g)\psi)\rangle = \langle \theta_{g,V}^\sharp(T), (\varphi \circ f_g)\psi\rangle \\ &= \langle (\varphi \circ f_g) \cdot \theta_{g,V}^\sharp(T), \psi\rangle\end{aligned}$$

$(T \in \mathcal{L}_c^*(V))$ となるから，群準同型写像

$$G \ni g \mapsto (f_g, \theta_{g,V}^\sharp) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L}_c^*)$$

を得る．特に $\mathcal{L}_c^*(X)$ は $g \cdot T = \theta_{g^{-1},X}^\sharp(T)$ $(g \in G, T \in \mathcal{L}_c^*(X))$ により G-加群となる．

例 1.8.1 具体的な一例として，G が X に $(g,x) \mapsto g \cdot x$ により連続に作用している場合，$f_g(x) = g \cdot x$ $(g \in G, x \in X)$ とおいて，開集合 $V \subset X$ に対して複素線形同型写像を

$$f_{g,V}^\sharp : C_X^\infty(V) \ni \varphi \tilde{\mapsto} \varphi \circ f_g \in C_X^\infty(g^{-1} \cdot V)$$

により定義すると，群準同型写像

$$G \ni g \mapsto (f_g, f_{g,V}^\sharp) \in \mathrm{Aut}(X, C_X^\infty)$$

が定義される．よって $C^\infty(X)$ は

$$g \cdot \varphi = f_{g^{-1},X}^\sharp(\varphi) = \varphi \circ f_{g^{-1}} = [x \mapsto \varphi(g^{-1} \cdot x)]$$

$(g \in G, \varphi \in C^\infty(X))$ により G-加群となる．又 X 上の C_X^∞-分布の層，即ち X 上の分布の層 $\mathcal{D}_X$ に対して上の一般論を適用すれば，開集合 $V \subset X$ に対して複素線形同型写像

$$\theta^\sharp_{g,V} : \mathcal{D}_X(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_X(g^{-1} \cdot V)$$

が

$$\langle \theta^\sharp_{g,V}(T), \psi \rangle = \langle T, f^\sharp_{g^{-1},X}(\psi) \rangle = \langle T, \psi \circ f_{g^{-1}} \rangle \quad (T \in \mathcal{D}_X(V), \psi \in \mathcal{S}(g^{-1} \cdot V))$$

により定義され，$\mathcal{D}_X(X)$ は

$$g \cdot T = \theta^\sharp_{g^{-1},X}(T) = [\psi \mapsto \langle T, \psi \circ f_g \rangle = \langle T, g^{-1} \cdot \psi \rangle]$$

$(g \in G, T \in \mathcal{D}(X))$ により G-加群となる．特に G は G 自身に $(g,x) \mapsto gx$, $(x,g) \mapsto xg$ により左右から作用しているから

$$G \curvearrowright C^\infty(G) \text{ by } (g \cdot \varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x),$$
$$C^\infty(G) \curvearrowleft G \text{ by } (\varphi \cdot g)(x) = \varphi(xg^{-1})$$

及び

$$G \curvearrowright \mathcal{D}(G) \text{ by } \langle g \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, g^{-1} \cdot \varphi \rangle,$$
$$\mathcal{D}(G) \curvearrowleft G \text{ by } \langle T \cdot g, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \cdot g^{-1} \rangle$$

により作用が定まる．

第2章　完全非連結群上の分布

以下，G を完全非連結な局所コンパクト Hausdorff 群とし，G 上の左 Haar 測度 $d_G(x)$ を一つ固定しておく．

2.1　群上の分布の畳込み

$S, T \in \mathcal{D}_c(G)$ に対して $S \otimes T \in \mathcal{D}_c(G \times G)$ で

$$[G \times G \ni (x, y) \mapsto \varphi(xy) \in \mathbb{C})] \in C^\infty(G \times G) \text{ for } \varphi \in S(G)$$

より $S * T \in \mathcal{D}(X)$ が

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \int_{G \times G} \varphi(xy) d(S \otimes T)(x, y) \text{ for } \varphi \in S(X)$$

により定義される．このとき

$$\operatorname{supp}(S * T) \subset \operatorname{supp}(S) \cdot \operatorname{supp}(T) \qquad \therefore S * T \in \mathcal{D}_c(X)$$

である．
[**証明**] まず $x \in \operatorname{supp}(S*T)$ とすると，$x \in \forall V \subset G$:open に対して $\langle S*T, \varphi \rangle \neq 0$ なる $\varphi \in S(X)_V$ がとれる．よって

$$\operatorname{supp}[(y, z) \mapsto \varphi(yz)] \cap \operatorname{supp}(S \otimes T) \neq \emptyset$$

であるが，$\operatorname{supp}(S \otimes T) = \operatorname{supp}(S) \times \operatorname{supp}(T)$ だから，$\varphi(yz) \neq 0$ なる $y \in \operatorname{supp}(S)$ と $z \in \operatorname{supp}(T)$ がとれる．よって

$$(\operatorname{supp}(S) \cdot \operatorname{supp}(T)) \cap \operatorname{supp}(\varphi) \neq \emptyset \qquad \therefore (\operatorname{supp}(S) \cdot \operatorname{supp}(T)) \cap V \neq \emptyset$$

となる．$\mathrm{supp}(S)\cdot\mathrm{supp}(T)\subset G$ はコンパクト，従って閉集合だから

$$\mathrm{supp}(S*T)\subset\mathrm{supp}(S)\cdot\mathrm{supp}(T).$$

■

命題 2.1.1 $f\in S(G)$ と $T\in\mathcal{D}_c(G)$ に対して

$$(f*T)(x)=\int_G f(xy^{-1})dT(y),\quad (T*f)(x)=\int_G f(y^{-1}x)dT(y)\quad (x\in G).$$

とおくと，$T_f*T=f*T\in S(G), T*T_f=T*f\in S(G)$.

[**証明**] まず $f*T, T*f\in S(G)$ を示す．$f=\chi_{gK}$ with $g\in G$, $K\subset G$:open compact subgroup としてよい．$xy^{-1}\in gK$ ならば $y\in Kg^{-1}x$ だから

$$(f*T)(x)=\int_G \chi_{gK}(xy^{-1})dT(y)=\langle T,\chi_{Kg^{-1}x}\rangle \text{ for } x\in G.$$

よって $G=\bigsqcup_{\gamma\in\Gamma}Kg_\gamma$ として

$$Kg^{-1}x=Kg_\gamma\Leftrightarrow x\in gKg_\gamma$$

より $f*T$:locally constant．ここで $\mathrm{supp}(T)=M\subset G$:compact とおくと

$$M\cap Kg^{-1}x\neq\emptyset\Leftrightarrow x\in gKM$$

より $\mathrm{supp}(f*T)\subset gKM$:compact．よって $f*T\in S(G)$．$f=\chi_{Kg}$ とおいて同様に $T*f\in C^\infty(G)$ を得る．そこで $\forall\varphi\in S(G)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle T_f*T,\varphi\rangle&=\int_{G\times G}\varphi(xy)d(T_f\otimes T)(x,y)=\int_G\left(\int_G\varphi(xy)f(x)d_G(x)\right)dT(y)\\&=\int_G\varphi\left(\int_G f(xy^{-1}dT(y)\right)d_G(x)=\int_G\varphi(x)(f*T)(x)d_G(x).\end{aligned}$$

よって $T_f*T=f*T\in C^\infty(G)$. 同様に $T*T_f=T*f\in C^\infty(G)$. ■

$f,g\in S(G)$ に対して

$$(f*T_g)(x)=\int_G f(xy^{-1})dT_g(y)=\int_G f(xy^{-1})g(y)d_G(y)=(f*g)(x)\qquad(x\in G)$$

よって $f*T_g=f*g\in S(G)$ となる．

命題 2.1.2 $g \in G, T \in \mathcal{D}_c(G)$ に対して $\varepsilon_g * T = g \cdot T, T * \varepsilon_g = T \cdot g$.

[**証明**]

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_g * T, \varphi \rangle &= \int_{G \times G} \varphi(xy) d(\varepsilon_g \otimes T)(x,y) = \int_G \left(\int_G \varphi(xy) d\varepsilon_g(x) \right) dT(y) \\ &= \int_G \varphi(gy) dT(y) = \langle T, g^{-1} \cdot \varphi \rangle\end{aligned}$$

より $\varepsilon_g * T = g \cdot T$. 同様に $T * \varepsilon_g = T \cdot g$. ■

特に $\varepsilon_1 * T = T * \varepsilon_1 = T$ for $\forall T \in \mathcal{D}_c(G)$. よって $\mathcal{D}_c(G)$ は convolution product に関して ε_1 を 1 とする $\mathbb{C}$-algebra である. $x, y \in G$ に対して $\varepsilon_x * \varepsilon_y = \varepsilon_{xy}$ だから

$$\mathbb{C}[G] \hookrightarrow \mathcal{D}_c(G) : \mathbb{C}\text{-subalgebra by } g = \varepsilon_g$$

である.

2.2 コンパクト部分群に付随する冪等分布

コンパクト部分群 $\Gamma \subset G$ に対して, Γ 上の Haar 測度 μ_Γ で $\int_\Gamma d\mu_\Gamma(x) = 1$ なるものをとると, $\mu_\Gamma \in \mathcal{M}(\Gamma) \subset \mathcal{D}(\Gamma)$ だから

$$\varepsilon_\Gamma = p_\Gamma^*(\mu_\Gamma) = [\mathcal{S}(X) \ni \varphi \mapsto \int_\Gamma \varphi(x) d\mu_\Gamma(x) \in \mathbb{C}] \in \mathcal{D}(G)$$

とおく. このとき $\mathrm{supp}(\varepsilon_\Gamma) = \Gamma$, 従って $\varepsilon_\Gamma \in \mathcal{D}_c(G)$ である.
[**証明**] $x \notin \Gamma$ とすると, $\Gamma \cap V = \emptyset$ なるコンパクト開集合 $x \in V \subset G$ がとれるから

$$\langle \varepsilon_\Gamma, \varphi \rangle = 0 \text{ for } \forall \varphi \in \mathcal{S}(G)_V \qquad \therefore \varepsilon_\Gamma|_V = 0,$$

よって $0 = [\varepsilon_\Gamma] \in \mathcal{D}_{X,x}$ となる. よって $\mathrm{supp}(\varepsilon_\Gamma) \subset \Gamma$. 一方, $x \in \Gamma$ とすると, 任意のコンパクト開集合 $x \in V \subset G$ に対して $\chi_V \in \mathcal{S}(G)_V$ で, $\Gamma \cap V \subset \Gamma$ は空でないコンパクト開集合だから

$$\langle \varepsilon_\Gamma, \chi_V \rangle = \int_{\Gamma \cap V} d\mu_\Gamma(x) > 0.$$

よって $0 \neq [\varepsilon_\Gamma] \in \mathcal{D}_{X,x}$ となる．■

更に

$$\int_{\Gamma\times\Gamma} \varphi(xy) d(\mu_\Gamma \times \mu_\Gamma)(x,y) = \int_\Gamma d\mu_\Gamma(x) \int_\Gamma d\mu_\Gamma(y)\varphi(xy)$$
$$= \int_\Gamma \varphi(x) d\mu_\Gamma(x) \quad (\forall\varphi \in \mathcal{S}(X))$$

より $\varepsilon_\Gamma * \varepsilon_\Gamma = \varepsilon_\Gamma$ である．

命題 2.2.1 $\varepsilon_g * \varepsilon_\Gamma * \varepsilon_g^{-1} = \varepsilon_{g\Gamma g^{-1}}$ for $\forall g \in G$.

[**証明**] $\forall\varphi \in S(G)$ に対して

$$\langle \varepsilon_g * \varepsilon_\Gamma * \varepsilon_g^{-1}, \varphi\rangle = \langle \varepsilon_\Gamma, g^{-1}\cdot\varphi\cdot g\rangle = \int_\Gamma \varphi(gxg^{-1}) d\mu_\Gamma(x)$$
$$= \langle \varepsilon_{g\Gamma g^{-1}}, \varphi\rangle.$$

■

命題 2.2.2 コンパクト開部分群 $\Gamma \subset G$ に対して

1) $\varepsilon_\Gamma = \mathrm{vol}(\Gamma)^{-1}\chi_\Gamma \in S(G)$，即ち

$$\langle \varepsilon_\Gamma, \varphi\rangle = \mathrm{vol}(\Gamma)^{-1} \int_\Gamma \varphi(x) d_G(x) \text{ for } \forall\varphi \in S(G),$$

2) 開部分群 $\Lambda \subset \Gamma$ に対して $\varepsilon_\Gamma = (\Gamma : \Lambda)^{-1} \displaystyle\sum_{\dot\gamma \in \Gamma/\Lambda} \varepsilon_\gamma * \varepsilon_\Lambda$.

[**証明**] 1) G/Γ は離散的だから

$$d_{G/\Gamma}(\dot x) : \text{counting measure with weight } \mathrm{vol}(\Gamma) = \int_\Gamma d_G(x)$$

とおくと

$$\int_G \varphi(x) d_G(x) = \int_{G/\Gamma} \left(\int_\Gamma \varphi(x\gamma) d\mu_\Gamma(\gamma) \right) d_{G/\Gamma}(\dot x) \ \forall\varphi \in S(G)$$

となる．$G=\bigsqcup_i g_i\Gamma$ とおいて，$\forall\varphi\in S(G)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \varphi(x)d_G(x) &= \int_G \varphi(x)\chi_\Gamma(x)d_G(x)\\ &= \int_{G/\Gamma} d_{G/\Gamma}(\dot{x})\int_\Gamma d\mu_\Gamma(\gamma)\varphi(x\gamma)\chi_\Gamma(x\gamma)\\ &= \sum_i \mathrm{vol}(\Gamma)\int_\Gamma \varphi(g_i\gamma)\chi_\Gamma(g_i\gamma)d\mu_\Gamma(\gamma)\\ &= \mathrm{vol}(\Gamma)\int_\Gamma \varphi(\gamma)d\mu_\Gamma(\gamma).\end{aligned}$$

2) $\Gamma=\bigsqcup_{i=1}^n \gamma_i\Lambda$ として

$$\begin{aligned}\varepsilon_\Gamma &= \mathrm{vol}(\Gamma)^{-1}\chi_\Gamma = \mathrm{vol}(\Gamma)^{-1}\sum_{i=1}^n \chi_{\gamma_i\Lambda} = \mathrm{vol}(\Gamma)^{-1}\sum_{i=1}^n \gamma_i\cdot\chi_\Lambda\\ &= \mathrm{vol}(\Gamma)^{-1}\sum_{i=1}^n \mathrm{vol}(\Lambda)\gamma_i\cdot\varepsilon_\Lambda = (\Gamma:\Lambda)^{-1}\sum_{i=1}^n \varepsilon_{\gamma_i}*\varepsilon_\Lambda.\end{aligned}$$

■

2.3 群の作用で不変な分布 I

補題 2.3.1 G がコンパクトのとき，$T\in\mathcal{D}(G)$ が G-不変ならば

$$T=\lambda\cdot\left[S(G)\ni\varphi\mapsto\int_G \varphi(x)d_G(x)\in\mathbb{C}\right]\quad(\lambda\in\mathbb{C}).$$

[**証明**] μ_G を $\mu_G(G)=1$ なる G 上の Haar 測度として，$T(\mathbf{1})=\lambda\in\mathbb{C}$ とおく．

$$K\triangleleft G:\text{open},\qquad G=\bigsqcup_{i=1}^n g_iK\quad(n=(G:K))$$

とすると

$$1=\mu_G(G)=\sum_{i=1}^n \mu_G(g_iK)=n\mu_G(K)\qquad\therefore \mu_G(K)=(G:K)^{-1}.$$

一方,

$$\chi_{gK} = g \cdot \chi_K \qquad T(\chi_{gK}) = T(\chi_K) \quad \text{for } \forall g \in G$$

$$\mathbf{1} = \chi_G = \sum_{i=1}^{n} \chi_{g_i K} \qquad \therefore \lambda = T(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^{n} T(\chi_{g_i K}) = n \cdot T(\chi_K)$$

より $T(\chi_{gK}) = \lambda \cdot (G:K)^{-1} = \lambda \cdot \mu_G(K)$ $(\forall g \in G)$．よって命題 1.2.3 より $\forall \varphi \in S(G)$ に対して

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \chi_{g_i K} \text{ with } K \triangleleft G\text{:open, } \lambda_i \in \mathbb{C}$$

とおくと

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot T(\chi_{g_i K}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \lambda \cdot (G:K)^{-1} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \mu_G(g_i K) = \lambda \cdot \int_G \varphi(x) d\mu_G(x). \end{aligned}$$

■

定理 2.3.2 G はコンパクトで，コンパクト Hausdorff 完全非連結空間 X に $(g,x) \mapsto g \cdot x$ により連続かつ推移的に作用しているとする．このとき $\langle T, \mathbf{1} \rangle = 1$ なる G-不変分布 $T \in \mathcal{D}(X)$ が唯一存在する．更に X 上の G-不変 Radon 測度 μ があって

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_X \varphi(x) d\mu(x) \quad \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{S}(X)$$

となる．特に $\mu(X) = 1$ である．

[**証明**] $x_0 \in X$ をとると $H = \{g \in G \mid g \cdot x_0 = x_0\} \subset G$: closed subgroup で

$$G/H \ni \dot{g} \overset{\sim}{\mapsto} g \cdot x_0 \in X : \text{homeo.}, \qquad \Delta_G = \Delta_H = 1$$

より $\exists_1 \mu \in \mathcal{M}(X)$:$G$-invarinat s.t. $\mu(X) = 1$ で

$$T = [\varphi \mapsto \int_X \varphi(x) d\mu(x)] \in \mathcal{D}(X) : G\text{-invariant}$$

である．一方，$j : G \ni g \mapsto g \cdot x_0 \in X$ とおくと，コンパクト開集合 $M \subset X$ に対して $j^{-1}(M) \subset G$ はコンパクト開集合だから

$$j^* : S(X) \ni \varphi \mapsto \varphi \circ j \in S(G) : \text{injective } \mathbb{C}\text{-linear}$$

よって

$$j_* : \mathcal{D}(G) \ni S \mapsto S \circ j^* \in \mathcal{D}(X) : \text{surjective } \mathbb{C}\text{-linear} T,$$

$(\langle j_* T, \varphi\rangle = \langle T, j^*\varphi\rangle = \langle T, \varphi \circ j\rangle)$ となり

$$\begin{aligned} S \in \mathcal{D}(G), \quad g \in G \Rightarrow & \langle g \cdot (j_* S), \varphi\rangle = \langle j_* S, g \cdot \varphi\rangle = \langle S, (g \cdot \varphi) \circ j\rangle \\ & = \langle S, g \cdot (\varphi \circ j)\rangle = \langle g \cdot T, \varphi \circ j\rangle \\ & = \langle j_*(g \cdot S), \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in S(X) \\ \Rightarrow & g \cdot (j_* S) = j_*(g \cdot S). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & T' \in \mathcal{D}(X) : G\text{-invariant} \\ \Rightarrow & \exists S \in \mathcal{D}(G) : G\text{-invariant s.t. } T' = j_* S \\ \Rightarrow & S = \lambda \cdot [\varphi \mapsto \int_G \varphi(g) d_G(g)] \text{ with } \lambda \in \mathbb{C} \text{ by 2.3.1} \\ \Rightarrow & T' = S \circ j^* = \lambda \cdot [\varphi \mapsto \int_G \varphi(g \cdot x_0) d_G(g) = \int_X \varphi(x) d\mu(x)]. \end{aligned}$$

■

定理 2.3.3 $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ なるコンパクト開部分群 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$ に対して

$$\varepsilon_\Gamma = \varepsilon_{\Gamma_1} * \varepsilon_{\Gamma_2}.$$

[**証明**] $\varepsilon_\Gamma, \varepsilon_{\Gamma_i} \in \mathcal{D}(\Gamma)$ として考えればよい．$\Gamma_1 \times \Gamma_2$ は完全非連結なコンパクト Hausdorff 群で，Γ に $((g_1, g_2), x) \mapsto g_1 x g_2^{-1}$ により連続かつ推移的に作用する．$\forall (g_1, g_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2, \forall \varphi \in S(\Gamma)$ に対して

$$\begin{aligned} \langle (g_1, g_2) \cdot \varepsilon_\Gamma, \varphi\rangle &= \langle \varepsilon_\Gamma, (g_1, g_2)^{-1} \cdot \varphi\rangle \\ &= \int_\Gamma \varphi(g_1 x g_2^{-1}) d\mu_\Gamma(x) = \int_\Gamma \varphi(x) d\mu_\Gamma(x) = \langle \varepsilon_\Gamma, \varphi\rangle, \end{aligned}$$

$$\langle (g_1, g2)\cdot \varepsilon_{\Gamma_1} * \varepsilon_{\Gamma_2}, \varphi\rangle = \int_{\Gamma_1\times\Gamma_2} \varphi(g_1 x y g_2^{-1}) d(\mu_{\Gamma_1}\times\mu_{\Gamma_2})(x,y)$$
$$= \int_{\Gamma_1\times\Gamma_2} \varphi(xy) d(\mu_{\Gamma_1}\times\mu_{\Gamma_2})(x,y) = \langle \varepsilon_{\Gamma_1} * \varepsilon_{\Gamma_2}, \varphi\rangle.$$

よって $\varepsilon_\Gamma, \varepsilon_{\Gamma_1} * \varepsilon_{\Gamma_2} \in \mathcal{D}(\Gamma)$ は共に $\Gamma_1\times\Gamma_2$-不変である．更に

$$\varepsilon_\Gamma(\mathbf{1}) = 1, \quad \varepsilon_{\Gamma_1} * \varepsilon_{\Gamma_2}(\mathbf{1}) = \mu_{\Gamma_1}(\Gamma_1)\cdot\mu_{\Gamma_2}(\Gamma_2) = 1$$

だから，定理 2.3.2 より $\varepsilon_\Gamma = \varepsilon_{\Gamma_1} * \varepsilon_{\Gamma_2}$. ■

2.4　Hecke 代数

定義 2.4.1　1) $T\in\mathcal{D}(G)$ が局所左（右）不変であるとは，コンパクト開部分群 $K\subset G$ があって任意の $k\in K$ に対して $k\cdot T = T$ $(T\cdot k = T)$ となることをいう.

2) $f\in C^\infty(G)$ が局所左（右）不変であるとは，コンパクト開部分群 $K\subset G$ があって任意の $k\in K$ に対して $k\cdot f = f$ $(f\cdot k = f)$ なることをいう. 即ち任意の $k\in K$ に対して $f(kx) = f(x)$ $(f(xk) = f(x))$ なることをいう.

定理 2.4.2 $T\in\mathcal{D}(G)$ が局所左（右）不変ならば $T\in C^\infty(G)$，即ち，局所左（右）不変な $f\in C^\infty(G)$ があって

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_G \varphi(x) f(x) d_G(x) \qquad \text{for } \forall\varphi\in\mathcal{S}(X).$$

[**証明**] コンパクト開部分群 $K\subset G$ があって，任意の $k\in K$ に対して $k\cdot T = T$ とできる. $\forall g\in G$ に対して $X = Kg\subset G$ はコンパクト開集合で，$(k,x)\mapsto kx$ により K は X に連続かつ推移的に作用して，$T|_X\in\mathcal{D}(X)$ は K-不変である．一方

$$S = [S(X) = S(G)_X \ni \varphi \mapsto \int_G \varphi(x) d_G(x)] \in \mathcal{D}(X)$$

も K-不変であるから，定理 2.3.2 より $T|_X = \lambda_g\cdot S$ $(\exists\lambda_g\in\mathbb{C})$．ここで任意の $k\in K$ に対して $\lambda_{kg} = \lambda_g$ だから，$f = [G\ni g\mapsto \lambda_g\in\mathbb{C}]\in C^\infty(G)$ は局

所左不変である．ここで $G = \bigsqcup_i K g_i$ とおくと，$\forall\varphi \in S(G)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle &= \sum_i \langle T|_{Kg_i}, \varphi|_{Kg_i}\rangle \\ &= \sum_i \lambda_{g_i} \int_{Kg_i} \varphi(x) d_G(x) = \int_G \varphi(x) f(x) d_G(x).\end{aligned}$$

よって $T = T_f = f \in C^\infty(G)$ を得る．■

定理 2.4.3 $T \in \mathcal{D}_c(G)$ に対して，次は同値；

1) T は局所左不変,
2) T は局所右不変,
3) $T \in S(G)$，即ち $f \in S(G)$ があって

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_G \varphi(x) f(x) d_G(x) \quad \text{for } \forall\varphi \in \mathcal{S}(G).$$

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 3) 定理 2.4.2 より $\exists f \in C^\infty(G)$ s.t. $T = T_f$．ここで $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(T)$.

2) $\Rightarrow$ 3) 1) $\Rightarrow$ 3) と同様.

3) $\Rightarrow$ 1),2) 命題 1.2.3 よりコンパクト開部分群 $K \subset G$ をとって

$$f = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \chi_{Kg_i} = \sum_{j=1}^s \mu_j \cdot \chi_{h_j K} \qquad (\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C})$$

と書けるから $k \cdot f = f \cdot k = f$ for $\forall k \in K$ である．よって $\Delta_G(k) = 1$ for $\forall k \in K$ に注意して，任意の $\varphi \in S(G)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle k \cdot T, \varphi\rangle &= \langle T, k \cdot \varphi\rangle = \int_G \varphi(k^{-1}x) f(x) d_G(x) = \int_G \varphi(x) f(kx) d_G(x) \\ &= \langle T, \varphi\rangle, \\ \langle T \cdot k, \varphi\rangle &= \langle T, \varphi \cdot k\rangle = \int_G \varphi(xk^{-1}) f(x) d_G(x) = \int_G \varphi(x) f(xk) d_G(x) \\ &= \langle T, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

■

そこで

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(G) &= \{T \in \mathcal{D}_c(G) : \text{locally left invariant}\} \\ &= \{T \in \mathcal{D}_c(G) : \text{locally right invariant}\} \\ &= S(G) \text{ by } f = T_f = [S(G) \ni \varphi \mapsto \int_G \varphi(x) f(x) d_G(x) \in \mathbb{C}]\end{aligned}$$

とおくと，命題 2.1.1 より $\mathcal{H}(G)$ は $\mathcal{D}_c(G)$ の両側イデアルとなる．

命題 2.4.4

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(G) &= \langle \varepsilon_g * \varepsilon_K \mid g \in G, K \subset G : \text{コンパクト開部分群} \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle \varepsilon_K * \varepsilon_g \mid g \in G, K \subset G : \text{コンパクト開部分群} \rangle_{\mathbb{C}},\end{aligned}$$

即ち

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(G) &= \langle \chi_{gK} \mid g \in G, K \subset G : \text{コンパクト開部分群} \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle \chi_{Kg} \mid g \in G, K \subset G : \text{コンパクト開部分群} \rangle_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

[**証明**] $f \in S(G)$ とすると，命題 1.2.3 より

$$f = \sum_i \lambda_i \cdot \chi_{g_i K} \text{ with } K \subset G : \text{open compact subgroup}, G = \bigsqcup_i g_i K,$$

$$\lambda_i \in \mathbb{C} \,\text{s.t.}\, \lambda_i = 0 \,\text{for almost all}\, i$$

と書けるから，$\forall \varphi \in S(G)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle T_f, \varphi \rangle &= \int_G \varphi(x) f(x) d_G(x) = \sum_i \lambda_i \int_{g_i K} \varphi(x) d_G(x) \\ &= \sum_i \lambda_i \int_K \varphi(g_i x) d_G(x) = \sum_i \lambda_i \cdot \langle \varepsilon_K, g_i^{-1} \cdot \varphi \rangle \\ &= \sum_i \lambda_i \cdot \langle g_i^{-1} \cdot \varepsilon_K, \varphi \rangle = \sum_i \lambda_i \cdot \langle \varepsilon_{g_i} * \varepsilon_K, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

よって $T_f = \sum_i \lambda_i \cdot \varepsilon_{g_i} * \varepsilon_K$. 一方，$\varepsilon_g * \varepsilon_K * \varepsilon_g^{-1} = \varepsilon_{gKg^{-1}}$ より第二の等式を得る．■

第3章　完全非連結群の表現

以下，G は完全非連結な局所コンパクト Haudorff 群として，G 上の左 Haar 測度 $d_G(x)$ を一つ固定しておく．又，コンパクト開部分群 $K \subset G$ 上の Haar 測度 $d_K(k)$ は常に $\displaystyle\int_K dK(k) = 1$ となるように正規化しておく．

3.1　C^∞-G-加群

命題 1.1.4 から，G-加群（即ち $\mathbb{C}[G]$-加群）E の元 $v \in E$ に対して次は同値である；

1) $G \ni x \mapsto xv \in E$ は局所定数関数,
2) $\{x \in G \mid xv = v\} \subset G$ は開部分群,
3) $kv = v$ for $\forall k \in K$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ が存在する．

このとき $v \in E$ を C^∞-ベクトルと呼び

$$E_\infty = \{v \in E : C^\infty\text{-ベクトル}\ \} \subset E : G\text{-部分加群}$$

とおく．又，コンパクト部分群 $\Gamma \subset G$ に対して

$$E^\Gamma = \{v \in E \mid \gamma v = v \text{ for } \forall \gamma \in \Gamma\}, \quad E(\Gamma) = \langle \gamma v - v \mid \gamma \in \Gamma, v \in E\rangle_{\mathbb{C}}$$

とおく．

定義 3.1.1 G-加群 E に対して，任意の $v \in E$ が C^∞-ベクトルのとき（即ち，$E = \displaystyle\bigcup_{K \subset G:\text{コンパクト開部分群}} E^K$ であるとき，E を C^∞-G-加群と呼ぶ．

C^∞-G-加群 E に対して，$T \in \mathcal{D}_c(G)$, $v \in E$ とすると，$[x \mapsto xv] \in C^\infty(G;E)$ だから

$$Tv = \int_G xv dT(x) \in E$$

が定義される．即ち $Tv \in E$ は

$$\langle Tv, \alpha \rangle = \int_G \langle xv, \alpha \rangle dT(x) \quad \text{for } \forall \alpha \in E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$$

なる唯一のベクトルである．このとき

1) E は $\mathcal{D}_c(G)$-加群である,
2) 任意の $g \in G$ に対して $\varepsilon_g v = gv$ $(v \in E)$.

[**証明**] 1) $S, T \in \mathcal{D}_c(G)$ として，任意の $v \in E, \alpha \in E^*$ に対して

$$\begin{aligned}\langle (S * T)v, \alpha \rangle &= \int_{G \times G} \langle (xy)v, \alpha \rangle d(S \otimes T)(x, y) \\ &= \int_G dS(x) \int_G dT(y) \langle x(yv), \alpha \rangle \\ &= \int_G \langle x(Tv), \alpha \rangle dS(x) = \langle S(Tv), \alpha \rangle\end{aligned}$$

より $(S * T)v = S(Tv)$ となる．

2) 任意の $v \in E, \alpha \in E^*$ に対して

$$\langle \varepsilon_g v, \alpha \rangle = \int_G \langle xv, \alpha \rangle d\varepsilon_g(x) = \langle gv, \alpha \rangle.$$

■

定理 3.1.2 C^∞-G-加群 E とコンパクト部分群 $\Gamma \subset G$ に対して

$$0 \to E(\Gamma) \longrightarrow E \xrightarrow{\varepsilon_\Gamma} E^\Gamma \to 0 : \text{exact}.$$

[**証明**] $v \in E$, $\gamma \in \Gamma$, $\alpha \in E^*$ に対して

$$\langle \gamma(\varepsilon_\Gamma v), \alpha \rangle = \int_\Gamma \langle (\gamma k)v, \alpha \rangle d_\Gamma(k) = \langle \varepsilon_\Gamma v, \alpha \rangle$$

より $\varepsilon_\Gamma E \subset E^\Gamma$．逆に $v \in E^\Gamma$ に対して

$$\langle \varepsilon_\Gamma v, \alpha\rangle = \int_\Gamma \langle kv, \alpha\rangle d_\Gamma(k) = \langle v, \alpha\rangle \quad \text{for } \forall\alpha \in E^*$$

より $\varepsilon_\Gamma v = v$ となり，$\varepsilon_\Gamma E = E^\Gamma$ である．$v \in E, \gamma \in \Gamma$ に対して

$$\langle \varepsilon_\Gamma(\gamma v), \alpha\rangle = \int_\Gamma \langle (k\gamma)v, \alpha\rangle d_\Gamma(k) = \langle \varepsilon_\Gamma v, \alpha\rangle \quad \text{for } \forall\alpha \in E^*$$

より $\varepsilon_\Gamma(\gamma v) = \varepsilon_\Gamma v$，従って $\gamma v - v \in \mathrm{Ker}(\varepsilon_\Gamma)$．逆に $v \in \mathrm{Ker}(\varepsilon_\Gamma)$ とする．$lv = v \ \forall l \in L$ なるコンパクト開部分群 $L \subset G$ をとって $\Gamma = \bigsqcup_{i=1}^{n} \gamma_i(\Gamma \cap L)$ $(n = (\Gamma : \Gamma \cap L) < \infty)$ とおくと

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_\Gamma v, \alpha\rangle &= \int_\Gamma \langle kv, \alpha\rangle d_\Gamma(k) = \sum_{i=1}^{n} \int_L \langle (\gamma_i l)v, \alpha\rangle d_\Gamma(l) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\Gamma : \Gamma \cap L)^{-1} \langle \gamma_i v, \alpha\rangle \quad \text{for } \forall\alpha \in E^*.\end{aligned}$$

よって $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i v = 0$．よって $v = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (v - \gamma_i v) \in E(K)$ となる．■

系 3.1.3 C^∞-G-加群 E とコンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して $E = E(K) \oplus E^K$ である．

[**証明**] 定理 2.3.3 より $\varepsilon_K * \varepsilon_K = \varepsilon_K$ だから，定理 3.1.2 と標準的な議論から上の通り．■

定義 3.1.4 C^∞-G-加群 E であって，任意の開コンパクト部分群 $K \subset G$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$ となるとき，E を**許容** G-**加群**と呼ぶ.

命題 3.1.5 許容 G-加群の完全系列 $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ に対して

E が許容 G-加群 $\Leftrightarrow E', E''$ が許容 G-加群.

[**証明**] 任意の開コンパクト部分群 $K \subset G$ に対して完全系列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_K} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_K} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_K} & & \\
0 & \longrightarrow & E'^K & \longrightarrow & E^K & \longrightarrow & E''^K & & \\
 & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

が成り立つから，完全系列

$$0 \to E'^K \to E^K \to E''^K \to 0$$

が成り立つ．よって $\dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$ なる必要十分条件は $\dim_{\mathbb{C}} E'^K < \infty$ かつ $\dim_{\mathbb{C}} E''^K < \infty$ なることである． ■

注意 3.1.6 $\dim_{\mathbb{C}} E < \infty$ なる G-加群 E に対して，次は同値である；

1) E は C^∞-G-加群である，
2) $\pi : G \ni g \mapsto [v \mapsto g \cdot v] \in GL_{\mathbb{C}}(E)$ は連続群準同型写像である．

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) は明らか．$\dim_{\mathbb{C}} E < \infty$ より $GL_{\mathbb{C}}(E)$ の単位元 1 の開近傍 U で $\{1\}$ 以外の部分群を含まないものがとれるから，π が連続ならば $\mathrm{Ker}\pi \subset G$ は開部分群となり，$K \subset \mathrm{Ker}\,\pi$ なる開コンパクト部分群 $K \subset G$ がとれる．よって 2) $\Rightarrow$ 1) が従う． ■

後に用いるので次の補題を示しておく；

補題 3.1.7 一般の群 G の指数有限の正規部分群 $H \subset G$ と G-加群 E に対して

1) E が H-加群として半単純ならば G-加群としても半単純，
2) E が単純 G-加群ならば，単純 H-部分加群 $E_i \subset E$ の直和 $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ $(r \leq (G : H))$ となる．

[**証明**] 1) G-部分加群 $F \subset E$ に対して $E = F \oplus F'$ なる H- 部分加群 $F' \subset E$ がある．$P : E \to F$ を直和分解 $E = F \oplus F'$ に関する射影として

$$P_0(x) = (G:H)^{-1} \sum_{\dot{g} \in G/H} gP(g^{-1}x) \qquad (x \in E)$$

とおくと，$P_0(x) = X$ for $\forall x \in F$ だから $P_0 : E \to F$ は全射 G-加群準同型写像で $P_0^2 = P_0$ である．よって $E = F \oplus \operatorname{Ker} P_0$ となる．

2) $(G:H) < \infty$ だから群環 $\mathbb{C}[G]$ は $\mathbb{C}[H]$ 上有限生成となり，E は有限生成 H-加群である．よって Zorn の補題を用いて E/E_0 が単純 H-加群となる H-部分加群 $E_0 \subset E$ の存在が示される．$H \triangleleft G$ より，任意の $g \in G$ に対して $g \cdot E_0 \subset E$ は H-部分加群となり，H-加群準同型写像

$$I : E \to \bigoplus_{\dot{g} \in G/H} E/g \cdot E_0 \qquad (x \mapsto (x \pmod{g \cdot E_0})_{\dot{g} \in G/H})$$

に対して $\operatorname{Ker} I \subsetneqq E$ は G-部分加群となるから $\operatorname{Ker} I = 0$ となる．よって E は半単純 H-加群で，その組成列の長さは $l_H(E) \leq (G:H)$ となる．■

3.2 C^∞-G-加群と C^∞-$\mathcal{H}(G)$-加群

$\mathcal{D}_c(G)$ は畳込み積に関して ε_1 を 1 にもつ $\mathbb{C}$-代数で，$\mathcal{H}(G) \subset \mathcal{D}_c(G)$ は両側イデアルとなるから，$\mathcal{H}(G)$ は畳込み積に関して必ずしも 1 を持たない $\mathbb{C}$-代数となる．

定義 3.2.1 $E = \displaystyle\bigcup_{K \subset G:\text{コンパクト開部分群}} \varepsilon_K E$ なる $\mathcal{H}(G)$-加群 E を C^∞-$\mathcal{H}(G)$-加群と呼ぶ．

定理 3.1.2 より，C^∞-G-加群は自然に C^∞-$\mathcal{H}(G)$-加群となる．

逆に E を C^∞-$\mathcal{H}(G)$-加群とする．

$$\begin{aligned}
T \in \mathcal{D}_c(G), v \in E \Rightarrow \exists K \subset G &: \text{コンパクト開部分群 s.t. } \varepsilon_K v = v \\
&T * \varepsilon_K \in \mathcal{H}(G) \quad (\because \varepsilon_K \in \mathcal{H}(G)) \\
&\Rightarrow Tv \overset{\text{def}}{=} (T * \varepsilon_K)v \in E
\end{aligned}$$

とおくと，E は $\mathcal{D}_c(G)$-module かつ $\varepsilon_1 v = v$ $(\forall v \in E)$ となる．

[**証明**] $v \in E$ として，$\varepsilon_K v = v$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ をとる．開部分群 $L \subset K$ に対して $\varepsilon_K = \varepsilon_L * \varepsilon_K$ だから（定理 2.3.3），$T \in \mathcal{D}_c(G)$ に対して

$$(T * \varepsilon_K)v = (T * \varepsilon_L * \varepsilon_K)v = (T * \varepsilon_L)v$$

となり，$Tv = (T * \varepsilon_K)v$ は K の選択によらず well-defined である．$S, T \in \mathcal{D}_c(G)$ とする．$T * \varepsilon_K \in \mathcal{H}(G)$ だから，開部分群 $L \subset K$ をとって $l(T * \varepsilon_K) = T * \varepsilon_K$ for $\forall l \in L$ とできる．よって $\varepsilon_L * (T * \varepsilon_K) = T * \varepsilon_K$ となる．よって $(S * T) * \varepsilon_K = (S * \varepsilon_L) * (T * \varepsilon_K)$ より

$$\begin{aligned}(S * T)v &= ((S * T) * \varepsilon_K)v \\ &= ((S * \varepsilon_L) * (T * \varepsilon_K))v = S(Tv).\end{aligned}$$

■

そこで $g \in G, v \in E$ に対して $gv = \varepsilon_g v \in E$ とおくと

1) E は C^∞-G-加群,
2) $T \in \mathcal{D}_c(G), v \in E$ に対して $Tv = \displaystyle\int_G xv dT(x)$.

[**証明**] 1) $v \in E$ に対して $\varepsilon_K v = v$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ をとると，任意の $k \in K$ に対して

$$kv = (\varepsilon_k * \varepsilon_K)v = \varepsilon_K v = v.$$

よって E は C^∞-G-加群である．

2) $v \in E$ とする．まずコンパクト開部分群 $K \subset G$ と $g \in G$ をとって $T = \varepsilon_g * \varepsilon_K \in \mathcal{H}(G)$ に対して，$l \cdot v = v$ for $\forall l \in L$ なる開部分群 $L \subset K$ をとって，命題 2.2.2 より

$$\varepsilon_g * \varepsilon_K = (K : L)^{-1} \sum_{\dot{k} \in K/L} \varepsilon_{gk} * \varepsilon_L$$

よって $\varepsilon_g * \varepsilon_K \cdot v = (K : L)^{-1} \displaystyle\sum_{\dot{k} \in K/L} (gk) \cdot v$．ここで

$$\int_G x \cdot v d(\varepsilon_g * \varepsilon_L)(x) = \int_{G \times G} (xy) \cdot v d(\varepsilon_g \otimes \varepsilon_L(x, y) = \int_L gl \cdot v d_L(l) = g \cdot v$$

だから $\varepsilon_g * \varepsilon_K \cdot v = \int_G x \cdot vd(\varepsilon_g * \varepsilon_K)(x)$．よって命題 2.4.4 より

$$T \cdot v = \int_G x \cdot vdT(x) \text{ for } \forall T \in \mathcal{H}(G).$$

そこで一般に $T \in \mathcal{D}_c(G)$ に対して

$$\begin{aligned}
Tv = (T * \varepsilon_L)v &= \int_G x \cdot vd(T * \varepsilon_L(x) \\
&= \int_{G\times G} (xy) \cdot vd(T \otimes \varepsilon_L)(x, y) = \int_G \left(\int_G xyvd\varepsilon_L(y) \right) dT(x) \\
&= \int_G x \cdot vdT(x).
\end{aligned}$$

■

コンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して，$\varepsilon_K \in \mathcal{H}(G)$ だから

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_K(G) = \varepsilon_K * \mathcal{H}(G) * \varepsilon_K &= \{T \in \mathcal{H}(G) \mid \varepsilon_K * T * \varepsilon_K = T\} \\
&\subset \mathcal{H}(G) : \mathbb{C}\text{-subalgebra with unit } \varepsilon_K
\end{aligned}$$

とおく．$S(G) = \mathcal{H}(G)$ by $\varphi = T_\varphi$ と同一視すれば

$$\mathcal{H}_K(G) = \{\varphi \in S(G) \mid \varphi(kxk') = \varphi(x) \text{ for } \forall k, k' \in K\},$$

よって $\{\chi_{KgK}\}_{g\in G}$:$\mathbb{C}$-basis of $\mathcal{H}_K(G)$ である．
[**証明**] $f \in S(G)$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_K * T_f * \varepsilon_K, \varphi\rangle &= \int_{K\times G\times K} \varphi(kxk')f(x)d_K(k)d_G(x)d_K(k') \\
&= \int_G \left(\int_{K\times K} f(kxk')d_K(k)d_K(k') \right) d_G(x) \text{ for } \forall\varphi \in S(G)
\end{aligned}$$

$$\therefore \varepsilon_K * T_f \varepsilon_K = T_{{}^\circ f^\circ} \text{ with } {}^\circ f^\circ(x) = \int_{K\times K} f(kxk')d_K(k)d_K(k').$$

■

C^∞-G-加群 E とコンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して，$E^K = \varepsilon_K E$（定理 3.1.2）は $\mathcal{H}_K(G)$-加群である．

命題 3.2.2 C^∞-G-加群 E に対して，次は同値；

1) E は単純 G-加群,
2) 任意のコンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して $E^K = \{0\}$ 又は E^K は単純 $\mathcal{H}_K(G)$-加群.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) あるコンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して $\{0\} \subsetneqq V \subsetneqq E^K$ なる $\mathcal{H}_K(G)$-部分加群 V があったとすると，$\mathcal{D}_c(G) \cdot V \subset E$ は $\mathcal{D}_c(G)$-部分加群となり

$$E^K \cap \mathcal{D}_c(G) \cdot V = \varepsilon_K \cdot (\mathcal{D}_c(G) \cdot V) = (\varepsilon * \mathcal{D}_c(G) * \varepsilon_K) \cdot V = V$$

より $\{0\} \subsetneqq \mathcal{D}_c(G) \cdot V \subsetneqq E$ となる．

2) $\Rightarrow$ 1) $\{0\} \subsetneqq V \subsetneqq E$ なる G-部分加群 V があったする．$u \in E \notin V, 0 \neq v \in V$ をとり，$u, v \in E^K$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ をとると

$$u \in E^K \notin V^K,\ 0 \neq v \in V^K$$

より $\{0\} \subsetneqq V^K \subsetneqq E^K$ となる．■

命題 3.2.3 単純な C^∞-G-加群 E_i $(i = 1, 2)$ と $E_i^K \neq 0$ $(i = 1, 2)$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して，次は同値；

1) G-加群として同型；$E_1 \xrightarrow{\sim} E_2$,
2) $\mathcal{H}_K(G)$-加群として同型；$E_1^K \xrightarrow{\sim} E_2^K$.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) 明らか．2) $\Rightarrow$ 1) $T : E_1^K \xrightarrow{\sim} E_2^K$ を $\mathcal{H}_K(G)$-加群の同型写像として

$$\begin{aligned} V &= \{(x, Tx) \mid x \in E_1^K\} \subset E_1^K \oplus E_2^K : \mathcal{H}_K(G)\text{-部分加群}, \\ W &= \mathcal{D}_c(G) \cdot V \subset E_1 \oplus E_2 : \mathcal{D}_c(G)\text{-部分加群} \end{aligned}$$

とおくと

$$W^K = (\varepsilon_K * \mathcal{D}_c(G) * \varepsilon_K) \cdot V = V$$

より $W \not\subset E_i$, $E_i \not\subset W$ $(i = 1, 2)$．よって

$$p_i : W \ni (x_1, x_2) \mapsto x_i \in E_i : \mathcal{D}_c(G)\text{-加群の準同型写像}$$

に対して，$0 \neq \mathrm{Im}(p_1) \subset E_1$ ($\because W \not\subset E_2$) より $\mathrm{Im}(p_1) = E_1$，又 $\mathrm{Ker}(p_1) \subset W \cap E_2 \subsetneqq E_2$ より $\mathrm{Ker}(p_1) = 0$ となる．よって $p_1 : W \xrightarrow{\sim} E_1$ は $\mathcal{D}_c(G)$-加群の同型を与える．p_2 についても同様だから，$\mathcal{D}_c(G)$-加群の同型 $E_1 \xrightarrow{\sim} E_2$ を得る．■

定理 3.2.4 コンパクト開部分群 $K \subset G$ と単純な $\mathcal{H}_K(G)$-加群 V に対して，$\mathcal{H}_K(G)$-加群の同型 $E^K \xrightarrow{\sim} V$ が成り立つような単純 C^∞-G-加群 E が存在する．

[**証明**] $0 \neq v \in V$ として

$$f : \mathcal{H}_K(G) \ni \varphi \mapsto \varphi \cdot v \in V : \text{surjective } \mathcal{H}_K(G)\text{-module hom.}$$
$$\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(f) \subset \mathcal{H}_K(G) : \text{ideal}$$

とおく．

$$E_1 \subset \mathcal{H}(G) : \text{left } \mathcal{H}(G)\text{-submodule generated by } \mathcal{H}_K(G)$$
$$E_2 \subset \mathcal{H}(G) : \text{left } \mathcal{H}(G)\text{-submodule generated by } \mathfrak{a}$$

とおくと

$$E_1^K = \varepsilon_K * E_1 = \mathcal{H}_K(G), \qquad E_2^K = \varepsilon_K * E_2 = \mathfrak{a}$$

より，$\mathcal{H}_K(G)$-加群として

$$\begin{aligned}(E_1/E_2)^K = \varepsilon_K \cdot (E_1/E_2) &= (\varepsilon_K * E_1 + E_2)/E_2 \\ &\xrightarrow{\sim} E_1^K/E_1^K \cap E_2 = \mathcal{H}_K(G)/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} V.\end{aligned}$$

よって

$$E_3 = E_1/E_2 : \mathcal{H}(G)\text{-module generated by } 0 \neq \forall u \in (E_1/E_2)^K.$$

ここで Zorn の補題を用いて

$$\exists E' \subset E_3 : \mathcal{H}(G)\text{-subsmodule s.t. } E = E_3/E' \text{:simple } \mathcal{H}(G)\text{-module}$$

で

$$(E')^K \subset E_3^K \tilde{\to} V : \mathcal{H}_K(G)\text{-submodule} \quad \therefore (E')^K = \{0\} \text{ or } E_3^K.$$

ここで $(E')^K = E_3^K$ ならば $E' = E_3$ となり矛盾するから，$(E')^K = \{0\}$. よって $\mathcal{H}_K(G)$-加群として

$$\begin{aligned} E^K = \varepsilon_K \cdot (E_3/E') &= (E_3^K + E')/E' \\ &\tilde{\to} E_3^K/E_3^K \cap E' \tilde{\to} E_3^K \tilde{\to} V. \end{aligned}$$

よって simple $\mathcal{H}(G)$-module E に対応する simple smooth G-module をとればよい．■

3.3　G が σ-コンパクトの場合

この節では完全非連結な局所コンパクト Hausdorff 群 G は σ-compact（i.e. G は高々可算個のコンパクト集合の和集合）であると仮定する．

定理 3.3.1 単純な C^∞-G-加群 E に対して $\mathrm{End}_G(E) = \{\lambda \cdot \mathrm{id}_E \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

[**証明**] まず $\mathrm{End}_G(E)$ は division $\mathbb{C}$-algebra である．そこで

$$A \in \mathrm{End}_G(E) \notin \{\lambda \cdot \mathrm{id}_E \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

として $R_\lambda = (A - \lambda \cdot \mathrm{id}_E)^{-1} \in \mathrm{End}_G(E)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ とおく．$0 \neq \xi \in E$ に対して

$$\{R_\lambda \cdot \xi \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \subset E : \mathbb{C} \text{ 上一次独立}.$$

実際，相異なる $\{\lambda_i\}_{i=1,\cdots,r} \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot R_{\lambda_i} \cdot \xi = 0, \quad c_i \in \mathbb{C} \text{ s.t. } (c_1, \cdots, c_r) \neq (0, \cdots, 0)$$

とすると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot R_{\lambda_i} &= \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot (A - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_E)^{-1} = f(A) \cdot \prod_{i=1}^{r} R_{\lambda_i} \quad (f(X) \in \mathbb{C}[X]) \\ &= c \cdot \prod_{j=1}^{s} (A - \mu_j \cdot \mathrm{id}_E) \cdot \prod_{i=1}^{r} R_{\lambda_i} \quad (c, \mu_j \in \mathbb{C}, c \neq 0) \\ &\in \mathrm{End}_G(E)^{\times},\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\prod_{j=1}^{s}(A - \mu_j \cdot \mathrm{id}_E) \cdot \prod_{i=1}^{r} R_{\lambda_i} \cdot \xi = 0$ より $\xi = 0$ となり矛盾する．

一方，$\xi \in E^K$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ があるから

$$E = \langle g \cdot \xi \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}} = \langle g \cdot \xi \mid \dot{g} \in G/K \rangle_{\mathbb{C}}$$

で，G は可算個のコンパクト集合の和集合だから，$(G : K)$ は可算．よって $\dim_{\mathbb{C}} E$ は可算となり，$\mathbb{C}$ は可算となって矛盾する．■

定理 3.3.2 $0 \neq T \in \mathcal{D}_c(G)$ に対して，T の作用が 0 でないような単純な C^{∞}-G-加群 E が存在する．

[**証明**] まず $T(\chi_{gK}) \neq 0$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ と $g \in G$ をとり

$$\langle T, \chi_{gK} \rangle = \langle T, g \cdot \chi_K \rangle = \langle g^{-1} \cdot T, \chi_K \rangle = \langle \varepsilon_{g^{-1}} * T, \chi_K \rangle$$

だから，$S = \varepsilon_{g^{-1}} * T \in \mathcal{D}_c(G)$ とおくと $\langle S, \chi_K \rangle \neq 0$．よって

$$0 \neq h = \varepsilon_K * S * \varepsilon_K \in \mathcal{H}_K(G) \subset \mathcal{H}(G) = S(G).$$

実際,

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_K * S * \varepsilon_K, \chi_K \rangle &= \int_{G \times G \times G} \chi_K(xyz) d(\varepsilon_K \times S \times \varepsilon_K)(x, y, z) \\ &= \mathrm{const.} \times \int_K d_G(x) \int_G dS(y) \int_K d_G(z) \chi_K(xyz) \\ &= \mathrm{const.} \times \langle S, \chi_K \rangle \neq 0.\end{aligned}$$

そこで $h^*(x) = \overline{h(x^{-1})}$ $(x \in G)$ とおくと，$h^* \in S(G)$ で，$h_0 = h^* * h \in \mathcal{H}_K(G) \subset S(G)$ とおくと

$$h_0(1) = \int_G |h(x)|^2 d_G(x) \neq 0$$

より $h_0 \neq 0$, $h_0^* = h_0$．よって

$$h_0^2 = h_0^* * h_0 \neq 0,\ h_0^4 = h_0^2 * h_0^2 \neq 0, \cdots .$$

よって $h_0 = h^* * h \in \mathcal{H}_K(G)$:not nilpotent．ここで $\mathcal{H}_K(G)$ は $\mathbb{C}$-algebra with 1 で $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_K(G)$ =contable だから，定理 A.8.3 より

$$h_0 \notin \mathfrak{h}(\mathcal{H}_K(G)) = \bigcap_{\mathfrak{m} \subset \mathcal{H}_K(G):\text{max. left ideal}} \mathfrak{m}$$

$$\therefore \exists \mathfrak{m} \subset \mathcal{H}_K(G) : \text{max. left ideal s.t. } h_0 \notin \mathfrak{m}.$$

よって $V = \mathcal{H}_K(G)/\mathfrak{m}$:simple $\mathcal{H}_K(G)$-module に対して

$$\exists E\text{:simple smooth } G\text{-module s.t. } E^K \xrightarrow{\sim} V\text{:as } \mathcal{H}_K(G)\text{-module}$$

とおくと，$h_0 \neq 0$ on E，よって $h \neq 0$ on E，よって $S \neq 0$ on E，よって $T \neq 0$ on E. ■

A を $\mathbb{C}$-代数（可換とも 1 をもつとも限らない）とする．任意の r 個の元 $a_i \in A$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ に対して

$$[a_1, a_2, \cdots, a_r] = \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(r)} = 0$$

（S_r は r 次対称群，$\mathrm{sign}(\sigma)$ は $\sigma \in S_r$ の符号）となるとき，A は r-**可換** であるという．明らかに

1) A が r-可換ならば，任意の $s > r$ に対して A は s-可換である，
2) $\dim_{\mathbb{C}} A = n < \infty$ ならば，任意の $r > n$ に対して A は r-可換である．

$\mathbb{C}$-代数 $M_n(\mathbb{C})$ が r-可換となる最小の r を $r(n)$ とすると

1) $n \leq r(n)$ である，

2) $r(n+1)-r(n)\geq 2$ である．

[**証明**] 1) $E_{ij}\in M_n(\mathbb{C})$ は (i,j)-成分が 1 である以外は成分が全て 0 であるとすると

$$E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{il} & j=k \text{ のとき}\\ 0 & j\neq k \text{ のとき}\end{cases}$$

だから $[E_{1,2},E_{2,3},\cdots,N_{n-1,n}]=E_{1,n}$ となる．

2) $t=r(n)-1$ とおいて，$Y=[X_1,\cdots,X_t]\neq 0$ なる $X_i\in M_n(\mathbb{C})$ $(i=1,\cdots,t)$ をとり，Y の (k,l)-成分が 0 でないとする．

$$X_i'\begin{bmatrix}X_i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad Y'=\begin{bmatrix}Y & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in M_{n+1}(\mathbb{C})$$

とおき，$X_{t+1}'=E_{ln},X_{t+2}'=E_{n+1,n+1}\in M_{n+1}(\mathbb{C})$ とおくと

$$\begin{aligned}[X_1',\cdots,X_t',X_{t+1}',X_{t+2}'] &= [X_1',\cdots,X_t',X_{t+1}']\cdot X_{t+2}'\\ &= Y'X_{t+1}'X_{t+2}'\neq 0\end{aligned}$$

となる．■

命題 3.3.3 単純 C^∞-G-加群は全て許容 G-加群であるとする．このとき，開コンパクト部分群 $K\subset G$ と $0<n\in\mathbb{Z}$ に対して次は同値である；

1) 任意の単純な C^∞-G-加群 E に対して $\dim_{\mathbb{C}}E^K\leq n$,
2) $\mathcal{H}_K(G)$ は $r(n)$-可換.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) $\varphi=[\varphi_1,\cdots,\varphi_r]\neq 0$ $(r=r(n))$ なる $\varphi_i\in\mathcal{H}_K(G)$ があったとする．定理 3.3.2 より $\pi(\varphi)\neq 0$ なる G の既約 C^∞-表現 (π,E) がある．$\dim_{\mathbb{C}}E^K=s$ とすると，$X_i=\pi(\varphi_i)\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E^K)=M_s(\mathbb{C})$ かつ

$$[X_1,\cdots,X_r]=\pi(\varphi)\neq 0$$

だから $r(n)<r(s)$．一方 $s\leq n$ だから $r(s)\leq r(n)$ となり矛盾する．

2) $\Rightarrow$ 1) $\dim_{\mathbb{C}}E^K=s<\infty$ で，$\mathbb{C}$-代数の準同型写像 $\mathcal{H}_K\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E^K)$ $(\varphi\mapsto[v\mapsto\varphi\cdot v])$ の像を A とすると，E^K は単純 A-加群となり，$\mathrm{End}_A(E^K)$

は $\mathbb{C}$ 上の有限次元斜体となるから $\mathrm{End}_A(E^K) = \mathbb{C}$ である．よって定理 A.1.6 より $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E^K) = A$ となる．よって $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E^K) = M_s(\mathbb{C})$ は $r(n)$-可換となり，$r(s) \le r(n)$．よって $s \le n$ となる．■

3.4　反傾表現

C^∞-G-加群 E に対して，$E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$ は $\langle v, g\alpha \rangle = \langle g^{-1}v, \alpha \rangle$ ($g \in G, v \in E, \alpha \in E^*$) により G-加群となるから

$$\begin{aligned}
E^\vee &= \{\alpha \in E^* : C^\infty\text{-vector}\} = \bigcup_{K \subset G:\text{open compact subgroup}} (E^*)^K \\
&= \left\{ \alpha : E \to \mathbb{C} : \mathbb{C}\text{-linear map.} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K \subset G\text{:open compact subgroup} \\ \text{s.t. } \{v - k \cdot v \mid v \in E, k \in K\} \subset \mathrm{Ker}\,\alpha \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \alpha : E \to \mathbb{C} : \mathbb{C}\text{-linear map.} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K \subset G\text{:open compact subgroup} \\ \text{s.t. } E(K) = \mathrm{Ker}(\varepsilon_K) \subset \mathrm{Ker}\,\alpha \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \alpha : E \to \mathbb{C} : \mathbb{C}\text{-linear map.} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K \subset G\text{:open compact subgroup} \\ \text{s.t. } \alpha : E \underset{\varepsilon_K}{\longrightarrow} E^K \underset{\exists}{\to} \mathbb{C} \end{array} \right\} \\
&\subset E^* : C^\infty\text{-}G\text{-部分加群}
\end{aligned}$$

とおく．任意のコンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して

$$(*) : (E^K)^* \ni \beta \overset{\sim}{\mapsto} [v \mapsto \langle \varepsilon_K \cdot v, \beta \rangle] \in E^{\vee K} : \text{as } \mathbb{C}\text{-vector space}$$

であり，逆写像は

$$(*)^{-1} : E^{\vee K} \ni \alpha \overset{\sim}{\mapsto} \alpha|_{E^K} \in (E^K)^*$$

である．又，任意のコンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して，$v \in E^K$ ならば

$$\langle v, * \rangle \in (E^\vee)^* \text{ s.t. } \langle v, \alpha - k\alpha \rangle = \langle v - k^{-1}v, \alpha \rangle = 0 \text{ for } \forall \alpha \in E^\vee, k \in K$$

よって $\langle v, * \rangle \in E^{\vee\vee K}$ となる．更に

$$T : E \ni v \mapsto \langle v, * \rangle \in E^{\vee\vee} : \text{injective } G\text{-module hom.}$$

[**証明**] コンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して，$v \in E^K$ s.t. $\langle v, \alpha\rangle = 0$ for $\forall\alpha \in E^\vee$ とすると，任意の $\beta \in (E^K)^*$ に対して

$$0 = \langle v, \beta \circ \varepsilon_K\rangle = \langle \varepsilon_K v, \beta\rangle = \langle v, \beta\rangle$$

となるから，$v = 0$ を得る．又 $\forall g \in G, v \in E$ 及び $\forall\alpha \in \check{E}$ に対して

$$\langle \alpha, g \cdot Tv\rangle = \langle g^{-1} \cdot \alpha, Tv\rangle = \langle v, g^{-1} \cdot \alpha\rangle = \langle g \cdot v, \alpha\rangle = \langle \alpha, T(g \cdot v)\rangle$$

より $T(g \cdot v) = g \cdot Tv$ となる．■

特に $\langle\,,\rangle : E \times E^\vee \to \mathbb{C}$ は非退化双線形形式である．

命題 3.4.1 C^∞-G-加群 E の G-部分加群 $V \subset E$ に対して

$$V^\perp = \{\alpha \in E^\vee \mid \langle V, \alpha\rangle = 0\}$$

は $E^\vee$ の G-部分加群で

$$V = (V^\perp)^\perp = \{v \in E \mid \langle v, V^\perp\rangle = 0\}$$

となる．即ち

$$\langle\,,\rangle : V \times E^\vee/V^\perp \ni (v, \dot{v}') \mapsto \langle v, v'\rangle \in \mathbb{C},$$
$$\langle\,,\rangle : E/V \times V^\perp \ni (\dot{v}, v') \mapsto \langle v, v'\rangle \in \mathbb{C}$$

は共に非退化双線形形式となる．特に $E^\vee$ が単純 G-加群ならば E も単純 G-加群となる．

[**証明**] $V^\perp$ が $E^\vee$ の G-部分加群となることと $V \subset (V^\perp)^\perp$ は明らか．$v \in E \notin V$ とする．$v \in E^K$ なる開コンパクト部分群 $K \subset G$ をとると，$\alpha(v) \neq 0, \alpha(V) = 0$ なる $\alpha \in (E^K)^*$ があって $v' = \alpha \circ \varepsilon_K \in (E^\vee)^K \subset E^\vee$ である．このとき

$$\langle v, v'\rangle = \alpha(\varepsilon_K v) = \alpha(v) \neq 0,$$
$$\langle V, v'\rangle = \alpha(\varepsilon_K V) = \alpha(V_K) = 0$$

となり，$v \notin (V^\perp)^\perp$．■

命題 3.4.2 許容 G-加群 E に対して

1) $E^\vee$ は許容 G-加群である，
2) $v \mapsto \langle v, * \rangle$ は G-加群の同型 $E \xrightarrow{\sim} E^{\vee\vee}$ を与える，
3) E は単純 G-加群 $\Leftrightarrow$ $E^\vee$ は単純 G-加群.

[**証明**] 任意の開コンパクト部分群 $K \subset G$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}}(E^\vee)^K = \dim_{\mathbb{C}}(E^K)^* = \dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$$

だから，$E^\vee$ は許容 G-加群である．又

$$\dim_{\mathbb{C}}(E^{\vee\vee})^K = \dim_{\mathbb{C}}(E^\vee)^K = \dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$$

より，$v \mapsto \langle v, * \rangle$ は複素線形同型 $E^K \xrightarrow{\sim} (E^{\vee\vee})^K$ を与える．よって $T : E \xrightarrow{\sim} E^{\vee\vee}$ は G-加群の同型写像である．又，E が単純 G-加群ならば $E^{\vee\vee}$ は単純 G-加群，従って命題 3.4.1 より $E^\vee$ は単純 G-加群となる．逆は命題 3.4.1 による．
■

命題 3.4.3 単純許容 G-加群 E と C^∞-G-加群 E' に対して

$$\langle v, g \cdot v' \rangle = \langle g^{-1} \cdot v, v' \rangle \qquad (\forall g \in G, v \in E, v' \in E')$$

なる非退化複素双線形形式 $\langle\, , \rangle E \times E' \to \mathbb{C}$ があるならば，$v' \mapsto \langle *, v' \rangle$ は G-加群の同型 $E' \xrightarrow{\sim} E^\vee$ を与える．特に E' は単純許容 G-加群となる．

[**証明**] $v' \in E'$ に対して

$$\alpha_{v'} = \langle *, v' \rangle \in E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$$

で，$g \cdot \alpha_{v'} = \alpha_{g \cdot v'}$ $(g \in G)$ である．$k \cdot v' = v'$ for $\forall k \in K$ なる開コンパクト部分群 $K \subset G$ がとれるから，任意の $k \in K$ に対して $k \cdot \alpha_{v'} = \alpha_{v'}$ となり，$\alpha_{v'} \in E^\vee$ である．よって $v' \mapsto \alpha_{v'}$ は G-加群の準同型写像 $E' \to E^\vee$ を与え，これは単射である（双線形形式が非退化だから）．命題 3.4.2 より E' は単純 G-加群だから，上の写像は全射である．■

命題 3.4.4 許容 G-加群 E, E' と

$$\langle v, g\cdot v'\rangle = \langle g^{-1}\cdot v, v'\rangle \qquad (\forall g \in G, v \in E, v' \in E')$$

なる非退化複素双線形形式 $\langle\,,\rangle : E \times E' \to \mathbb{C}$ に対して，$v' \mapsto \langle *, v'\rangle$ は G-加群の同型 $E' \xrightarrow{\sim} E^\vee$ を与える．

[**証明**] 命題 3.4.3 と同様に $v' \mapsto \langle *, v'\rangle$ は G-加群の単射準同型写像 $E' \to E^\vee$ を与える．任意の $\alpha \in E^\vee$ に対して $\alpha \in (E^\vee)^K$ なる開コンパクト部分群 $K \subset G$ がとれて，$\alpha(v) = \langle \varepsilon_K v, \beta\rangle$ $(\forall v \in E)$ なる $\beta \in (E^K)^*$ がとれる．ここで

$$E^K \times E'^K \ni (v, v') \mapsto \langle v, v'\rangle \in \mathbb{C}$$

は非退化である．実際，$0 \neq v' \in E'^K$ に対して $\langle v, v'\rangle \neq 0$ なる $v \in E$ があって，$\varepsilon_K v \in E^K$ かつ

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_K v, v'\rangle &= \int_K \langle k\cdot v, v'\rangle d_G(k)\\ &= \int_K \langle v, k^{-1}\cdot v'\rangle d_G(k) = \langle v, v'\rangle \int_K d_G(k)\end{aligned}$$

より $\langle \varepsilon_K v, v'\rangle \neq 0$ となる．よって $\dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$ より $\beta = \langle *, v'\rangle$ なる $v' \in E'^K$ がとれて $\alpha(v) = \langle \varepsilon_K v, v'\rangle = \langle v, v\rangle$ for $\forall v \in E$ となる．■

C^∞-G-加群の準同型写像

$$f : V \to E$$

に対して，$\alpha \in E^\vee$ とすると $\{u - k\cdot u \mid u \in E, k \in K\} \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$ なる開コンパクト部分群 $K \subset G$ があって $\{v - k\cdot v \mid v \in V, k \in K\} \subset \mathrm{Ker}(\alpha \circ f)$ となるから

$$f^\vee : E^\vee \ni \alpha \mapsto \alpha \circ f \in V^\vee$$

は G-加群の準同型写像となる．

命題 3.4.5 許容 G-加群の完全列

$$0 \to V \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} W \to 0 : \text{exact}$$

に対して

$$0 \to W^\vee \xrightarrow{j^\vee} E^\vee \xrightarrow{i^\vee} V^\vee \to 0 : \text{exact}.$$

[**証明**] $V \subset E, W = E/V$ とする．命題 3.4.1 と命題 3.4.3 より G-加群の同型

$$E^\vee/V^\perp \tilde{\to} V^\vee \text{ by } \dot{\alpha} \mapsto \alpha|_V,$$
$$V^\perp \tilde{\to} (E/V)^\vee \text{ by } \alpha \mapsto \beta = [\dot{u} \mapsto \langle u, \alpha\rangle]$$

を得る．第二の同型は $\alpha = [u \mapsto \langle \dot{u}, \alpha\rangle]$ を意味していることに注意する．さて完全列

$$0 \to V^\perp \to E^\vee \to E^\vee/V^\perp \to 0$$

から完全列

$$0 \to (E/V)^\vee \xrightarrow{i'} E^\vee \xrightarrow{j'} V^\vee \to 0$$

を得るが，ここで

$$i' : \beta \mapsto [u \mapsto \langle \dot{u}, \beta\rangle] = \beta \circ j, \qquad j' : \alpha \mapsto \alpha|_V = \alpha \circ i$$

となる．■

3.5 C^∞-G-加群の $\otimes$ と Hom

C^∞-G-加群 E, F をとる．複素ベクトル空間 $E \otimes_{\mathbb{C}} F$ は

$$(g,h)(u \otimes v) = (gu) \otimes (hv) \text{ for } (g,h) \in G \times G, u \in E, v \in F$$

により C^∞-$G \times G$-加群となる．一方，複素ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)$ は

$$(g,h)A = [u \mapsto gA(h^{-1}v)] \text{ for } (g,h) \in G \times G, A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)$$

により $G \times G$-加群となる．コンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)^{K\times K}\\
=&\left\{ A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F) \;\middle|\; \begin{array}{l} kA(lv) = A(v) \\ \text{for } \forall k, l \in K, v \in E \end{array} \right\}\\
=&\left\{ A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Im}(A) \subset F^K, \\ \mathrm{Ker}(\varepsilon_K) = E(K) \subset \mathrm{Ker}(A) \end{array} \right\}\\
=&\{A \circ \varepsilon_K \mid A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^K, F^K)\}
\end{aligned}$$

より $\mathbb{C}$-線形同型

$$(*) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^K, F^K) \ni A \tilde{\mapsto} A \circ \varepsilon_K \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)^{K\times K}$$

を得る．逆写像は

$$(*)^{-1} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, F)^{K\times K} \ni A \tilde{\mapsto} A|_{E^K} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^K, F^K)$$

である．そこでこれらの複素線形同型により $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)^{K\times K} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^K, F^K)$ と同一視して

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)_\infty =& \{A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F) : C^\infty\text{-ベクトル}\} \\ =& \bigcup_{K\subset G:\text{コンパクト開部分群}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^K, F^K) \\ =& \left\{ A\circ\varepsilon_K \;\middle|\; \begin{array}{l} K\subset G : \text{コンパクト開部分群} \\ A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^K, F^K) \end{array} \right\}\end{aligned}$$

とおく．$\alpha \in E^\vee$ ならば $E(K) = \mathrm{Ker}(\varepsilon_K) \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ があるから，$G\times G$-加群の単射準同型写像

$$F \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)_\infty \quad (v\otimes\alpha \mapsto [u \mapsto \langle u, \alpha\rangle v])$$

を得る．実際，これが $G\times G$-加群の準同型写像であることは明らか．F の $\mathbb{C}$-基底 $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとって $z = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \otimes v_\lambda \in \mathrm{Ker}$ とすると，任意の $u \in E$ に対して $\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda(u) v_\lambda = 0$ より $\alpha_\lambda(u) = 0$ $(\lambda\in\Lambda)$，よって $\alpha_\lambda = 0$ $(\lambda\in\Lambda)$ より $z = 0$ となる．

命題 3.5.1 E, F が許容 G-加群ならば

1) 任意の開コンパクト部分群 $K \subset G$ に対して $(E\otimes_{\mathbb{C}} F)^{K\times K} = E^K \otimes_{\mathbb{C}} F^K$,
2) $G\times G$-加群の同型

$$F\otimes_{\mathbb{C}} E^\vee \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)_\infty \qquad (v\otimes\alpha \mapsto [u\mapsto \langle u,\alpha\rangle v]$$

が成り立つ．

[**証明**] $E^\vee$ も許容 G-加群で（命題 3.4.2），$(E^\vee)^K \otimes_{\mathbb{C}} F^K \subset (E^\vee \otimes_{\mathbb{C}} F)^{K\times K}$ は明らか．一方 $v \otimes \alpha \mapsto [u \mapsto \alpha(u) \cdot v]$ なる

$$(F \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee)^{K\times K} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)^{K\times K} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E^K, F^K)$$

は単射．よって次元を比較して $F^K \otimes_{\mathbb{C}} (E^\vee)^K = (F \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee)^{K\times K}$ かつ，上の写像は複素線形同型

$$(F \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee)^{K\times K} \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)^{K\times K}$$

を与える．よって自然な写像 $F \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)_\infty$ は全射である．■

命題 3.5.2 $\mathbb{C}$ を自明な G-module とみて

$$\mathrm{Hom}_G(E \otimes_{\mathbb{C}} F, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha : E \otimes_{\mathbb{C}} F \to \mathbb{C} : \mathbb{C}\text{-linear} \\ \quad \text{s.t. } \alpha(g \cdot \xi) = \alpha(\xi) \text{ for } \forall g \in G, \xi \in E \otimes_{\mathbb{C}} F \end{array} \right\}$$

である．このとき次の $\mathbb{C}$-線形同型が成り立つ；

$$\mathrm{Hom}_G(E, F^\vee) \ni A \tilde{\mapsto} [u \otimes v \mapsto \langle Au, v\rangle] \in \mathrm{Hom}_G(E \otimes_{\mathbb{C}} F, \mathbb{C}).$$

[**証明**] $A \in \mathrm{Hom}_G(E, F^\vee)$ と $g \in G, u \in E, v \in F$ に対して

$$\langle A(g \cdot u), g \cdot v\rangle = \langle g \cdot A(u), g \cdot v\rangle = \langle Au, v\rangle$$

より，$A \mapsto [u \otimes v \mapsto \langle Au, v\rangle]$ が injective $\mathbb{C}$-linear であることはよい．$\alpha \in \mathrm{Hom}_G(E, F^\vee)$ とする．$u \in E$ に対して

$$\alpha_u : F \ni v \mapsto \alpha(u \otimes v) \in \mathbb{C}$$

とおく．任意の $k \in K$ に対して $k \cdot u = u$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ があるから，任意の $k \in K$ に対して

$$\alpha_u(k \cdot v) = \alpha(u \otimes (k \cdot v)) = \alpha((k^{-1} \cdot u) \otimes v) = \alpha(u \otimes v) = \alpha_u(v),$$

又，任意の $g \in G$ に対して

$$\alpha_{g\cdot u}(v) = \alpha((g \cdot u) \otimes v) = \alpha(u \otimes (g^{-1} \cdot v) = \alpha_u(g^{-1} \cdot v) = (g \cdot \alpha_u)(v).$$

よって $A = [u \mapsto \alpha_u] \in \mathrm{Hom}_G(E, F^\vee)$ で，任意の $u \in E, v \in F$ に対して

$$\langle Au, v\rangle = \langle \alpha_u, v\rangle = \alpha(u \otimes v).$$

■

系 3.5.3 複素線形同型

$$\mathrm{Hom}_G(E, F^\vee) \ni A \stackrel{\sim}{\mapsto} A^* \in \mathrm{Hom}_G(F, E^\vee)$$

で，任意の $u \in E, v \in F$ に対して $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle$ なるものが定まる．

[**証明**] 命題 3.5.2 より複素線形同型

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(E, F^\vee) &\stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_G(E \otimes_{\mathbb{C}} F, \mathbb{C})\\ &\stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_G(F \otimes_{\mathbb{C}} E, \mathbb{C}) \stackrel{\sim}{\leftarrow} \mathrm{Hom}_G(F, E^\vee)\end{aligned}$$

$$A \mapsto [u \otimes v \mapsto \langle Au, v\rangle] \mapsto [v \otimes u \mapsto \langle Au, v\rangle] = [v \otimes u \mapsto \langle Bv, u\rangle] \leftarrow\!\shortmid B.$$

が成り立つ．■

3.6 誘導表現

以下，閉部分群 $H \subset G$ と C^∞-H-加群 E を固定しておく．

複素ベクトル空間 $C^\infty(G; E)$ は $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$ $(g \in G, f \in C^\infty(G; E))$ により G-加群となり

$$C^\infty(G; E)_\infty = \left\{ f : G \to E \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K \subset G : \text{コンパクト開部分群} \\ \text{s.t. } f(kx) = f(x) \text{ for } \forall k \in K, x \in G \end{array} \right\}$$

である．そこで

$$\begin{aligned}L(G, E) = L(E) = &\left\{ f \in C^\infty(G; E)_\infty \mid f(xh) = h^{-1} \cdot f(x) \text{ for } \forall h \in H \right\}\\ &\subset C^\infty(G; E)_\infty : C^\infty\text{-}G\text{-部分加群}\end{aligned}$$

とおいて，$L(E) = \mathrm{Ind}(G,H;E) = \mathrm{Ind}_H^G E$ などと表す．$f \in L(E)$ に対して

$$\mathrm{supp}(f \mod H) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\dot{x} \in G/H \mid f(x) \neq 0\} \subset G/H : \text{開かつ閉集合}.$$

[証明] E 上の離散位相に関して $f : G \to E$ は連続関数だから

$$\{x \in G \mid f(x) \neq 0\} \subset G : \text{開集合} \quad \therefore \mathrm{supp}(f \mod H) \subset G/H : \text{開集合}.$$

一方，$f(kx) = f(x)$ for $\forall k \in K$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ をとると

$$\begin{aligned}
&\dot{g} \in G/H \notin \mathrm{supp}(f \mod H) \quad \therefore f(g) = 0 \\
\Rightarrow &f(x) = 0 \text{ for } \forall x \in Kg \subset G \\
\Rightarrow &\dot{g} \in \exists V \subset G/H\text{: open s.t. } f(x) = 0 \text{ for } \forall \dot{x} \in V
\end{aligned}$$

よって $V \cap \mathrm{supp}(f \mod H) = \emptyset$ となる．■

そこで

$$\begin{aligned}
S(G,E) = S(E) &= \{f \in L(G,E) \mid \mathrm{supp}(f \mod H) \subset G/H : \text{compact}\} \\
&\subset L(G,E) : G\text{-部分加群}
\end{aligned}$$

とおいて，$S(E) = \mathrm{ind}(G,H;E) = \mathrm{ind}_H^G E$ などと表す．

命題 3.6.1 開コンパクト部分群 $K \subset G$ に対して $G = \bigsqcup_{g \in \Omega} KgH$ $(\Omega \subset G)$ として，H の開コンパクト部分群を $K_g = H \cap g^{-1}Kg$ とおくと

$$L(G,E)^K \ni f \mapsto (f(g))_{g \in \Omega} \in \prod_{g \in \Omega} E^{K_g}$$

は複素線形同型写像となり，逆写像は

$$\prod_{g \in \Omega} E^{K_g} \ni v = (v_g)_{g \in \Omega} \mapsto f_v = [ngh \mapsto h^{-1} \cdot v_g] \in L(G,E)^K$$

である．ここで $\mathrm{supp}(f) = \bigsqcup_{g \in \Omega, v_g \neq 0} KgH$ である．特に複素線形同型

$$S(G,E)^K \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{g \in \Omega} E^{K_g} \qquad (f \mapsto (f(g))_{g \in \Omega})$$

が成り立つ．

[**証明**] $L(G,E)^K$ は

1) 任意の $h \in H$ に対して $f(xh) = h^{-1} \cdot f(x)$,
2) 任意の $k \in K$ に対して $f(kx) = f(x)$

なる写像 $f : G \to E$ の全体である．よって $f \in L(G,E)^K$ ならば，任意の $g \in G$, $k = g^{-1}lg \in K_g$ $(l \in K)$ に対して

$$k \cdot f(g) = f(gh^{-1}) = f(l^{-1}g) = f(g)$$

だから $f(g) \in E^{K_g}$ となるから上の通り．■

系 3.6.2 C^∞-H-加群 $E \neq 0$ に対して $S(G,E) \neq 0$ である．

[**証明**] $0 \neq v \in E$ として，$v \in E^N$ なるコンパクト開部分群 $N \subset H$ をとると，$K \cap H \subset N$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ がとれるから，命題 3.6.1 で $v = (v_g)_{g\in\Omega} \in \prod_{g\in\Omega} E^{K_g}$ を

$$v_g = \begin{cases} v & : KgH = KH, \\ 0 & : KgH \neq K \end{cases}$$

により定義すると $0 \neq f_v \in \mathrm{ind}_H^G(E)$ となる．■

系 3.6.3 G/H がコンパクトで E が許容 H-加群ならば，$L(G,E)$ は許容 G-加群となる．

[**証明**] 開コンパクト部分群 $K \subset G$ に対して $K\backslash G/H$ は有限集合となるから，命題 3.6.1 より上の通り．■

誘導表現の**連鎖律** が成り立つ；

命題 3.6.4 閉部分群 $Q \subset H \subset G$ と C^∞-Q-加群 V をとる．$\varphi \in L(G,V)$ と $g \in G$ に対して $\varphi_g = [h \mapsto \varphi(gh)] \in L(H,V)$ で

$$L(G,V) \ni \varphi \mapsto [g \mapsto \varphi_g] \in L(G, L(H,V))$$

は G-加群の同型写像である．逆写像は

$$L(G, L(H, V)) \ni f \mapsto [g \mapsto f(g)(1)] \in L(G, V).$$

[証明] $\varphi \in L(G, V)$ に対して，開コンパクト部分群 $K \subset G$ があって任意の $k \in K$ に対して $\varphi(kx) = \varphi(x)$ $(x \in G)$ となる．$\varphi_x(h) = \varphi(xh)$ $(h \in H)$ だから，任意の $k \in H \cap x^{-1}Kx$ に対して $\varphi_x(kh) = \varphi_x(h)$ $(h \in H)$，又任意の $q \in Q$ に対して $\varphi_x(hq) = q^{-1} \cdot \varphi_x(h)$ となる．よって $\varphi_x \in L(H, V)$．そこで

$$\varphi' : G \ni x \mapsto \varphi_x \in L(H, V)$$

とおくと，任意の $k \in K$ に対して $\varphi'(kx) = \varphi_{kx} = \varphi_x$ であり，任意の $h \in H$ に対して

$$\varphi'(xh) = \varphi_{xh} = h^{-1} \cdot \varphi_x = h^{-1} \cdot \varphi'(x)$$

となるから $\varphi' \in L(G, L(H, V))$ となる．このとき任意の $g \in G$ に対して

$$(g \cdot \varphi)'(x) = \varphi_{g^{-1}x} = (g^{-1} \cdot \varphi')(x)$$

となる．一方，$f \in L(G, L(H, V))$ に対して，開コンパクト群 $K \subset G$ があって任意の $k \in K$ に対して $f(kx) = f(x)$ $(x \in G)$ となる．

$$\widetilde{f} : G \ni x \mapsto f(x)(1) \in V$$

とおくと，任意の $k \in K$ に対して $\widetilde{f}(kx) = f(kx)(1) = f(x)(1) = \widetilde{f}(x)$．任意の $q \in Q$ に対して

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(xq) &= f(xq)(1) = (q^{-1} \cdot f(x))(1) \\ &= f(x)(q) = q^{-1} \cdot (f(x)(1)) = q^{-1} \cdot \widetilde{f}(x).\end{aligned}$$

よって $\widetilde{f} \in L(G, V)$．このとき任意の $g \in G$ に対して

$$\widetilde{g \cdot f}(x) = (g \cdot f)(x)(1) = f(g^{-1}x)(1) = \widetilde{f}(g^{-1}x)$$

となる．更に

$$\widetilde{\varphi'}(x) = \varphi'(x)(1) = \varphi_x(1) = \varphi(x)$$

$\widetilde{f}'(x) = \widetilde{f}_x = [h \mapsto \widetilde{f}(xh) = f(xh)(1) = (h^{-1} \cdot f(x))(1) = f(x)(h)] = f(x).$

■

さて $X = G/H$ は完全非連結な局所コンパクト Hausdorff 空間で，G が自然に左から連続かつ推移的に作用している．このとき $(\varphi \cdot f)(x) = \varphi(\dot{x}) \cdot f(x)$ $(\varphi \in \mathcal{S}(X), f \in L(E), \dot{x} = xH \in X)$ により $L(E)$ は $\mathcal{S}(X)$-加群となる．

[**証明**] コンパクト開集合 $M \subset X$ に対して $\varphi = \chi_M \in \mathcal{S}(X)$ を考えれば十分で，$\forall x \in M$ に対して，開集合 $1 \subset V_x \subset G$ と開集合 $x \in W_x \subset X$ があって $V_x \cdot W_x \subset M$ とできる．M はコンパクトだから

$$M \subset W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_r}, \qquad V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_r}$$

とおく．$f \in L(E) \subset C^\infty(G, E)_\infty$ に対して，開コンパクト部分群 $K \subset V$ があって，$f(kx) = f(x)$ for $\forall k \in K, x \in G$ となり，$K \cdot M \subset M$ となるから，$(\varphi \cdot f)(kx) = (\varphi \cdot f)(x)$ for $\forall k \in K$ となり，$\varphi \cdot f \in C^\infty(G, E)_\infty$ である．■

更に $\mathcal{S}(X) \cdot S(E) = S(E)$ となる．

[**証明**] $f \in S(E)$ として $f(kx) = f(x)$ for $\forall k \in K$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ をとる．$G = \bigsqcup_\lambda K g_\lambda H$ とおけば

$$f(kg_\lambda h) = h^{-1} \cdot f(g_\lambda) \text{ for } k \in K,\, h \in H$$

より $\mathrm{supp}(f \mod H) = \{\dot{x} \in G/H \mid f(x) \neq 0\} = \bigsqcup_{i=1}^{r} K g_i$ とおける．ここで $K \cdot \dot{g}_i \subset X$ はコンパクト開集合だから $\varphi = \sum_{i=1}^{r} \chi_{K \cdot \dot{g}_i} \in S(X)$ で，任意の $x \in G$ に対して $(\varphi \cdot f)(x) = \varphi(\dot{x}) f(x) = f(x)$ となる．■

ここで $\dot{g} = gH \in X$ に対して

$$\begin{aligned} S(E; \dot{g}) &= \{f \in S(E) \mid \varphi \cdot f = 0 \text{ for some } \varphi \in S(X) \text{ s.t. } \varphi(\dot{g}) \neq 0\} \\ &= \{f \in S(E) \mid f(g) = 0\} \end{aligned}$$

[**証明**] $f \in S(E)$ に対して $f(kx) = f(x)$ for $\forall k \in K$ なるコンパクト開部分

群 $K \subset G$ をとれば

$$\begin{aligned} f(g) = 0 &\Rrightarrow f(KgH) = 0, \quad K \cdot \dot{g} \subset X : \text{コンパクト開集合} \\ &\Rightarrow \chi_{K \cdot \dot{g}} \in S(X) \text{ s.t. } \chi_{K \cdot \dot{g}}(\dot{g}) \neq 0,\ \chi_{K \cdot \dot{g}} \cdot f = 0. \end{aligned}$$

■

よって

$$S(E)/S(E;\dot{g}) \ni \dot{f} \mapsto f(g) \in E : \mathbb{C}\text{-linear isom. for } \forall g \in G.$$

そこで $S(E)$ により生成された X 上の l-sheaf を $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G, E) = \mathcal{L}(E)$ と書く．即ち

$$\mathcal{L}(V) = \left\{ (\dot{f}_x)_{x \in V} \in \prod_{x \in V} S(E)/S(E;x) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in V \text{ に対して} \\ x \in \exists W \subset V\text{:open}, \exists f \in S(E) \\ \text{s.t. } f_{\dot{y}}(y) = f(y) \text{ for } \forall \dot{y} \in W \end{array} \right\},$$

$$\mathrm{res}_V^W ; \mathcal{L}(W) \ni (\dot{f}_x)_{x \in W} \mapsto (f_x)_{x \in V} \in \mathcal{L}(V) \text{ for } V \subset W \subset X\text{: open}$$

とおく．$g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} i_g &: X \ni xH \mapsto gxH \in X : \text{home.}, \\ \theta_g &: S(E) \ni \mapsto g^{-1} \cdot f \in S(E) : \mathbb{C}\text{-linear isom.} \end{aligned}$$

とおくと，$\theta_g(\varphi \cdot f) = (\varphi \circ i_g) \cdot \theta_g(f)$ $(\varphi \in \mathcal{S}(X), f \in S(E))$ となる．実際,

$$\begin{aligned} (\theta_g(\varphi \cdot f))(x) &= (\varphi \cdot f)(gx) = \varphi(gxH) f(gx) \\ &= (\varphi \circ i_g)(\dot{x}) \cdot (\theta_g f)(x). \end{aligned}$$

更に

$$G \ni g \mapsto (i_g, \theta_g) \in \mathrm{Aut}(X, S(E)) : \text{group hom.}$$

となる．よって命題 1.4.3 により付随する群準同型写像を

$$G \ni g \mapsto (i_g, \theta^\sharp_{g,V}) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L})$$

とおく．即ち

$$\theta^\sharp_{g,V} : \mathcal{L}(V) \tilde{\to} \mathcal{L}(i_g^{-1}(V) = g^{-1} \cdot V) \text{ for } g \in G,\ V \subset X\text{: open}$$

$$\begin{aligned}\theta^\sharp_{g,V}((\overline{f}_x \in S(E)/S(E;x))_{x\in V}) &= (\overline{\theta_g(f_{i_g y})} \in S(E)/S(E;y))_{y\in g^{-1}V} \\ &= (\overline{g^{-1}\cdot f_{g\cdot y}} \in S(E)/S(E;y))_{y\in g^{-1}\cdot V}\end{aligned}$$

とおく．よって $g \in G$, $x \in X$ に対して

$$\theta^\sharp_{g,x} : \mathcal{L}_{i_g x} = S(E)/S(E; g\cdot x) \ni \overline{f} \tilde{\mapsto} \overline{g^{-1}\cdot f} \in S(E)/S(E;x)$$

となり，$G_x = \{g \in G \mid g\cdot x = x\}$ に対して

$\mathcal{L}_x = S(E)/S(E;x) : G_x$-加群 by $g\cdot\overline{f} = \theta^\sharp_{g^{-1},x}\overline{f} = \overline{g\cdot f}$ $(g \in G_x, f \in S(E)$

である（29 頁）．特に $o = \dot{1} \in X = G/H$ に対して

$$G_o = \{g \in G \mid g\cdot o = o\} = H$$

で

$$\mathcal{L}_o = S(E)/S(E;o) \ni \dot{f} \tilde{\mapsto} f(1) \in E : H\text{-加群の同型}$$

となる（実際，$h \in H = G_o, f \in S(E)$ に対して $(h\cdot f)(1) = f(h^{-1}) = h\cdot f(1)$）．
又 $g\cdot s = \theta^\sharp_{g^{-1},X}(s)$ $(g \in G, s \in \mathcal{L}(X))$ により $\mathcal{L}(X)$ は G-加群となり（28 頁）

$$S(G,E) \ni f \tilde{\mapsto} (\dot{f})_{\dot{x}\in X} \in \mathcal{L}_c(X) \text{ by} : G\text{-加群の同型}$$

となる．

定理 3.6.5

$$\mathcal{L}(X)_\infty \ni (\dot{f}_x)_{x\in X} \tilde{\mapsto} [x \mapsto f_{\dot{x}}(x)] \in L(G,E) : G\text{-加群の同型.}$$

[**証明**]

$$s = \left(\dot{f}_x \in S(E)/S(E;x)\right)_{x\in X} \in \mathcal{L}(X)_\infty \quad f : G \ni x \mapsto f_{\dot{x}}(x) \in E$$

に対して，$k \cdot s = s$ for $\forall k \in K$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ をとると，任意の $k \in K, x \in G$ に対して

$$k \cdot f_{k^{-1} \cdot \dot{x}} \equiv f_{\dot{x}} \pmod{S(E;\dot{x})} \qquad \therefore\ f_{\dot{x}}(x) = (k \cdot f_{k^{-1} \cdot \dot{x}}(x) = f_{k^{-1} \cdot \dot{x}}(k^{-1}x)$$

よって $f(kx) = f(x)$ となる．又，任意の $x \in G, h \in H$ に対して，開集合 $\dot{x} \in \exists W \subset X$ と $g \in S(E)$ があって

$$f_y \equiv g \pmod{S(E;y)} \text{ for } \forall y \in W$$

とできるから，自然写像 $j : G \to G/H = X$ に対して

$$f(y) = f_{\dot{y}}(y) = g(y) \text{ for } \forall y \in j^{-1}(W)$$

となり，$xh \in j^{-1}(W)$ より

$$f(xh) = g(xh) = h^{-1} \cdot g(x) = h^{-1} \cdot f(x)$$

を得るから，$f \in L(G, E)$ となる．更に

$$\Lambda : \mathcal{L}(X) \ni \left(\dot{f}_x \in S(E)/S(E;x)\right)_{x \in X} \mapsto [x \mapsto f_{\dot{x}}(x)] \in L(G, E)$$

は G-加群の単射準同型写像となる．実際，$g \in G$ に対して

$$g \cdot s = \left(\overline{g \cdot f_{g^{-1} \cdot x}}\right)_{x \in X} \mapsto \left[x \mapsto (g \cdot f_{g^{-1} \cdot \dot{x}}(x) = f_{g^{-1} \dot{x}}(g^{-1}x) = f(g^{-1}x)\right]$$

より G-加群の準同型写像であり，単射性は明らか．ここで $g \in G$ に対して

$$\theta_g \cdot S(E;\dot{g}) = \theta_g \cdot S(E; i_g o) = S(E;o) \qquad (o = \dot{1} \in X = G/H)$$

に注意して

$$\overline{\theta}_{g^{-1}} : S(E)/S(E;o) \ni \overline{\varphi} \mapsto \overline{\theta_{g^{-1}} \varphi} \in S(E)/S(E;\dot{g})$$

とおく．$\forall f \in L(G, V)$ をとる．任意の $g \in G$ に対して，$\varphi_g(1) = f(g)$ なる $\dot{\varphi}_g \in S(E)/S(E;o)$ が唯一定まるから

$$\dot{f}_g = \overline{\theta}_{g^{-1}} \dot{\varphi}_g \in S(E)/S(E;\dot{g})$$

とおくと

$$f_g(g) = (g \cdot \varphi_g)(g) = \varphi_g(1) = f(g)$$

である．又，$h \in H$ に対して

$$\varphi_{gh}(1) = f(gh) = h^{-1} \cdot f(g) = h^{-1} \cdot \varphi_g(1) = \varphi_g(h) = (h^{-1} \cdot \varphi_g)(1)$$

より $\dot{\varphi}_{gh} = \overline{\theta}_h \dot{\varphi}_g \in S(E)/S(E;o)$ となるから

$$\dot{f}_{gh} = \overline{\theta}_{(gh)^{-1}} \dot{\varphi}_{gh} = \overline{\theta}_g^{-1} \circ \overline{\theta}_{h^{-1}} \dot{\varphi}_{gh} = \overline{\theta}_{g^{-1}} \dot{\varphi}_g = \dot{f}_g \in S(E)/S(E;\dot{g}).$$

よって $\dot{f}_g \in S(E)/S(E;\dot{g})$ は $\dot{g} \in X$ のみに依存する．又 $f(kx) = f(x)$ for $\forall k \in K$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ がとれて，任意の $\dot{g} \in X$ に対して $\dot{g} \in K \cdot \dot{g} \subset X$ は開集合で

$$f' \in S(E)\,\text{s.t.}\, f'(x) = \begin{cases} f(x) & : x \in KgH \\ 0 & : x \notin KgH \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \dot{x} \in K \cdot \dot{g} \subset X \ &\Rightarrow f_{\dot{x}}(x) = f(x) = f'(x) \\ &\Rightarrow f_{\dot{x}} \equiv f' \pmod{S(E;\dot{x})} \end{aligned}$$

よって $s = \left(\dot{f}_g \in S(E)/S(E;\dot{g})\right)_{\dot{g} \in X} \in \mathcal{L}(X)$．ここで $\forall k \in K, g \in G$ に対して

$$\varphi_{k^{-1}g}(1) = f(k^{-1}g) = f(g) = \varphi_g(1)$$

より $\dot{\varphi}_{k^{-1}g} = \dot{\varphi}_g \in S(E)/S(E;o)$，よって

$$k \cdot f_{k^{-1}g} \equiv \theta_{k^{-1}} \circ \theta_{(k^{-1}g)^{-1}} \varphi_{k^{-1}g} \equiv \theta_{g^{-1}} \varphi_g \equiv f_g \pmod{S(E;\dot{g})}$$

より $k \cdot s = s$ となる．よって $s \in \mathcal{L}(X)_\infty$ で $\Lambda(s) = f$ となる．■

3.7　反傾表現と誘導表現

前節に引き続き閉部分群 $H \subset G$ を一つ固定して $X = G/H$ とおく．G, H のモジュラー関数を Δ_G, Δ_H として

$$\begin{aligned} &C_c(G,H) \\ &= \left\{ \varphi : G \to \mathbb{C} : \text{conti.} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \varphi(xh) = \Delta_H(h)\Delta_G(h)^{-1}\varphi(x) \text{ for } \forall h \in H \\ 2)\ \mathrm{supp}(\varphi \mod H) \subset X\text{: compact} \end{array} \right\} \\ &\mathbb{C}\text{-vector space} \end{aligned}$$

とおく．

補題 3.7.1 H に関する ρ-関数 $\rho : G \to \mathbb{R}_{>0}$ に付随する G/H 上の Radon 測度を μ_ρ とする；

$$\int_G \varphi(x)\rho(x) d_G(x) = \int_{G/H} \left(\int_H \varphi(xh) d_H(h) \right) d\mu_\rho(\dot{x}) \quad (\varphi \in C_c(G)).$$

このとき

1) $\rho(xh) = \rho(x)\rho(h)$, $\rho(h) = \Delta_H(h)\Delta_G(h)^{-1}$ for $\forall h \in H$ だから

$$I_{G,H} : C_c(G,H) \ni \varphi \mapsto \int_{G/H} \varphi(x)\rho(x)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x}) \in \mathbb{C} : \mathbb{C}\text{-linear}$$

とおくと，これは ρ の選択によらない．

2) 任意の $g \in G, \varphi \in C_c(G,H)$ に対して $I_{G,H}(g \cdot \varphi) = I_{G,H}(\varphi)$.

[**証明**] 1) ρ-関数 ρ' をとり $\sigma(x) = \rho(x)/\rho'(x)$ $(x \in G)$ とおくと

$$\int_{G/H} \psi(\dot{x}) d\mu_\rho(\dot{x}) = \int_{G/H} \psi(\dot{x})\sigma(x) d\mu_{\rho'}(\dot{x}) \text{ for } \forall \psi \in C_c(G/H)$$

だから．

2) $J_\rho(g, \dot{x}) = \rho(gx)/\rho(x)$ $(g \in G, \dot{x} \in G/H)$ とおくと

$$d\mu_\rho(g \cdot \dot{x}) = J_\rho(g, \dot{x}) d\mu_\rho(\dot{x})$$

だから

$$
\begin{aligned}
I_{G,H}(g\cdot\varphi) &= \int_{G/H}(\varphi(g^{-1}x)\rho(x)^{-1}d\mu_\rho(\dot{x}) \\
&= \int_{G/H}\varphi(x)\rho(gx)^{-1}J_\rho(g,\dot{x})d\mu_\rho(\dot{x}) \\
&= \int_{G/H}\varphi(x)\rho(x)^{-1}d\mu_\rho(\dot{x}) = I_{G,H}(\varphi).
\end{aligned}
$$

■

連続群準同型写像 $\Delta : G \to \mathbb{C}^\times$ に対して，$\operatorname{Ker}\Delta \subset G$ は開部分群だから，

$$\mathbb{C} : C^\infty\text{-}G\text{-加群 by } g\cdot t = \Delta(g)t\ (g\in G, t\in\mathbb{C})$$

である．これを簡単に C^∞-G-加群 Δ と呼ぶことにする．よって C^∞-G-加群 M に対して，$\Delta\otimes_{\mathbb{C}} M = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}} M = M$ は

$$g\cdot(1\otimes u) = \Delta(g)\otimes(g\cdot u) = \Delta(g)\cdot(g\cdot u)$$

により G-加群である．そこで E を C^∞-H-加群として，$\varphi\in S(G,E)$ と $\psi\in L(G,\Delta_H^{-1}\Delta_G\otimes E^\vee)$ に対して

$$F_{\varphi,\psi} = [G\ni x\mapsto\langle\varphi(x),\psi(x)\rangle\in\mathbb{C}]\in C_c(G,H)$$

だから

$$\langle\varphi,\psi\rangle = I_{G,H}(F_{\varphi,\psi}) = \int_{G/H}\langle\varphi(x),\psi(x)\rangle\rho(x)^{-1}d\mu_\rho(\dot{x})\in\mathbb{C}$$

とおくと，任意の $g\in G$ に対して

$$\langle g\cdot\varphi, g\cdot\psi\rangle = I_{G,H}(g\cdot F_{\varphi,\psi}) = I_{G,H}(F_{\varphi,\psi}) = \langle f,g\rangle$$

となる．

定理 3.7.2 C^∞-H-module E に対して

$$L(G,\Delta_H^{-1}\Delta_G\otimes E^\vee)\ni\psi\mapsto\langle *,\psi\rangle\in S(G,E)^\vee : \text{as } G\text{-module.}$$

[証明] コンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して $\psi \in L(G, \Delta_H^{-1}\Delta_G \otimes E^\vee)^K$ として

$$\langle k \cdot \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, k^{-1} \cdot \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle \text{ for } \forall \varphi \in S(G, E), k \in K$$

よって $\langle *, \psi \rangle \in S(G, E)^\vee$ である．更に $G = \bigsqcup_i K g_i H$ として，任意の $\varphi \in S(G, E)^K$ に対して

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_i \langle f(g_i), g(g_i) \rangle \cdot \int_{K \cdot \dot{g}_i} \rho(x)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x}) \ (\varphi(g_i) = 0 \text{ for almost all } i)$$

より $g \mapsto \langle *, g \rangle$ は単射である．一方，任意の $\alpha \in S(G, E)^{\vee K}$ をとると，命題 3.6.1 より

$$\alpha : S(G, E) \xrightarrow[\varepsilon_K]{} S(G, E)^K \tilde{\to} \bigoplus_i E^{K_i} \xrightarrow[\sum_i \alpha_i]{} \mathbb{C}$$

である．ここで $K_i = H \cap g_i^{-1} K g_i$ であり $\alpha_i \in \left(E^{K_i}\right)^*$ である．ここで

$$\left(E^{K_i}\right)^* = (E^\vee)^{K_i} = \left(\Delta_H^{-1}\Delta_G \otimes E^\vee\right)^{K_i}$$

とみて，$\beta_i \in \left(\Delta_H^{-1}\Delta_G \otimes E^\vee\right)^{K_i}$ が $\left(\int_{K \cdot \dot{g}_i} \rho(x)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x})\right)^{-1} \alpha_i \in \left(E^{K_i}\right)^*$ に対応しているとする．命題 3.6.1 により $(\beta_i)_i \in \prod_i \left(\Delta_H^{-1}\Delta_G \otimes E^\vee\right)^{K_i}$ に対応して $\psi \in L(G, \Delta_H^{-1}\Delta_G \otimes E^\vee)^K$ が定まる．即ち

$$\psi(x) = \Delta_H(h)\Delta_G(h)^{-1} \cdot h^{-1} \cdot \beta_i \text{ for } x = k g_i h \in K g_i H$$

とおく．このとき任意の $\varphi \in S(G, E)^K$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \varphi \rangle &= \int_{G/H} \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle \rho(h)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x}) \\
&= \sum_i \int_{K \cdot \dot{g}_i} \langle \psi(g_i), \varphi(g_i) \rangle \rho(x)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x}) \\
&= \sum_i \langle \beta_i, \varphi(g_i) \rangle \int_{K \cdot \dot{g}_i} d\mu_\rho(\dot{x}) = \sum_i \langle \alpha_i, \varphi(g_i) \rangle = \langle \varphi, \alpha \rangle
\end{aligned}$$

となるから，$\langle \psi, * \rangle = \alpha$ となる．■

3.8 Frobenius 相互律

閉部分群 $H \subset G$ を一つ固定して，前節の記号を用いる．

定理 3.8.1 C^∞-G-加群 E と C^∞-H-加群 F に対して，複素線形同型

$$(*) : \mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_H^G F) \ni A \tilde{\mapsto} [u \mapsto (Au)(1)] \in \mathrm{Hom}_H(E, F)$$

が成り立つ．逆写像は

$$(*)^{-1} : \mathrm{Hom}_H(E, F) \ni B \tilde{\mapsto} [u \mapsto [x \mapsto B(x^{-1} \cdot u)]] \in \mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_H^G F).$$

[**証明**] $A \in \mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_H^G F)$ に対して

$$\alpha(A) : E \ni u \mapsto (Au)(1) \in F : \mathbb{C}\text{-linear}$$

$$\begin{aligned}\alpha(A)(h \cdot u) &= (A(h \cdot u))(1) = (h \cdot A(u))(1) = A(u)(h^{-1}) \\ &= h \cdot (A(u)(1)) \quad \forall h \in H\end{aligned}$$

より $\alpha(A) \in \mathrm{Hom}_H(E, F)$．一方 $B \in \mathrm{Hom}_H(E, F)$ に対して

$f_{B,u} : G \ni x \mapsto B(x^{-1} \cdot u) \in F$ for $u \in E$

s.t. 1) $f_{B,u}(xh) = B(h^{-1}x^{-1} \cdot u) = h^{-1} \cdot f_{B,u}(x)$ for $\forall h \in H$

2) $k \cdot u = u$ for $\forall k \in K$ なるコンパクト開部分群 $K \subset G$ があるから
$f_{B,u}(kx) = B(x^{-1}k^{-1} \cdot u) = f_{B,u}(x)$ for $\forall k \in K$

より $f_{B,u} \in \mathrm{Ind}_H^G F$ で

$$f_{B,g \cdot u}(x) = B(x^{-1}gu) = f_{B,u}(g^{-1}x) = (g \cdot f_{B,u})(x) \text{ for } \forall g \in G.$$

よって $\beta(B) = [u \mapsto f_{B,u}] \in \mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_H^G F)$ で，任意の $A \in \mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_H^G F)$ に対して

$$\begin{aligned}f_{\alpha(A),u}(x) &= \alpha(A)(x^{-1} \cdot u) = (A(x^{-1} \cdot u)(1) \\ &= (x^{-1} \cdot Au)(1) = (Au)(x) \quad \text{for } \forall x \in G\end{aligned}$$

より $\beta\circ\alpha(A)=[u\mapsto f_{\alpha(A),u}=Au]=A$．又，任意の $B\in\mathrm{Hom}_H(E,F)$ に対して

$$(\alpha\circ\beta(B))(u)=(\beta(B)u)(1)=f_{B,u}(1)=B(u)\quad\text{for }\forall u\in E.$$

■

定理 3.8.2 C^∞-G-加群 E と C^∞-H-加群 F に対して，複素線形同型

$$\Theta:\mathrm{Hom}_H(\Delta_H\Delta_G^{-1}\otimes F,E^\vee)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G F,E^\vee)$$

が成り立つ．ここで $A\in\mathrm{Hom}_H(\Delta_H\Delta_G^{-1}\otimes F,E^\vee)$ に対して

$$\langle\Theta(A)f,u\rangle=\int_{G/H}\langle A(1\otimes f(x)),x^{-1}\cdot u\rangle\rho(x)^{-1}d\mu_\rho(\dot{x})$$

($f\in\mathrm{ind}_H^G F,u\in E$) とおき，$\mu_\rho$ は H に関する ρ-関数 $\rho:G\to\mathbb{R}_{>0}$ に付随する G/H 上の Radon 測度である．

[**証明**] 次の $\mathbb{C}$-linear isom. の列から，Θ の存在は明らか；

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(S(G,F),E^\vee)&\xrightarrow[\text{系 3.5.3}]{\sim}\mathrm{Hom}_G(E,S(G,F)^\vee)\\&\xrightarrow[\text{定理 3.7.2}]{\sim}\mathrm{Hom}_G(E,\mathrm{Ind}_H^G\Delta_H^{-1}\Delta_G\otimes F^\vee)\\&\xrightarrow[\text{定理 3.8.1}]{\sim}\mathrm{Hom}_H(E,\Delta_H^{-1}\Delta_G\otimes F^\vee)\\&\xrightarrow[\text{系 3.5.3}]{\sim}\mathrm{Hom}_H(\Delta_H\Delta_G^{-1}\otimes F,E^\vee).\end{aligned}$$

具体的な対応は

$$\begin{aligned}A&\mapsto A^*\text{ s.t. }\langle A(1\otimes v),u\rangle=\langle 1\otimes v,A^*u\rangle=\langle v,A^*u\rangle\\&\mapsto[u\mapsto[x\mapsto A^*(x^{-1}\cdot u)]\\&\mapsto[m\mapsto\langle *,[x\mapsto A^*(x^{-1}\cdot u)]\rangle]=B\\&\mapsto B^*\end{aligned}$$

で，$f \in \mathrm{ind}_H^G F, u \in E$ に対して

$$\begin{aligned}\langle B^* f, u\rangle =& \langle f, Bu\rangle = \langle f, [x \mapsto A^*(x^{-1}\cdot u)]\rangle \\ &= \int_{G/H} \langle f(x), A^*(x^{-1}\cdot u)\rangle \rho(x)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x}) \\ &= \int_{G/H} \langle A(1\otimes f(x)), x^{-1}\cdot u\rangle \rho(x)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x})\end{aligned}$$

となる．■

3.9 Jacquet functor

以下，完全非連結な局所コンパクト Hausdorff 群 G とその閉部分群 $H \subset G$ をとり，連続な群準同型写像 $\theta : H \to \mathbb{C}^\times$ を固定しておく．

$$N_{G,\theta}(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H, \theta(ghg^{-1}) = \theta(h) \,\mathrm{for}\, \forall h \in H\}$$

とおくと，$H \subset N_{G,\theta}(H) \subset G$ は閉部分群となる．ここで G-加群 E に対して

$$\begin{aligned}E(H,\theta) &= \langle h\cdot v - \theta(h)v \mid h \in H, v \in E\rangle_{\mathbb{C}} \\ &\subset E : N_{G,\theta}(N)\text{-部分加群}\end{aligned}$$

である．実際，$g \in N_{G,\theta}(H), h \in H, v \in E$ に対して

$$g(h\cdot v - \theta(h)v) = (ghg^{-1})g\cdot v - \theta(ghg^{-1})g\cdot v.$$

そこで

$$E_{H,\theta} = E/E(H,\theta) : N_{G,\theta}(H)\text{-加群}$$

とおく．特に

$$E(H) = E(H, \mathbf{1}_H) = \langle h\cdot v - v \mid h \in H, v \in E\rangle_{\mathbb{C}}, \qquad E_H = E/E(H)$$

とおくと

$$E(H,\theta) = (\theta^{-1}\otimes E)(H), \qquad E_{H,\theta} = (\theta^{-1}\otimes E)_H$$

となる．

命題 3.9.1 $H = H_1H_2$, $H_2 \triangleleft H$ なる閉部分群 $H_i \subset H$ $(i = 1, 2)$ と H-module E に対して

$$E(H, \theta) = E(H_1, \theta|_{H_1}) + E(H_2, \theta|_{H_2}).$$

よって $H_1 \subset N_{G,\theta}(H_2)$ に注意して

$$E_{H_2,\theta|_{H_2}}(H_1, \theta|_{H_1}) = E(H, \theta)/E(H_2, \theta|_{H_2}),$$

従って自然な複素線形同型 $(E_{H_2,\theta|_{H_2}})_{H_1,\theta|_{H_1}} \xrightarrow{\sim} E_{H,\theta}$ が成り立つ.

[**証明**] $h_i \in H_i$, $v \in E$ に対して

$$\begin{aligned} &(h_1h_2) \cdot v - \theta(h_1h_2)v \\ =&\{h_1 \cdot (h_2 \cdot v) - \theta(h_1)(h_2 \cdot v)\} + \theta(h_1)\{h_2 \cdot v - \theta(h_2)v\} \end{aligned}$$

より上の通り. ■

任意の有限集合 $S \subset H$ に対して $\overline{\langle S \rangle} \subset H$ がコンパクト部分群となるとき, H は**有限型**であるという.

命題 3.9.2 H が有限型ならば, C^∞-G-加群 E に対して

$$E(H, \theta) = \left\{ v \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} \displaystyle\int_K \theta(k^{-1})k \cdot v d_K(k) = 0 \\ \text{for some } K \subset H\text{: compact subgroup} \end{array} \right\}.$$

[**証明**] H が有限型だから

$$E(H, \theta) = (\theta^{-1} \otimes E)(H) = \bigcup_{K \subset H:\text{コンパクト部分群}} (\theta^{-1} \otimes E)(K)$$

となるから, 定理 3.1.2 より上の通り. ■

同様に

命題 3.9.3 任意の有限集合 $S \subset H$ に対して $S \subset K$ なる開コンパクト部分群 $K \subset H$ が存在するならば, C^∞-G-加群 E に対して

$$E(H, \theta) = \left\{ v \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} \displaystyle\int_K \theta(k^{-1})k \cdot v d_K(k) = 0 \\ \text{for some } K \subset H\text{:コンパクト開部分群} \end{array} \right\}$$

である.

functor $E \mapsto E_{N,\theta}$ の完全性として，次が成り立つ；

命題 3.9.4 G-加群の完全列 $0 \to F \underset{\varepsilon}{\to} E \underset{\delta}{\to} V \to 0$ に対して

1) $F_{H,\theta} \underset{\varepsilon}{\to} E_{H,\theta} \underset{\delta}{\to} V_{H,\theta} \to 0$: exact.
2) H が有限型で E が C^∞-G-加群ならば $0 \to F_{H,\theta} \underset{\varepsilon}{\to} E_{H,\theta}$: exact.

[**証明**] 1) まず

$$\begin{aligned} & u \in E \,\text{s.t.}\, \delta(u) = \sum_i (h_i \cdot v_i - \theta(h_i)v_i) \in V(H,\theta) \\ \Rightarrow & v_i = \delta(u_i) \,\text{with}\, u_i \in E \\ \Rightarrow & u - \sum_i (h_i \cdot u_i - \theta(h_i)u_i) \in \mathrm{Ker}(\delta) = \mathrm{Im}(\varepsilon) \end{aligned}$$

よりよい．

2) $F \hookrightarrow E$ by ε とすると，命題 3.9.2 より $F(H,\theta) = F \cap E(H,\theta)$ だからよい． ■

以下 X, Y を完全非連結な局所コンパクト Hausdorff 空間として

1) X 上の l-sheaf $\mathcal{L}$ と群準同型写像

$$G \ni g \mapsto (\theta_g, \theta^\sharp_{g,V}) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L})$$

があって，$(g,x) \mapsto g \cdot x = \theta_g(x)$ により G は X に連続に作用する，
2) 連続写像 $q : X \to Y$ があって，任意の $y \in Y$ に対して $q^{-1}(y) \subset X$ は G-不変

であるとする．$\varphi \in \mathcal{S}(Y)$ に対して $\varphi \circ q \in C^\infty(X)$ だから，$\varphi \cdot s = (\varphi \circ q) \cdot s$ $(\varphi \in \mathcal{S}(Y), s \in \mathcal{L}(X))$ により $\mathcal{L}(X)$ を $\mathcal{S}(Y)$-加群とすると，$\mathcal{S}(Y) \cdot \mathcal{L}_c(X) = \mathcal{L}_c(X)$ である．

[**証明**] $\mathcal{S}(X) \cdot \mathcal{L}_c(X) = \mathcal{L}_c(X)$ だから，開コンパクト集合 $M \subset X$ と $s \in \mathcal{L}_c(X)$ をとって $t = \chi_M \cdot s \in \mathcal{L}_c(X)$ を考える．コンパクト集合 $q(M) \subset Y$ に対して $q(M) \subset U$ なるコンパクト開集合 $U \subset Y$ をとれば，$\chi_U \circ q = \chi_{q^{-1}(U)}$ だから

$$\chi_{q(M)} \cdot t = (\chi_{q^{-1}(U)} \cdot \chi_M) \cdot s = \chi_M \cdot s = t$$

となる．■

そこで $\mathcal{L}_c(X)$ で生成された Y 上の l-sheaf を $\mathcal{M}$ とすると，任意の $y \in Y$ に対して複素線形同型

$$\mathcal{M}_y \tilde{\to} \mathcal{L}_c(q^{-1}(y))$$

が成り立つ．

[**証明**] 定義から $\mathcal{M}_y = \mathcal{L}_c(X)/L(y)$

$$L(y) = \langle \varphi \cdot s \mid s \in \mathcal{L}_c(X), \varphi \in \mathcal{S}(Y)\,\mathrm{s.t.}\,\varphi(y) = 0 \rangle_{\mathbb{C}}.$$

一方，

$$p : \mathcal{L}_c(X) \ni s \mapsto s|_{q^{-1}(y)} \in \mathcal{L}_c(q^{-1}(y)) : \text{全射複素線形写像} \tag{3.1}$$

かつ $\mathrm{Ker}(p) = L(y)$ である．実際，$L(y) \subset \mathrm{Ker}(p)$ は明らか．逆に $s \in \mathrm{Ker}(p)$ とすると，任意の $x \in q^{-1}(y)$ に対して $\mathcal{L}_x$ で $[s] = 0$ となるから，$\mathrm{supp}(s) \cap q^{-1}(y) = \emptyset$，従ってコンパクト集合 $q(\mathrm{supp}(s)) \subset Y$ は y を含まない．よって $q(\mathrm{supp}(s)) \subset U$ かつ $y \notin U$ なるコンパクト開集合 $U \subset Y$ がとれる．$\chi_U \in \mathcal{S}(Y)$ で $\chi_U(y) = 0$ かつ

$$\chi_U \cdot s = (\chi_U \circ q) \cdot s = \chi_{q^{-1}(U)} \cdot s = s$$

となるから $s \in L(y)$ である．■

更に連続群準同型写像 $\alpha : G \to \mathbb{C}^\times$ をとれば，$\mathcal{S}(Y) \cdot \mathcal{L}_c(X)_{G,\alpha} = \mathcal{L}_c(X)_{G,\alpha}$ だから，$\mathcal{L}_c(X)_{G,\alpha}$ により生成される Y 上の l-sheaf を $\mathcal{N}$ とすると，任意の $y \in Y$ に対して複素線形同型

$$\mathcal{N}_y \tilde{\to} \mathcal{L}_c(q^{-1}(y))_{G,\alpha}$$

が成り立つ．

[**証明**] $L = \mathcal{L}_c(X)$ とおくと $\mathcal{N}_y = \mathcal{L}_c(X)/\langle L(G,\alpha), L(y) \rangle_{\mathbb{C}}$ であり，(3.1) より

$$\mathrm{Ker}[\mathcal{L}_c(X) \xrightarrow{p} \mathcal{L}_c(q^{-1}) \to \mathcal{L}_c(q^{-1})_{G,\alpha}] = \langle L(G,\alpha), L(y) \rangle_{\mathbb{C}}$$

となる．■

ここで X 上の $\mathcal{L}$-分布 $T \in \mathcal{L}_c^*(X)$ に対して $g \cdot T = T \circ \theta^\sharp_{g,X}$ であり，$\mathcal{L}(X)$ は $g \cdot s = \theta^\sharp_{g^{-1},X}(s)$ $(g \in G, s \in \mathcal{L}(X))$ により G-加群となっているから

$$\begin{aligned}\{T \in \mathcal{L}_c^*(X) : G\text{-不変}\} &= \mathrm{Hom}_G(\mathcal{L}_c(X), \mathbf{1}_G) \\ &\tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}_c(X)_{G,\mathbf{1}}, \mathbb{C}) : \text{複素線形同型} \qquad (3.2)\end{aligned}$$

である．よって次の定理を得る；

定理 3.9.5 任意の $y \in Y$ に対して $q^{-1}(y)$ 上の G-不変 $\mathcal{L}|_{q^{-1}(y)}$-分布が 0 に限るならば，X 上の G-不変な $\mathcal{L}$-分布も 0 に限る．

[**証明**] 任意の $y \in Y$ に対して，$q^{-1}(y)$ 上の G-不変 $\mathcal{L}|_{q^{-1}(y)}$-分布が 0 のみだから，(3.2) より $\mathcal{L}_c(q^{-1}(y))_{G,\mathbf{1}} = 0$，よって $\mathcal{N}_y = 0$ となる．よって $\mathcal{N} = 0$ となり，$\mathcal{N}(Y) = \mathcal{L}_c(X)_{G,\mathbf{1}} = 0$ となる．よって再び (3.2) より X 上の G-不変な $\mathcal{L}$-分布は 0 のみである．■

3.10 G/H 上の l-sheaf と誘導表現

以下，閉部分群 $H \subset G$ をとって $X = G/H$ 上の l-sheaf $\mathcal{L}$ と群準同型写像

$$G \ni g \mapsto (i_q, \theta^\sharp_{g,V} \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L}) \qquad (i_g(xH) = gxH)$$

があって，開集合 $V \subset X$ について $g \in G, s \in \mathcal{L}(V)$ に対して $g \cdot s = \theta^\sharp_{g^{-1},V}(s) \in \mathcal{L}(g \cdot V)$ とおいたとき，次を仮定する；

仮定； $\mathcal{L}_c(X)$ は C^∞-G-加群．

即ち，任意の $s \in \mathcal{L}_c(X)$ に対してコンパクト開部分群 $K \subset G$ があって $k \cdot s = s$ for $\forall k \in K$ となる．$x = \dot{a} \in X$ $(a \in G)$ に対して

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} = aHa^{-1}$$

で，$\mathcal{L}_c(X) \ni s \mapsto [s] \in \mathcal{L}_x$ は全射だから，上の仮定から，$\mathcal{L}_x$ は $g \cdot [s] = [g \cdot s]$ により C^∞-G_x-加群となる．特に $o = \dot{1} \in X = G/H$ に対して $\mathcal{L}_o$ は C^∞-H-加群となって

$$\mathcal{L}_o \ni [s] \tilde{\mapsto} [a \cdot s] \in \mathcal{L}_{\dot{a}} \text{ 複素線形同型}$$

となる．

命題 3.10.1 $s \in \mathcal{L}(X)_\infty$ に対して

$$f_s : G \ni x \mapsto [x^{-1} \cdot s] \in \mathcal{L}_o$$

は C^∞-関数で

1) $\mathcal{L}(X)_\infty \ni s \mapsto f_s \in \mathrm{Ind}_H^G(\mathcal{L}_o)$ は単射 G-加群準同型写像,
2) $s \in \mathcal{L}(X)$ に対して $\mathrm{supp}(f_s \mod H) = \mathrm{supp}(s)$.

[**証明**] $h \in H$ に対して

$$f_s(xh) = [(xh)^{-1} \cdot s] = [h^{-1} \cdot x^{-1} \cdot s] = h^{-1} \cdot f_s(x),$$

だから，$f_s \in \mathrm{Ind}_H^G(\mathcal{L}_o)$ となり，$f_{g \cdot s}(x) = [(x^{-1}g) \cdot s] = [(g^{-1}x)^{-1} \cdot s] = f_s(g^{-1}x)$ $(g \in G)$ より $s \mapsto f_s$ は G-加群の準同型写像となる．$s \in \mathcal{L}(X)_\infty$ と $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} &f_s(g) = [g^{-1} \cdot s] \neq 0 \text{ in } \mathcal{L}_o \\ \Leftrightarrow &g^{-1} \cdot s|_V \neq 0 \text{ for } o \in \forall V \subset X : \text{開集合} \end{aligned}$$

ここで $g^{-1} \cdot s|_V = \theta^\sharp_{g,X}(s)|_V = \theta^\sharp_{g,V}(s|_{g \cdot V})$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X) & \xrightarrow{\theta^\sharp_{g,X}} & \mathcal{L}(X) \\ {\scriptstyle \mathrm{res}^X_{cdot V}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}^X_V} \\ \mathcal{L}(g \cdot V) & \xrightarrow[\theta^\sharp_{g,V}]{} & \mathcal{L}(V) \end{array}$$

だから

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow &s|_{g \cdot V} \neq 0 \text{ for } o \in \forall V \subset X : \text{開集合} \\ \Leftrightarrow &[s] \neq 0 \text{ in } \mathcal{L}_{\dot{g}} \ \Leftrightarrow \ \dot{g} \in \mathrm{supp}(s) \end{aligned}$$

となる．よって $\mathrm{supp}(f_s \pmod H) = \mathrm{supp}(s)$ であり

$$f_s = 0 \ \Leftrightarrow \ [s] = 0 \text{ in } \mathcal{L}_x \text{ for } \forall x \in X \ \Leftrightarrow \ s = 0$$

となり，$s \mapsto f_s$ は単射である．■

特に $s \mapsto f_s$ は C^∞-G-加群の単射準同型写像 $\mathcal{L}_c(X) \to \mathrm{ind}_H^G(\mathcal{L}_o)$ を与える．よって $\mathrm{ind}_H^G(\mathcal{L}_o)$ に付随する $X = G/H$ 上の l-sheaf を $\mathcal{F}$ として l-sheaf の準同型写像 $(\Lambda_V)_{V \subset X} : \mathcal{L} \to \mathcal{F}$ が

$$\Lambda_V(s) = \left(\overline{f_s} \in S(\mathcal{L}_o)/S(\mathcal{L}_o, x)\right)_{x \in V} \qquad (s \in \mathcal{L}(V))$$

により定まる．任意の $\dot{g} \in X = G/H$ に対して

$$\Lambda_{\dot{g}} : \mathcal{L}_{\dot{g}} \to S(\mathcal{L}_o)/S(\mathcal{L}_o, \dot{g}) \qquad ([s] \mapsto \overline{f_s})$$

となるが

$$S(\mathcal{L}_o)/S(\mathcal{L}_o, \dot{g}) \tilde{\to} \mathcal{L}_o \tilde{\to} \mathcal{L}_{\dot{g}} \qquad (\overline{f_s} \mapsto f_s(g) = [g^{-1} \cdot s] \mapsto [s])$$

だから，$\Lambda_x : \mathcal{L}_x \tilde{\to} \mathcal{F}_x$ $(x = \dot{g} \in X = G/H)$ となる．よって

$$(\Lambda_V)_{V \subset X} : \mathcal{L} \tilde{\to} \mathcal{F}$$

は l-sheaf の同型写像となる．特に次の定理が成り立つ；

定理 3.10.2 $s \mapsto f_s$ は G-加群の同型

$$\mathcal{L}(X)_\infty \tilde{\to} \mathrm{Ind}_H^G(\mathcal{L}_o), \qquad \mathcal{L}_c(X) \tilde{\to} \mathrm{ind}_H^G(\mathcal{L}_o)$$

を与える．

さて X 上の $\mathcal{L}$-分布 $T \in \mathcal{L}_c^*(X)$ に対して $g \cdot T = T \circ \theta_{g,X}^\sharp$ であり，$\mathcal{L}(X)$ は $g \cdot s = \theta_{g^{-1},X}^\sharp(s)$ $(g \in G, s \in \mathcal{L}(X))$ により G-加群となっているから

$$\{T \in \mathcal{L}_c^*(X) : G\text{-不変}\} = \mathrm{Hom}_G(\mathcal{L}_c(X), \mathbf{1}_G)$$

である．よって定理 3.10.2 と定理 3.8.2 及び命題 3.5.2 から次の定理を得る；

定理 3.10.3 複素線形同型

$$\Theta : \mathrm{Hom}_H(\mathcal{L}_o, \Delta_H^{-1}\Delta_G) \tilde{\to} \{T \in \mathcal{L}_c^*(X) : G\text{-不変}\}$$

が成り立つ．ここで $A \in \mathrm{Hom}_H(\mathcal{L}_o, \Delta_H^{-1}\Delta_G)$ に対して

$$\Theta A : \mathcal{L}_c(X) \ni s \mapsto \int_{G/H} A([g^{-1} \cdot s])\rho(g)^{-1} d\mu_\rho(\dot{g}) \in \mathbb{C}$$

とおき，μ_ρ は H に関する ρ-関数 $\rho : G \to \mathbb{R}_{>0}$ に付随する G/H 上の Radon 測度である．

3.11　コンパクト表現，supercuspidal 表現

この節では簡単の為に G はユニモジュラーかつ高々可算個のコンパクト集合の和集合であると仮定する．

定義 3.11.1 C^∞-G-加群 E に対して

$$\varphi_{v,\alpha}(x) = \langle x \cdot v, \alpha \rangle \qquad (v \in E, \alpha \in E^\vee, x \in G)$$

を E の**行列成分** と呼ぶ．閉部分群 $Z \subset Z(G)$ に対して

1) 任意の $v \in E, \alpha \in E^\vee$ に対して $\mathrm{supp}\,\varphi_{v,\alpha} \subset G$ が G/Z でコンパクトのとき，E を Z を法としてコンパクトな C^∞-G-加群と呼ぶ．
2) $Z = \{1\}$ を法としてコンパクトな C^∞-G-加群を簡単にコンパクトな C^∞-G-加群と呼ぶ．
3) $Z = Z(G)$ を法としてコンパクトな C^∞-G-加群を supercuspidal G-加群と呼ぶ．

ここで開コンパクト部分群 $K \subset G$ に対して $[g \mapsto \varepsilon_K(g \cdot v)] \in C^\infty(G, E)$ for $\forall v \in E$ だから

$$M_{K,v} = \{g \in G \mid \varepsilon_K(g \cdot v) \neq 0\} = \bigcup_{\alpha \in (E^\vee)^K} \mathrm{supp}\,\varphi_{v,\alpha} \tag{3.3}$$

は G の閉集合となる．

命題 3.11.2 C^∞-G-加群 E に対して次は同値；

1) E はコンパクト G-加群,

2) 任意の開コンパクト部分群 $K \subset G$ と $v \in E$ に対して

$$M_{K,v} = \{g \in G \mid \varepsilon_K(g \cdot v) \neq 0\}$$

はコンパクト.

このとき，任意の開コンパクト部分群 $K \subset G$ と $v \in E$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \langle \varepsilon_K(g \cdot v) \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}} < \infty.$$

[証明] 2) $\Rightarrow$ 1) (3.3) より明らか.

1) $\Rightarrow$ 2) 開コンパクト部分群 $K \subset G$ と $v \in E$ をとって，$v_g = \varepsilon_K(g \cdot v) \in E^K$ $(g \in G)$ として，$\dim_{\mathbb{C}} \langle v_g \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}} = \infty$ とすると，無限列 $\{g_i\}_i \subset G$ があって $\{v_{g_i}\}_i$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立となる．そこで $\{v_{g_i}\}_i \sqcup \{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が E^K の $\mathbb{C}$-基底となるようにして，$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$ を

$$\begin{aligned} &\langle v, \alpha \rangle = \langle \varepsilon_K \cdot v, \alpha \rangle \text{ for } \forall v \in E, \\ &\langle v_{g_i}, \alpha \rangle = i \text{ for } \forall i, \quad \langle v_\lambda, \alpha \rangle = 0 \text{ for } \forall \lambda \in \Lambda \end{aligned}$$

により定めると，$\alpha \in (E^\vee)^K$ で

$$\begin{aligned} \varphi_{v,\alpha}(g_i) &= \langle g_i \cdot v, \alpha \rangle = \langle g_i \cdot v, \varepsilon_K \cdot \alpha \rangle \\ &= \langle \varepsilon_K(g_i \cdot v), \alpha \rangle = \langle v_{g_i}, \alpha \rangle = i \end{aligned}$$

となり，$\mathrm{supp}\, \varphi_{v\, alpha}$ がコンパクトであることに反する．よって $E_v = \langle \varepsilon_K(g \cdot v) \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}}$ は E^K の有限次元部分空間だから，有限個の $\{\alpha_i\}_{i=1,2\cdots,n} \subset (E^K)^* = (E^\vee)^K$ があって

$$E_v \ni u \mapsto (\alpha_i(u))_i \in \mathbb{C}^n$$

は単射複素線形写像とできる．ここで

$$\langle \varepsilon_K(g \cdot v), \alpha_i \rangle = \langle g \cdot v, \varepsilon_K \cdot \alpha_i \rangle = \langle g \cdot v, \alpha_i \rangle = \varphi_{v,\alpha_i}(g)$$

だから $\{g \in G \mid \varepsilon_K(g \cdot v) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{supp}\, \varphi_{v,\alpha_i}$ はコンパクトである．■

命題 3.11.3 C^∞-G-加群 E に対して

1) E が有限生成かつコンパクトならば，E は 許容 G-加群である．
2) E が単純かつ supercuspidal ならば E は許容 G-加群である．

[**証明**] 1) $E = \langle g \cdot v_1, \cdots, g \cdot v_n \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}}$ $(v_i \in E)$ とできるから，任意の開コンパクト部分群 $K \subset G$ に対して

$$E^K = \langle \varepsilon_K(g \cdot v_i) \mid g \in G, 1 \leq i \leq n \rangle_{\mathbb{C}}$$

となって，命題 3.11.2 より $\dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$ となる．

2) $\dim_{\mathbb{C}} E^K = \infty$ なる開コンパクト部分群 $K \subset G$ があったとする．このとき $(E^\vee)^K \simeq (E^K)^*$ だから $\dim_{\mathbb{C}}(E^\vee)^K$ は非可算である．ここで $0 \neq v \in E^K$ をとると $E = \langle g \cdot v \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}}$ だから

$$(E^\vee)^K \ni \alpha \mapsto \varphi_{v,\alpha} \in C^\infty(G)$$

は単射複素線形写像となる．ここで $G = \sqcup_{g \in \Omega} Z(G)KgK$ なる高々可算集合 $\Omega \subset G$ がとれて，$x = zkgk' \in G$ $(z \in Z(G), k, k' \in K, g \in \Omega)$ に対して $\varphi_{v,\alpha}(x) = \chi_\pi(z) \cdot \varphi_{v,\alpha}(g)$ $(\alpha \in (E^\vee)^K)$ で，$\operatorname{supp} \varphi_{v,\alpha}$ はコンパクトだから，単射複素線形写像

$$(E^\vee)^K \ni \alpha \mapsto (\varphi_{v,\alpha}(g))_{g \in \Omega} \in \bigoplus_{g \in \Omega} \mathbb{C}$$

を得る．よって $\dim_{\mathbb{C}}(E^\vee)^K$ か高々可算となって矛盾する．■

命題 3.11.4 G の既約な C^∞-表現 (π, E) は閉部分群 $Z \subset Z(G)$ を法としてコンパクトであり，$\chi = \pi|_Z$ は Z のユニタリ指標であるとすると

1) E 上の G-不変な正定値 Hermite 形式 $(\,,)$ が存在する，
2) $u \mapsto (*, u)$ は反複素線形同型 $E \xrightarrow{\sim} E^\vee$ を与える．

[**証明**] 命題 3.11.3 より (π, E) は許容表現となるから，反傾表現 $(\pi^\vee, E^\vee)$ は既約である（命題 3.4.2）．そこで $0 \neq \alpha \in E^\vee$ をとり，$u, v \in E$ に対して

$$(u, v) = \int_{G/Z} \langle \pi(x)u, \alpha \rangle \overline{\langle \pi(x)v, \alpha \rangle} d_G(\dot{x})$$

とおくと，これは E 上の G-不変な正定値 Hermite 形式となる．このとき任意の $\alpha \in E^\vee$ に対して，開コンパクト部分群 $K \subset G$ があって

$$\alpha : E \xrightarrow{\varepsilon_K} E^K \xrightarrow{(*)} \mathbb{C}$$

となって，$\dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$ だから，$(*) = (*, u)$ なる $u \in E^K$ がとれる．よって任意の $v \in E$ に対して

$$\alpha(v) = (\varepsilon_K v, u) = (v, \varepsilon_K u) = (v, u)$$

となる．よって $u \mapsto (*, u)$ は全射反複素写像 $E \to E^\vee$ を与える．これが単射であることは明らか．■

命題 3.11.5 G の既約 C^∞-表現 (π, E) は閉部分群 $Z \subset Z(G)$ を法としてコンパクトとして，次を仮定する；

Z 上の π の中心指標 χ_π に対して $|\chi|_Z| = |\chi_\pi|$ なる C^∞-指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ が存在する[1].

このとき

1) $0 < d_\pi \in \mathbb{R}$ があって，任意の $u, v \in E, \alpha, \beta \in E^\vee$ に対して

$$\int_{G/Z} \langle \pi(x)u, \alpha\rangle\langle\pi(x^{-1})v, \beta\rangle d_G(\dot{x}) = d_\pi^{-1}\langle u, \beta\rangle\langle v, \alpha\rangle$$

となる．d_π を (π, E) の**形式的次数**と呼ぶ.

2) $\rho|_Z = \pi|_Z$ なる既約許容表現 (ρ, F) が (π, E) と同値でないならば，任意の $u \in E, \alpha \in E^\vee, v \in F, \beta \in F^\vee$ に対して

$$\int_{G/Z} \langle \pi(x)u, \alpha\rangle\langle\rho(x^{-1})v, \beta\rangle d_G(\dot{x}) = 0.$$

[**証明**] 1) $\alpha \in E^\vee, v \in E$ を固定して

$$[u, \beta] = \int_{G/Z} \langle \pi(x)u, \alpha\rangle\langle\pi(x^{-1}v, \beta\rangle d_G(\dot{x}) \qquad (u \in E, \beta \in E^\vee)$$

[1] G が F 上定義された連結簡約可能代数群の F-有理点の群の場合，任意の C^∞-指標 $\chi : Z(G) \to \mathbb{R}_{>0}^\times$ は C^∞-指標 $\widetilde{\chi} : G \to \mathbb{R}_{>0}^\times$ に延長される [5, p.48, Lemma 5.2.5]

とおくと，$[\,,\,] : E \times E^\vee \to \mathbb{C}$ は G-不変な複素双線形形式となるから

$$[u \otimes \beta \mapsto [u, \beta]] \in \mathrm{Hom}_G(E \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee, \mathbb{C}) \tilde{\to} \mathrm{End}_G(E) = \mathbb{C}$$

より，$[\,,\,] = c_{v,\alpha}\langle\,,\,\rangle$ なる $c_{v,\alpha} \in \mathbb{C}$ がとれる．更に $(v, \alpha) \mapsto c_{v,\alpha}$ は G-不変は複素双線形形式 $E \times E^\vee \to \mathbb{C}$ となるから，同様に $c_{v,\alpha} = d \cdot \langle v, \alpha\rangle$ $(\forall v \in E, \alpha \in E^\vee)$ なる $d \in \mathbb{C}$ がとれる．よって任意の $u, v \in E, \alpha, \beta \in E^\vee$ に対して

$$\int_{G/Z} \langle \pi(x)u, \alpha\rangle\langle \pi(x^{-1}v, \beta\rangle d_G(\dot{x}) = d \cdot \langle u, \beta\rangle\langle v, \alpha\rangle$$

となる．ここで π の代わりに $\chi^{-1} \otimes \pi$ をとれば，χ_π は Z のユニタリ指標であると仮定してよい．このとき命題 3.11.4 より E 上に G-不変は正定値 Hermite 形式 $(\,,\,)$ が存在する．よって $u, v \in E$ に対して $\alpha = (*, v), \beta = (*, u) \in E^\vee$ とおけば

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u, v)|^2 d_G(\dot{x}) = d \cdot |u|^2|v|^2$$

となるから $d > 0$ である．

2) 1) と同様に $\alpha \in E^\vee, v \in F$ を固定して

$$[u, \beta] = \int_{G/Z} \langle \pi(x)u, \alpha\rangle\langle \rho(x^{-1})v, \beta\rangle d_G(\dot{x}) \qquad (u \in E, \beta \in F^\vee)$$

とおくと，$[\,,\,] : E \times F^\vee \to \mathbb{C}$ は G-不変は複素双線形形式となるから

$$[u \otimes \beta \mapsto [u, \beta]] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(E \otimes_{\mathbb{C}} F^\vee) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(E, F) = \{0\}$$

となる．■

系 3.11.6 G の既約 C^∞-表現 (π, E) の $Z(G)$ 上の中心指標 χ_π に対して G の C^∞-指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ で $|\chi|_{Z(G)}| = |\chi_\pi|$ なるものが存在するとする．このとき閉部分群 $Z \subset Z(G)$ に対して次は同値である；

1) (π, E) は Z を法としてコンパクト,
2) (π, E) は supercuspidal かつ $Z(G)/Z$ はコンパクト.

[**証明**] 命題 3.11.5 より $\displaystyle\int_{Z(G)/Z} d_{Z(G)}\dot{z} < \infty$ となるから．■

命題 3.11.7 G の既約コンパクト表現 (π, E) と開コンパクト部分群 $N \subset G$ に対して

1) G の任意の既約 C^∞-表現 ρ に対して
$$\rho(\varepsilon_N^\pi) = \begin{cases} \pi(\varepsilon_N) & : \rho \simeq \pi, \\ 0 & : \rho \not\simeq \pi \end{cases}$$
なる $\varepsilon_N^\pi \in \mathcal{H}(G)$ が唯一存在する

2) 開コンパクト部分群 $M \subset N$ に対して
$$\varepsilon_M^\pi * \varepsilon_N^\pi = \varepsilon_M^\pi * \varepsilon_N = \varepsilon_N * \varepsilon_M^\pi = \varepsilon_N^\pi$$

3) $\varepsilon_g * \varepsilon_N^\pi * \varepsilon_{g^{-1}} = \varepsilon_{gNg^{-1}}^\pi$ for $\forall g \in G$.

[**証明**] 1) 定理 3.3.2 より ε_N^π の一意性はよい．命題 3.11.3 より E は許容 G-加群となるから，命題 3.5.1 より $G \times G$-加群の同型
$$E \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty \qquad (v \otimes \alpha \mapsto [u \mapsto \langle u, \alpha \rangle v]) \tag{3.4}$$
が成り立つ．$\varphi \in C^\infty(G)$ と $(g,h) \in G \times G$ に対して $((g,h)\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}xh)$ により $C^\infty(G)$ は $G \times G$-加群となる．そこで $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty$ とすると，任意の $g \in G$ に対して $\pi(g^{-1}) \circ A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)^{K \times K}$ なる開コンパクト部分群 $K \subset G$ があって
$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E^K) \ni C \xrightarrow{\sim} C \circ \varepsilon_K \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)^{K \times K}$$
だから，$\dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$ より，$\varphi_A(g) = \mathrm{tr}\left(\pi(g^{-1}) \circ A\right) \in \mathbb{C}$ が定まり，$\varphi_A \in C^\infty(G)$ である．このとき
$$\theta : \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty \ni A \mapsto \varphi_A \in C^\infty(G)$$
は $G \times G$-加群の準同型写像となる．実際
$$\begin{aligned} \varphi_{(g,h)A}(x) &= \mathrm{tr}\left(\pi(x^{-1}) \circ \pi(g) \circ A \circ \pi(h^{-1})\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\pi(h^{-1}x^{-1}g) \circ A\right)\right) = \varphi_A(g^{-1}xh) = ((g,h)\varphi_A)(x). \end{aligned}$$

又 $A = v \otimes \alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty = E \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee$ に対して

$$\varphi_A(x) = \mathrm{tr}\left([u \mapsto \langle u, \alpha\rangle \cdot \pi(x^{-1})v]\right) = \langle \pi(x^{-1})v, v\rangle = \varphi_{v,\alpha}(x^{-1})$$

となって $\mathrm{supp}\,\varphi_{v,\alpha} \subset G$ はコンパクトだから

$$\theta : \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty \to \mathcal{S}(G) = \mathcal{H}(G)$$

は $G \times G$-加群の単射準同型写像である（単射性は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E) \simeq E \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee$ が単純 $G \times G$-加群であることによる）．一方，G の任意の既約 C^∞-表現 (ρ, V) に対して，自然な $G \times G$-加群の準同型写像

$$\rho : \mathcal{H}(G) = \mathcal{S}(G) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)_\infty \qquad (\varphi \mapsto [v \mapsto \varphi \cdot v])$$

ができる．さて $G = G \times \{1\}$-加群としては $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty = E \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee$ は E の直和で，任意の $v \in V$ に対して

$$\mathcal{S}(G) = \mathcal{H}(G) \ni \varphi \mapsto \rho(\varphi)v \in V$$

は $G = G \times \{1\}$-加群の準同型写像だから，$\rho \not\simeq \pi$ ならば $\rho \circ \theta = 0$ である．一方，$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty = E \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee$ は単純 $G \times G$-加群だから，$\pi \circ \theta = c \cdot \mathrm{id}_E$ なる $c \in \mathbb{C}$ がとれる．特に $A = v \otimes \alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty = E \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee$ に対して $\pi(\varphi_A) = c \cdot A$ だから

$$\begin{aligned} c \cdot \langle u, \alpha\rangle\langle v, \beta\rangle = \langle \varphi_A \cdot u, \beta\rangle &= \int_G \varphi_{v,\alpha}(x^{-1})\langle u, \beta\rangle d_G(x) \\ &= \int_G \langle \pi(x)v, \alpha\rangle\langle \pi(x^{-1})u, \beta\rangle d_G(x) \end{aligned}$$

となる．よって命題 3.11.5 と比較して $c = d_\pi^{-1} > 0$ となる．そこで任意の開コンパクト部分群 $N \subset G$ に対して

$$\varepsilon_N^\pi = c^{-1}\theta \circ \pi(\varepsilon_N) \in \mathcal{S}(G) = \mathcal{H}(G)$$

とおくと，$\pi(\varepsilon_N^\pi) = \pi(\varepsilon_N)$ であり，G に既約 C^∞-表現 $\rho \not\simeq \pi$ に対しては

$$\rho(\varepsilon_N^\pi) = c^{-1}\rho \circ \theta \circ \pi(\varepsilon_N) = 0$$

となる．2), 3) は ε_N^π の一意性から明らか．■

注意 3.11.8 命題3.11.7 で，(3.4) により $E\otimes_{\mathbb{C}}E^\vee = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty$ とおく．開コンパクト部分群 $N \subset G$ に対して $E^N, (E^\vee)^N$ の基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}, \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ を $\langle u_i, \alpha_j\rangle = \delta_{ij}$ となるようにとると

$$\varepsilon_N^\pi = \varphi_A \in \mathcal{S}(G) = \mathcal{H}(G) \text{ with } A = \sum_{i=1}^n u_i \otimes \alpha_i \in E\otimes_{\mathbb{C}}E^\vee = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty$$

である．実際，$u \in E$ に対して $\varepsilon_N u \in E^N$ だから $\varepsilon_N u = \sum_{i=1}^n \lambda_i(u) \cdot u_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{C}$) とおくと $\lambda_i(u) = \langle \varepsilon_N u, \alpha_i\rangle = \langle u, \varepsilon_N\alpha_i\rangle = \langle u, \alpha_i\rangle$ だから，$\pi(\varepsilon_N) = \sum_{i=1}^n u_i \otimes \alpha_i = A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty$．よって $\varepsilon_N^\pi = \theta \circ \pi(\varepsilon_N) = \varphi_A$ となる．

(π, E) を G のコンパクト既約 C^∞-表現とする．G の任意の C^∞-表現 (ρ, V) に対して，$v \in V$ ならば $v \in V^K$ なる開コンパクト部分群 $K \subset G$ があって $N \subset K$ なる任意の開コンパクト部分群 $N \subset G$ に対して

$$\rho(\varepsilon_N^\pi)u = \rho(\varepsilon_N^\pi) \circ \rho(\varepsilon_K)u = \rho(\varepsilon_N^\pi * \varepsilon_K)u = \rho(\varepsilon_K^\pi)u$$

となる．そこで

$$\rho(\varepsilon^\pi)v = \lim_{N\to\{1\}} \rho(\varepsilon_N^\pi)v = \rho(\varepsilon_K^\pi)v$$

と書くことにする．命題 3.11.7 より

1) $\rho(\varepsilon^\pi) \in \mathrm{End}_G(V)$ s.t. $\rho(\varepsilon^\pi)^2 = \rho(\varepsilon^\pi)$,
2) G の C^∞-表現 (ρ', V') に対して $A \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$ ならば

$$\rho(\varepsilon^\pi) \circ A = A \circ \rho'(\varepsilon^\pi)$$

が成り立つ．

命題 3.11.9 (π, E) を G のコンパクト既約 C^∞-表現とする．G の C^∞-表現 (ρ, V) に対して $V_\pi = \mathrm{Im}\,\rho(\varepsilon^\pi)$，$V_\pi^\perp = \mathrm{Ker}\,\rho(\varepsilon^\pi)$ とおくと

1) $V = V_\pi \oplus V_\pi^\perp$,
2) V_π は E の直和と G-加群として同型,

3) $V_\pi^\perp$ は E と同型な G-部分商加群[2]をもたない．

[**証明**] 開コンパクト部分群 $M, N \subset G$ に対して $M \subset N$ ならば $\varepsilon_M^\pi * \varepsilon_N^\pi = \varepsilon_N^\pi$ だから

$$\operatorname{Im} \rho(\varepsilon_N^\pi) \subset \operatorname{Im} \rho(\varepsilon_M^\pi), \qquad \operatorname{Ker} \rho(\varepsilon_N^\pi) \supset \operatorname{Ker} \rho(\varepsilon_M^\pi)$$

となる．よって注意 3.11.8 より

$$\begin{aligned} V_\pi &= \sum_{N \subset G:\text{開コンパクト部分群}} \operatorname{Im} \rho(\varepsilon_N^\pi) \\ &= \langle \rho(\varepsilon_N^\pi) v \mid N \subset G : \text{開コンパクト部分群},\ v \in V \rangle_{\mathbb{C}} \\ &\subset \langle \rho(\varphi_A) v \mid A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty,\ v \in V \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_{v \in V} \operatorname{Im} [\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty \ni A \mapsto \rho(\varphi_A) v \in V] \end{aligned}$$

で $G = G \times \{1\}$-加群の同型 $E \otimes_{\mathbb{C}} E^\vee \simeq \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty$ より V_π は半単純 G-加群で，直和因子は全て E と同型ある．ここで $\pi(\varepsilon^\pi) = 1$ であり，$V_\pi^\perp$ 上では $\rho(\varepsilon^\pi) = 0$ だから，V は E と同型な G-部分商加群をもたない．■

3.12　許容表現の指標

(π, E) を G の C^∞-許容表現とする．任意の $T \in \mathcal{H}(G)$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} T(E) < \infty$ である．

[**証明**] $T = \sum_i \varepsilon_{K_i} * \varepsilon_{g_i}$ なる $g_i \in G$ とコンパクト開部分群 $K_i \subset G$ をとって $K = \bigcap_i K_i$ とおくと，系 3.1.3 より $T(E) = T(E^K)$ となり $\dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$ である．■

そこで $\operatorname{tr}(\pi) \in \mathcal{D}(G)$ を

$$\operatorname{tr}(\pi)(f) = \operatorname{tr}(\pi(f)) \text{ for } f \in \mathcal{S}(G) = \mathcal{H}(G)$$

により定義して，これを (π, E) の**指標** と呼ぶ．

[2] G-加群 V の G-部分加群 $S \subset T \subset V$ に対して T/S を V の G-部分商加群と呼ぶ．

定理 3.12.1 G の既約許容表現 π_i $(i=1,2,\cdots,r)$ が互いに同値でないならば，$\mathrm{tr}(\pi_i)$ $(i=1,2,\cdots,r)$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である．

[**証明**] π_i の表現空間を E_i として，コンパクト開部分群 $K\subset G$ をとって $E_i^K\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,r)$ とする．命題 3.2.2 と命題 3.2.3 より，これらは互いに同型でない単純 $\mathcal{H}_K(G)$-加群である．よって定理 A.7.2 より $\mathrm{tr}(\pi_i)|_{\mathcal{H}_K(G)}$ $(i=1,2,\cdots,r)$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である．■

系 3.12.2 G の既約許容表現 π_1,π_2 が同値である必要十分条件は $\mathrm{tr}(\pi_1)=\mathrm{tr}(\pi_2)$ なることである．

3.13　群の作用で不変な分布 II

位相空間の部分集合 M が $x\in M$ で局所閉であるとは，$x\in M\cap V=V\cap F$ なる開集合 V と閉集合 F が存在することである．このとき次は同値である；

1) M は任意の $x\in M$ で局所閉,
2) M は閉包 $\overline{M}$ の開部分集合,
3) $M=V\cap F$ なる開集合 V と閉集合 F が存在する．

[**証明**] 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) は明らかだから 1) $\Rightarrow$ 2) を示す．$x\in M$ とすると $M\cap V$ が V の閉集合となる開集合 $x\in V$ がとれるから $x\in\overline{M}\cap V=M\cap V\subset M$ となる．よって M は $\overline{M}$ の開部分集合．■

位相空間の部分集合 M に対して

$$U(M)=\{x\in M\mid M \text{ は } x \text{ で局所閉 }\}$$

は局所閉集合かつ M の開部分集合である．
[**証明**] 任意の $x\in U(M)$ に対して，$x\in M\cap V=V\cap F$ なる開集合 V と閉集合 F がとれる．このとき $M\cap V=V\cap F\subset U(M)$ である．よって $U(M)$ は M の開部分集合である．又

$$x\in U(M)\cap V=U(M)\cap M\cap V=U(M)\cap V\cap F=V\cap F$$

となり，$U(M)$ は x で局所閉である．■

そこで $M^1 = M \setminus U(M)$ とおくと，M^1 は M の閉集合である．

$$M^2 = (M^1)^1,\ M^3 = (M^2)^1, \cdots, M^{k+1} = (M^k)^1$$

とおくと M^k は M の閉部分集合で $M = M^0 \supset M^1 \supset M^2 \supset \cdots$ となる．

位相空間の部分集合が有限個の局所閉集合の和集合であるとき，それを**構成的な部分集合**と呼ぶ．

命題 3.13.1 位相空間の構成的部分集合 M に対して，十分大きな k をとれば $M^k = \emptyset$ となる．特に $M = U(M) \cup U(M^1) \cup \cdots \cup U(M^{k-1})$.

[**証明**] 任意の開集合 V に対して $U(M \cap V) = U(M) \cap V$ だから $(M \cap V)^1 = M^1 \cap V$，従って $(M \cap V)^k = M^k \cap V$ となる．$M = \cup_{i=1}^{l} S_i$ (S_i は局所閉集合) としたとき，l に関する帰納法により $M^l = \emptyset$ を示す．$l = 1$ のとき，M は局所閉集合だから $U(M) = M$，従って $M^1 = \emptyset$ である．$l-1$ までよいとして，$l > 1$ のとき，任意の k に対して開集合 $V_k = {\overline{S}_k}^c$ をとると $M \cap V_k = \cup_{i \neq k}(S_i \cap V_k)$ に帰納法の仮定を用いて $M^{l-1} \cap V_k = (M \cap V_k)^{l-1} = \emptyset$，よって $M^{l-1} \subset \overline{S}_k$ である．S_k は局所閉集合だから S_k は $\overline{S}_k$ の開部分集合，従って $M^{l-1} \cap S_k$ は M^{l-1} の開集合である．一方，M^{l-1} は M の閉集合だから $M^{l-1} \cap S_k$ は S_k の閉集合となる．よって $M^{l-1} \cap S_k \subset U(M^{l-1})$ となり

$$M^l = M^{l-1} \cap U(M^{l-1})^c \subset M^{l-1} \cap ((M^{l-1})^c \cup {S_k}^c) = M^{l-1} \cap {S_k}^c$$

だから $M^l \cap S_k = \emptyset$．$M^l \subset M = \cup_k S_k$ だから $M^l = \emptyset$ となる．■

さて G は完全非連結 Hausdorff 空間 X に $(g, x) \mapsto g \cdot x$ により連続に作用しているとする．G-軌道の空間 $G \backslash X$ には自然な全射 $p : X \to G \backslash X$ が連続となる最強の位相を与える（即ち $V \subset G \backslash X$ が開集合であることを $p^{-1}(V) \subset X$ が開集合であることにより定義する）．従って $p : X \to G \backslash X$ は開写像である．又 G-不変部分集合 $M \subset X$ に対して

1) $M \subset X$ が閉集合ならば $p(M) \subset G \backslash X$ は閉集合，
2) $M \subset X$ が局所閉集合ならば $p(M) \subset G \backslash X$ は局所閉集合，
3) $M \subset X$ が構成的ならば $p(M) \subset G \backslash X$ は構成的である．

[**証明**] 1) M の G-不変性から $p^{-1}(p(M)) = M$ は閉集合だからよい．

2) 開集合 $V \subset V$ をとって $M = V \cap \overline{M}$ と書けて，$\overline{M}$ は G-不変だから $p(M) = p(V) \cap p(\overline{M})$ となり，1) より $p(M) \subset G\backslash X$ は局所閉集合となる．

3) 命題 3.13.1 より $M = U(M) \cup U(M^1) \cup \cdots \cup U(M^l)$ となり，$U(M^k)$ は G-不変な局所閉集合だから，2) より

$$p(M) = p(U(M)) \cup p(U(M^1)) \cup \cdots \cup p(U(M-l)) \subset G\backslash X$$

は構成的である．■

従って次は同値であるから，このとき X への G の作用は構成的であるという．

1) $\Gamma = \{(x, g \cdot x) \mid x \in X, g \in G\} \subset X \times X$ は構成的部分集合，
2) $\Delta = \{(\dot{x}, \dot{x}) \mid x \in X\} \subset G\backslash X \times G\backslash X$ は構成的部分集合．

[**証明**] $p : X \times X \to G\backslash X \times G\backslash X$ $((x, y) \mapsto (\dot{x}, \dot{y}))$ とおけば $p(\Gamma) = \Delta, p^{-1}(\Delta) = \Gamma$ だから．■

このとき

1) G-軌道は全て X の局所閉集合である，
2) G-不変な開集合 $W \subset X$ があって $G\backslash W$ は Hausdorff 空間となる．

[**証明**] 1) 第一因子への射影を $p : X \times X \to X$ とすると，任意の $x \in X$ に対して $p^{-1}(x) \subset X \times X$ は閉集合で $p^{-1}(x) \cap \Gamma = \{x\} \times G \cdot x$ は $X \times X$ の構成的部分集合となる．よって $G \cdot x \in X$ は構成的部分集合である．よって $U(G \cdot x) \neq \emptyset$ となるが，$U(G \cdot x)$ は G-不変だから $G \cdot x = U(G \cdot x)$ は X の局所閉集合である．

2) 対角集合 $\Delta \subset G\backslash X \times G\backslash X$ は構成的部分集合だから $U(\Delta) \neq \emptyset$．従って $(\dot{x}, \dot{x}) \in U(\Delta)$ をとれば，開集合 $\dot{x} \in V \subset G\backslash X$ があって $\Delta \cap (V \times V)$ が $V \times V$ の閉集合となるようにできる．自然な全射 $p : X \to G\backslash X$ に対して $W = p^{-1}(V)$ とおけば，$W \subset X$ は G-不変な開集合で，$G\backslash W \times G\backslash W$ の対角集合は $\Delta \cap (V \times V)$ で閉集合となるから，$G\backslash W$ は Hausdorff 空間となる．■

以下，X を完全非連結 Hausdorff 空間とする．

定理 3.13.2 X 上の l-sheaf $\mathcal{L}$ に対して，群準同型写像

$$G \ni g \mapsto (\theta_g, \theta^\sharp_{g,V}) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L})$$

があって

1) $(g, x) \mapsto g \cdot x = \theta_g(x)$ により G は X に連続かつ構成的に作用する，
2) 任意の G-軌道 $\Omega \subset X$ に対して $T \in \mathcal{L}^*_c(\Omega)$ が G-不変ならば $T = 0$

とすると，$T \in \mathcal{L}^*_c(X)$ が G-不変ならば $T = 0$ である．

[**証明**] G-不変な $0 \neq T \in \mathcal{L}^*_c(X)$ があったとする．$F = \mathrm{supp}(T) \subset X$ は G-不変な閉集合だから T の代わりに $T|_F$ を考えれば $\mathrm{supp}(T) = X$ としてよい．ここで G-不変な開集合 $W \subset X$ があって $Y = G \backslash W$ は Hausdorff 空間となる．よって命題 1.1.3 より Y は完全非連結な局所コンパクト Hausdorff 空間となり，自然な全射 $q : W \to Y$ は連続開写像となる．任意の $y \in Y$ に対して $q^{-1}(y) \subset X$ は一つの G- 軌道だから，仮定から $q^{-1}(y)$ 上の G-不変な $\mathcal{L}|_{q^{-1}(y)}$-分布は 0 に限る．よって定理 3.9.5 より W 上の G-不変な $\mathcal{L}|_W$-分布は 0 に限る．しかるに $T|_W \in \mathcal{L}^*_c(W)$ は 0 でない G-不変分布となり矛盾する．■

応用上，次の定理が有用である；

定理 3.13.3 X 上の l-sheaf $\mathcal{L}$ に対して群準同型写像

$$\theta : G \ni g \mapsto (\theta_g, \theta^\sharp_{g,V}) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L})$$

と $\sigma = (\sigma, \sigma^\sharp_V) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L})$ があって

1) $(g, x) \mapsto g \cdot x = \theta_g(x)$ により G は X に構成的に作用する，
2) 任意の $g \in G$ に対して $\theta(g) \cdot \sigma = \sigma \cdot \theta(g')$ なる $g' \in G$ が存在する，
3) σ は G-軌道を G-軌道に移す，
4) $\sigma^n \in \mathrm{Im}(\theta)$ for some $n > 0$,
5) G-軌道 $\Omega \subset X$ に対して $0 \neq T \in \mathcal{L}^*_c(\Omega)$ が G-不変ならば，$\sigma\Omega = \Omega$ かつ $\sigma \cdot T = T$ $(\sigma \cdot T = T \circ \sigma^{\sharp -1}_X \in \mathcal{L}^*_c(\Omega))$

とすると，$T \in \mathcal{L}_c^*(X)$ が G-不変ならば $\sigma \cdot T = T$ である．

[**証明**] G-不変な $T \in \mathcal{L}_c^*(X)$ で $\sigma \cdot T \neq T$ なるものが存在したと仮定する．$\zeta \in \mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ に対して

$$T_\zeta = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-i} \sigma^i \cdot T \in \mathcal{L}_c^*(X)$$

とおくと，条件 2) より T_ζ は G-不変である．又，条件 4) より $\sigma^n \cdot T = T$ だから

$$\sigma \cdot T_\zeta = \zeta \sum_{i=1}^{n} \zeta^{-1} \sigma^i \cdot T = \zeta \cdot T_\zeta$$

である．よって

$$\sum_{\zeta \in \mu_n} T_\zeta = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{\zeta \in \mu_n} \zeta^{-i} \right) \sigma^i \cdot T = nT$$

の両辺に σ を作用させて $\displaystyle\sum_{\zeta \in \mu_n} \zeta T_\zeta = n\sigma \cdot T$ となり

$$\sum_{\zeta \in \mu_n} (\zeta - 1) T_\zeta = n(\sigma \cdot T - T) \neq 0$$

となって，$T_\zeta \neq 0$ なる $1 \neq \zeta \in \mu_n$ が存在する．そこで $\sigma_\zeta = (\sigma, \zeta \cdot \sigma_V^\sharp) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L})$ とくと

$$\sigma_\zeta \cdot T_\zeta = T_\zeta \circ (\zeta^{-1} \sigma_X^{\sharp -1}) = \zeta^{-1} \sigma \cdot T_\zeta = T_\zeta$$

だから，$\{\theta(G), \sigma_\zeta\}$ で生成された $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{L})$ の部分群を $\mathcal{G}$ とすると，$0 \neq T_\zeta \in \mathcal{L}_c^*(X)$ は $\mathcal{G}$-不変である．ここで $\Gamma_G = \{(x, g \cdot x) \mid x \in X, g \in G\}$ は $X \times X$ の構成的部分集合で，条件 2) より

$$\Gamma_{\mathcal{G}} = \{(x, \gamma \cdot x) \mid x \in X, \gamma \in \mathcal{G}\} = \bigcup_{0 \leq i < n} \sigma^i \cdot \Gamma_G$$

は $X \times X$ の構成的部分集合となる．即ち $\mathcal{G}$ の X への作用は構成的である．よって定理 3.13.2 より，ある $\mathcal{G}$- 軌道 $\Omega' \subset X$ に対して $\mathcal{G}$-不変な $0 \neq S \in \mathcal{L}_c^*(\Omega')$

が存在し，よって再び定理 3.13.2 より，ある G-軌道 $\Omega \subset \Omega'$ に対して G-不変な $0 \neq U \in \mathcal{L}_c^*(\Omega)$ が存在する．よって条件 5) より $\sigma\Omega = \Omega$ となり，$0 \neq S \in \mathcal{L}_c^*(\Omega)$ が G-不変かつ $\sigma \cdot S = S$ となる．ところが S は $\mathcal{G}$-不変だったから $\sigma_\zeta \cdot S = S$，即ち $\sigma \cdot S = \zeta S$ であり，$\zeta \neq 1$ だから，これは矛盾である．■

上の定理で条件 5) が自動的に満たされる場合がある．例えば

定理 3.13.4 G は可算個のコンパクト集合の和集合で，群準同型写像

$$\theta : G \ni g \mapsto (\theta_g, \theta^\sharp_{g,V}) \in \mathrm{Aut}(X, C_X^\infty)$$

と $\sigma = (\sigma, \sigma^\sharp_V) \in \mathrm{Aut}(X, C_X^\infty)$ があって

1) $(g, x) \mapsto g \cdot x = \theta(g)x$ により G は X に構成的に作用する，
2) $\theta(g) \circ \sigma = \sigma \circ \theta(g')$ なる全射 $G \ni g \mapsto g' \in G$ が存在する，
3) 全ての G-軌道 $\Omega \subset X$ は σ-不変，
4) $\sigma^n \in \mathrm{Im}\,\theta$ for some $n > 0$

とすると，$T \in \mathcal{D}(X)$ が G-不変ならば $\sigma{\cdot}T = T$ ($\sigma{\cdot}T \in \mathcal{D}(X)$ s.t. $\langle \sigma{\cdot}T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi \circ \sigma^{-1}\rangle$ for $\forall\varphi \in \mathcal{S}(X)$) である．

[**証明**] X 上の l-sheaf C_X^∞ に対して定理 3.13.3 の条件 5) を示せばよい．G-軌道 $\Omega \subset X$ をとって，$x \in \Omega$, $H = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ とおくと，$\Omega = G/H$ としてよい．よって $0 \neq T \in \mathcal{D}(\Omega)$ が G-不変とすると，定理 3.10.3 より $\mathrm{Hom}_H(\mathcal{L}_x, \Delta_H^{-1}\Delta_G) \neq 0$ だから，$\Delta_H^{-1}\Delta_G = \mathbf{1}_H$，即ち $\Delta_H(h) = \Delta_G(h)$ for $\forall h \in H$ である．よって G-軌道 Ω 上の G-不変測度 $d_\Omega(y)$ が定数倍を除いて唯一定まる．条件 2) より $d'_\Omega(y) = d_\Omega(\sigma(y))$ は Ω 上の G-不変測度となるから，$d_\Omega(\sigma(y)) = |\sigma| d_\Omega(y)$ なる $0 < |\sigma| \in \mathbb{R}$ が存在する．$\sigma^n \in \mathrm{Im}\,\theta$ より $d_\Omega(\sigma - n(x)) = d_\Omega(x)$，よって $|\sigma|^n = 1$，従って $|\sigma| = 1$ である．即ち $d_\Omega(x)$ は Ω 上の σ-不変測度である．定理 3.10.3 より G-不変な $T_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ が

$$\langle T_0, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(y) d_\Omega(y) \text{ for } \varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$$

により与えられる．$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_H(C^\infty_{X,x}, \Delta_H^{-1}\Delta_G) = 1$ より $T = c \cdot T_0$ $(c \in \mathbb{C})$ となり

$$\begin{aligned}\langle \sigma \cdot T_0, \varphi \rangle &= \langle T_0, \varphi \circ \sigma^{-1} \rangle = \int_\Omega \varphi(\sigma^{-1}(y)) d_\Omega(y) \\ &= \int_\Omega \varphi(y) d_\Omega(\sigma(y)) = \int_\Omega \varphi(y) d_\Omega(y) = \langle T_0, \varphi \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\Omega))\end{aligned}$$

より $\sigma \cdot T_0 = T_0$ となるから，T は σ-不変である．■

注意 3.13.5 定理 3.13.4 の議論はもう少し一般的な状況に適用することができる．G は可算個のコンパクト集合の和集合として，X 上の l-sheaf $\mathcal{L}$ と群準同型写像

$$\theta : G \ni g \mapsto (\theta_g, \theta^\sharp_{g,V}) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L})$$

及び $\sigma = (\sigma, \sigma^\sharp_V) \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{L})$ があって

1) $(g, x) \mapsto g \cdot x = \theta(g)x$ により G は X に構成的に作用する，
2) $\theta(g) \circ \sigma = \sigma \circ \theta(g')$ なる全射 $G \ni g \mapsto g' \in G$ が存在する，
3) $\sigma^n \in \mathrm{Im}\,\theta$ for some $n > 0$
4) $\mathcal{L}_c(X)$ は $g \cdot s = \theta^\sharp_{g^{-1},X}(s)$ により C^∞-G-加群となる，
5) 任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{L}_x$ は $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ の自明な一次元表現である

として，G-軌道 $\Omega \subset X$ に対して $\sigma(\Omega) = \Omega$ と仮定する．$H = G_x$ $(x \in \Omega)$ とおいて，G-不変な $0 \neq T \in \mathcal{L}^*_c(\Omega)$ があったとすると，定理 3.13.4 と同様に Ω 上の G-不変かつ σ-不変な測度 $d_\Omega(x)$ が定数倍を除いて一意的に定まる．ここで $\mathcal{L}_x = \mathbf{1}_H$ だから $\mathcal{L}_x = \mathbb{C}$ と同一視すると，G-加群の同型

$$\mathcal{L}_c(\Omega) \ni s \tilde{\mapsto} \widetilde{f}_s = [g \cdot x \mapsto [g^{-1} \cdot s]] \in \mathcal{S}(\Omega)$$

が成り立つ．よって G-不変な $T_0 \in \mathcal{L}_c(\Omega)$ が

$$\langle T_0, s \rangle = \int_\Omega \widetilde{f}_s(x) d_\Omega(x) \qquad (s \in \mathcal{L}_c(\Omega))$$

により定義されて，$T = cT_0$ $(c \in \mathbb{C})$ となる．ここで次を仮定する；

仮定 任意の $s \in \mathcal{L}_c(\Omega)$ に対して $\widetilde{f}_{\sigma_\Omega^\sharp s} = \widetilde{f}_s \circ \sigma$.

すると

$$\begin{aligned}\langle \sigma \cdot T_0, s\rangle &= \langle T_0, \sigma_\Omega^{\sharp-1}(s)\rangle \\ &= \int_\Omega \widetilde{f}_s(\sigma^{-1}(x))d_\Omega(x) = \int_\Omega \widetilde{f}_s(x)d_\Omega(\sigma(x)) \\ &= \int_\Omega \widetilde{f}_s(x)d_\Omega(x) = \langle T_0, s\rangle \qquad (s \in \mathcal{L}_c(\Omega))\end{aligned}$$

となり，T_0 は σ-不変，従って T も σ-不変となる．

第4章　$GL_2(F)$ の表現

4.1　F 上の解析学

有限次拡大 $F/\mathbb{Q}_p$ $(p < \infty)$ をとり，$\mathrm{ord}_F : F^\times \to \mathbb{Z}$ を F の付値とする．

$$O_F = \{x \in F \mid \mathrm{ord}_F(x) \geq 0\}, \qquad \mathfrak{p} = \{x \in F \mid \mathrm{ord}_F(x) > 0\}$$

とおく．$q = |O_F/\mathfrak{p}|$ として $|x|_F = q^{-\mathrm{ord}_F(x)}$ $(x \in F^\times, |0|_F = 0)$ とおく．$\mathrm{ord}_F(\varpi) = 1$ なる $\varpi \in F$ を一つ固定しておく．

部分群 $L \subset F$ に対して，次は同値である；

1) $L \subset F$ はコンパクト開部分群，
2) $\mathfrak{p}^e \subset L \subset \mathfrak{p}^f$ なる $e \geq f$ がとれる，
3) $L \subset F$ は自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群で，F の $\mathbb{Q}_p$ 上の基底を含む．

加法群 F の非自明な連続ユニタリ指標 $1 \neq \tau \in \widehat{F}$ を一つ固定して

$$d = \mathrm{Max}\{d \in \mathbb{Z} \mid \tau(\mathfrak{p}^{-d}) = 1\}, \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{p}^{-d}$$

とおく．よって

$$\tau : F \to F/\mathfrak{f} \xrightarrow{(*)} \mathbb{C}^1$$

となり，コンパクト集合 $K \subset F$ に対して $\sharp\tau(K) < \infty$ である．F 上の局所定数かつコンパクト台の複素数値関数全体を $\mathcal{S}(F)$ とおいて，加法群 F 上の Haar 測度 dx は Fourier 逆変換が

$$\widehat{f}(y) = \int_F f(x)\tau(-xy)dx \ \Rightarrow\ f(x) = \int_F \widehat{f}(y)\tau(xy)dy \quad \forall f \in \mathcal{S}(F)$$

となるように定める．ここで $f \in \mathcal{S}(F)$ ならば $\widehat{f} \in \mathcal{S}(F)$ である．

[**証明**] $f \in \mathcal{S}(F)$ とすると，$\sharp f(F) < \infty$ で，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $f^{-1}(\lambda) \subset F$ は開コンパクト集合だから

$$f(F) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}, \qquad f^{-1}(\lambda_i) = \bigsqcup_{j=1}^{r}(a_j + \mathfrak{p}^{e_j})$$

となる．よって $a + \mathfrak{p}^{-e}$ $(a \in F, e \in \mathbb{Z})$ の特性関数を $\chi_{a,e}$ とすれば，それらが $\mathcal{S}(F)$ を $\mathbb{C}$ 上生成する．$f = \chi_{a,e} \in \mathcal{S}(F)$ に対して

$$\begin{aligned}\widehat{f}(y) &= \int_{p^{-e}} \tau(-(a+x)y)dx = \tau(-ay) \cdot \int_{\mathfrak{p}^{-e}} \tau(yx)dx \\ &= \tau(-ay) \times \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathfrak{p}^{-e}} dx & : y \in \mathfrak{f}\mathfrak{p}^{e}, \\ 0 & : y \notin \mathfrak{f}\mathfrak{p}^{e} \end{cases}\end{aligned}$$

より $\mathrm{supp}(\widehat{f}) = \mathfrak{f}\mathfrak{p}^e$ はコンパクトかつ $\sharp\widehat{f}(F) < \infty$ となるから，$\widehat{f} \in \mathcal{S}(F)$ である．■

乗法群 $F^\times$ の Haar 測度 $d^\times x$ を $\displaystyle\int_{O_F^\times} d^\times x = 1$ となるように定める．

命題 4.1.1 $\displaystyle\int_{O_F} dx = q^{-d/2}$ であり $d^\times x = q^{d/2}(1-q^{-1})^{-1}|x|_F^{-1}dx$ である．

[**証明**] $f \in \mathcal{S}(F)$ を $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^{-d}$ の特性関数とすると

$$\begin{aligned}\widehat{f}(y) &= \int_F f(x)\tau(-xy)dx = \int_{\mathfrak{p}^{-d}} \tau(-xy)dx \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathfrak{p}^{-d}} dx & : y \in O_F, \\ 0 & : y \notin O_F \end{cases}\end{aligned}$$

で

$$\int_{\mathfrak{p}^{-d}} dx = \int_{O_F} d(\varpi^{-d}x) = |\varpi^{-d}|_F \int_{O_F} dx = q^d \int_{O_F} dx.$$

一方,

$$f(x) = \int_F \widehat{f}(y)\tau(xy)dy = q^d \int_{O_F} dt \times \int_{O_F} \tau(xy)dy$$
$$= p^d \int_{O_F} dt \times \begin{cases} \int_{O_F} dy & : x \in \mathfrak{p}^{-d}, \\ 0 & : x \notin \mathfrak{p}^{-d} \end{cases} = q^d \left(\int_{O_F} dx\right)^2 \times f(x).$$

よって $\int_{O_F} dx = q^{-d/2}$. 又 $O_F \setminus \{0\} = \bigsqcup_{e=0}^{\infty} \varpi^e O_F^\times$ だから

$$q^{-d/2} = \int_{O_F} dx = \sum_{e=0}^{\infty} |\varpi^e|_F \int_{O_F^\times} dx$$
$$= \sum_{e=0}^{\infty} q^{-e} \int_{O_F^\times} dx = (1-q^{-1})^{-1} \int_{O_F^\times} dx.$$

よって $\int_{O_F^\times} dx = (1-q^{-1})q^{-d/2}$. 一方, $d^\times x = c \cdot |x|_F^{-1} dx$ とおいて

$$1 = \int_{O_F^\times} d^\times x = c \int_{O_F^\times} dx = c \cdot (1-q^{-1})q^{-d/2}$$

より $c = (1-q^{-1})^{-1}q^{d/2}$ となる. ■

乗法群 $O_F^\times$ の連続ユニタリ指標 $\nu \in \widehat{O_F^\times}$ と $a \in F^\times$ に対して

$$G_\tau(\nu, a) = G(\nu, a) = \int_{O_F^\times} \nu(t)\tau(at)d^\times t$$

を **Gauss 和**と呼ぶ.

定理 4.1.2 $\nu = 1$ のとき

$$G(\nu, a) = \begin{cases} 1 & : \mathrm{ord}_F(a) \geq -d (a \in \mathfrak{f} = \mathfrak{p}^{-d}), \\ -\left|(O_F/\mathfrak{p})^\times\right|^{-1} & : \mathrm{ord}_F(a) = -d-1, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(a) < -d-1. \end{cases}$$

$\nu \neq 1$ のとき，$f = \mathrm{Min}\{0 < f \in \mathbb{Z} \mid \nu(1+\mathfrak{p}^f) = 1\}$ とおくと

$$|G(\nu, a)| = \begin{cases} q^{f/2} \cdot \left|\left(O_F/\mathfrak{p}^f\right)^\times\right|^{-1} & : \mathrm{ord}_F(a) = -d-f, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(a) \neq -d-f. \end{cases}$$

[**証明**] $\nu = 1$ とする．$\mathrm{ord}_F(a) \geq -d$ のとき

$$G(1, a) = \int_{O_F^\times} \tau(at) d^\times t = \int_{O_F^\times} d^\times t = 1.$$

$\mathrm{ord}_F(a) = -d-1$ のとき

$$\tau(at(1+x)) = \tau(at + atx) = \tau(at) \text{ for } \forall x \in \mathfrak{p}$$

より

$$\begin{aligned} \int_{O_F^\times} \tau(at) d^\times t &= \sum_{t \in (O_F/\mathfrak{p})^\times} \int_{\mathfrak{p}} \tau(at(1+x)) q^{d/2} (1-q^{-1})^{-1} |1+x|_F^{-1} dx \\ &= \sum_{t \in (O_F/\mathfrak{p})^\times} \tau(at) \times q^{d/2} (1-q^{-1})^{-1} \int_{\mathfrak{p}} dx. \end{aligned}$$

ここで

$$O_F^\times/(1+\mathfrak{p}^e) \ni \dot{\varepsilon} \overset{\sim}{\mapsto} \dot{\varepsilon} \in (O_F/\mathfrak{p}^e)^\times \qquad 0 < \forall e \in \mathbb{Z}$$

に注意する．又

$$\sum_{t \in O_F/\mathfrak{p}} \tau(at) = 0, \qquad \therefore \sum_{t \in (O_F/\mathfrak{p})^\times} \tau(at) = -1,$$

$$\int_{\mathfrak{p}} dx = \int_{O_F} d(\varpi x) = |\varpi|_F \int_{O_F} dx = q^{-1} \cdot q^{-d/2}$$

より $G(1, a) = -q^{-1}(1-q^{-1})^{-1}$ となる．$\mathrm{ord}_F(a) < -d-1$ のとき，$\mathrm{ord}_F(a) = -d-e$ $(e \geq 2)$ として

$$O_F/\mathfrak{p} \ni \bar{t} \overset{\sim}{\mapsto} \overline{1 + \varpi^{e-1} t} \in (1+\mathfrak{p}^{e-1})/(1+\mathfrak{p}^e)$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\int_{O_F^\times}\tau(at)d^\times t &= \sum_{\dot t\in(O_F/\mathfrak{p}^e)^\times}\int_{\mathfrak{p}^e}\tau(at(1+x))q^{d/2}(1-q^{-1})^{-1}|1+x|_F^{-1}dx\\ &= \sum_{\dot t\in(O_F/\mathfrak{p}^e)^\times}\tau(at)q^{d/2}(1-q^{-1})^{-1}\int_{\mathfrak{p}^e}dx\\ &= \sum_{\dot t\in(O_F/\mathfrak{p}^{e-1})^\times}\sum_{\dot s\in O_F/\mathfrak{p}}\tau(at(1+\varpi^{e-1}s))q^{d/2}(1-q^{-1})^{-1}\int_{\mathfrak{p}^e}dx\\ &= \sum_{\dot t\in(O_F/\mathfrak{p}^{e-1})^\times}\tau(at)\sum_{\dot s\in O_F/\mathfrak{p}}\tau(at\varpi^{e-1}s)q^{d/2}(1-q^{-1})^{-1}\int_{\mathfrak{p}^e}dx.\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{\dot s\in O_F/\mathfrak{p}}\tau(at\varpi^{e-1}s)=0$ より $G(1,a)=0$ を得る．

$\nu\neq 1$ とする．$\mathrm{ord}_F(a)<-d-f$ のとき

$$I=\int_{\mathfrak{p}^f}\left(\int_{O_F^\times}\nu(t(1+x))\tau(at(1+x))d^\times t\right)dx=\int_{\mathfrak{p}^e}dx\times\int_{O_F^\times}\nu(t)\tau(at)d^\times t.$$

一方

$$I=\int_{O_F^\times}\nu(t)\tau(at)\left(\int_{\mathfrak{p}^f}\tau(atx)dx\right)d^\times t$$

で，任意の $t\in O_F^\times$ に対して $\tau(atc)\neq 1$ なる $c\in\mathfrak{p}^f$ があるから

$$\int_{\mathfrak{p}^f}\tau(atx)dx=\int_{\mathfrak{p}^f}\tau(at(x+c))dx=\tau(atc)\int_{\mathfrak{p}^f}\tau(atx)dx$$

より $\displaystyle\int_{\mathfrak{p}^f}\tau(atx)dx=0\ (\forall t\in O_F^\times)$ となる．$\mathrm{ord}_F(a)\geq -d-f$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{O_F^\times}\nu(t)\tau(at)d^\times t &= \sum_{\dot t\in(O_F/\mathfrak{p}^f)^\times}\int_{\mathfrak{p}^f}\nu(t(1+x))\tau(at(1+x))q^{d/2}(1-q^{-1})^{-1}dx\\ &= \sum_{\dot t\in(O_F/\mathfrak{p}^f)^\times}\nu(t)\tau(at)\cdot\int_{\mathfrak{p}^f}\tau(atx)dx\times q^{d/2}(1-q^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

で，任意の $t\in O_F^\times$ に対して

$$\int_{\mathfrak{p}^f}\tau(atx)dx=\int_{O_F}\tau(at\varpi^f x)d(\varphi^f x)=|\varpi^f|_F\int_{O_F}dx=q^{-f}\cdot q^{-d/2}$$

だから

$$\int_{O_F^\times} \nu(t)\tau(at)d^\times t = q^{-f}(1-q^{-1})^{-1} \sum_{\dot{t}\in(O_F/\mathfrak{p}^f)^\times} \nu(t)\tau(at)$$

である．そこで $c \in O_F$ に対して

$$\mathcal{G}(\nu, c) = \sum_{\dot{t}\in(O_F/\mathfrak{p}^f)^\times} \nu(t)\tau(\varpi^{-d-f}ct)$$

とおく．$c \in \mathfrak{p}$ ならば，$f = 1$ のとき

$$\mathcal{G}(\nu, c) = \sum_{\dot{t}\in(O_F/\mathfrak{p}^f)^\times} \nu(t) = 0,$$

$f > 1$ のとき，$\nu(1+s) \neq 1$ なる $s \in \mathfrak{p}^{f-1}$ があって，任意の $t \in O_F^\times$ に対して $\tau(\varpi^{-d-f}cts) = 1$ だから

$$\mathcal{G}(\nu, c) = \sum_{\dot{t}\in(O_F/\mathfrak{p}^f)^\times} \nu(t(1+s))\tau(\varpi^{-d-f}ct(1+s)) = \nu(1+s)\mathcal{G}(\nu, c)$$

となり，$\mathcal{G}(\nu, c) = 0$ を得る．一方，$c \in O_F^\times$ ならば $\mathcal{G}(\nu, c) = \nu(c^{-1})\mathcal{G}(\nu, 1)$ となるから

$$\sum_{\dot{c}\in O_F/\mathfrak{p}^f} |\mathcal{G}(\nu, c)|^2 = \sum_{\dot{c}\in(O_F/\mathfrak{p}^f)^\times} |\mathcal{G}(\nu, c)|^2 = \left|\left(O_F/\mathfrak{p}^f\right)^\times\right| \cdot |\mathcal{G}(\nu, 1)|^2.$$

一方，

$$\begin{aligned}\sum_{\dot{c}\in O_F/\mathfrak{p}^f} |\mathcal{G}(\nu, c)|^2 &= \sum_{\dot{c}\in O_F/\mathfrak{p}^f} \sum_{\dot{s},\dot{t}\in(O_F/\mathfrak{p}^f)^\times} \nu(st^{-1})\tau(\varpi^{-d-f}c(s-t)) \\ &= \left|O_F/\mathfrak{p}^f\right| \cdot \left|\left(O_F/\mathfrak{p}^f\right)^\times\right|.\end{aligned}$$

よって $c \in O_F^\times$ に対して $|\mathcal{G}(\nu, c)|^2 = |O_F/\mathfrak{p}^f| = q^f$ となり

$$|G(\nu, a)| = \begin{cases} q^{-f/2}(1-q^{-1})^{-1} & : \mathrm{ord}_F(a) = -d-f, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(a) > -d-f \end{cases}$$

となる．■

有限次元 F ベクトル空間 X は，F 上の基底を決めて F^n と同一視すると，完全非連結な局所コンパクト加法群である．よって $X^* = \mathrm{Hom}_F(X, F)$ も完全非連結な局所コンパクト加法群となり，$\alpha \mapsto \tau(\langle *, \alpha \rangle)$ により X の Pontryagin 双対 $\widehat{X}$ との位相群の同型 $X^* \tilde{\to} \widehat{X}$ が成り立つ．X と X^* 上の Haar 測度 $d_X(x), d_{X^*}(\alpha)$ を

$$\widehat{f}(\alpha) = \int_X f(x)\tau(-\langle x, \alpha \rangle) d_X(x) \ \Rightarrow\ f(x) = \int_{X^*} \widehat{f}(\alpha)\tau(\langle x, \alpha \rangle) d_{X^*}(\alpha)$$

$(\forall f \in \mathcal{S}(X))$ が成り立つように定めておく．

コンパクト開部分群 $N \subset X$ に対して

$$N^\perp = \{\alpha \in X^* \mid \tau_\alpha|_N = 1\}$$

とおくと，位相群の同型

$$X^*/N^\perp \tilde{\to} \widehat{N} \qquad (\dot{\alpha} \mapsto \tau_\alpha|_N),$$
$$N^\perp \tilde{\to} (X/N)\widehat{\ } \qquad (\alpha \mapsto [\dot{x} \mapsto \tau_\alpha(x)])$$

が成り立つから，$N^\perp \subset X^*$ はコンパクト開部分群となる．

命題 4.1.3 $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ は線形同型 $\mathcal{S}(X) \tilde{\to} \mathcal{S}(X^*)$ を与える．

[**証明**] 命題 1.2.3 より任意の $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ は $\varphi = \sum_i \lambda_i \chi_{N+v_i}$ ($N \subset X$: コンパクト開部分群, $v_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{C}$) とおける．任意の $v \in X$ に対して

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}_{N+v}(\alpha) &= \int_X \chi_{N+v}(x)\tau(-\langle x, \alpha \rangle) d_X(x) \\
&= \int_N \tau(-\langle x+v, \alpha \rangle) d_X(x) \\
&= \mathrm{vol}_X(N)\chi_{N^\perp}(\alpha) \cdot \tau(-\langle v, \alpha \rangle) \qquad (\alpha \in X^*)
\end{aligned}$$

となり，コンパクト開部分群 $M \subset N^\perp$ を十分小さくとれば $\tau(\langle v, \alpha \rangle) = 1$ for $\forall \alpha \in M$ とできるから，$N^\perp = \bigsqcup_j (M + \alpha_j)$ とおけば

$$\widehat{\chi}_{N+v} = \sum_j \tau(-\langle v, \alpha_j \rangle) \cdot \chi_{M+\alpha_j}$$

となる．よって $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(X^*)$ となる．■

$f \in C^\infty(X^*)$ に対して $\widehat{f} \in \mathcal{D}(X)$ を

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \int_{X^*} f(\alpha)\widehat{\varphi}(\alpha) d_{X^*}(\alpha) \qquad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(X))$$

とおくと，$v \in X$ に対して次は同値である；

1) $v \notin \mathrm{supp}(\widehat{f})$,
2) コンパクト開部分群 $N \subset X$ があって，$N^\perp \subset M$ なる任意のコンパクト開部分群 $M \subset X^*$ に対して $\widehat{f \cdot \chi_M} = 0$ on $v + N \subset X$.

[**証明**] $v \notin \mathrm{supp}(\widehat{f})$，即ち $[\widehat{f}] = 0$ in $\mathcal{D}_{X,v}$ は，開集合 $v \in V \subset X$ があって

$$\int_{X^*} f(\alpha)\widehat{\varphi}(\alpha) d_{X^*}(\alpha) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(X)_V$$

なることと同値，即ちコンパクト開部分群 $N \subset X$ によって $V = v + N$ とおけば，$\varphi \in \mathcal{S}(X)_{v+N}$ に対して $\psi(x) = \varphi(x+v)$ とおけば $\mathrm{supp}(\psi) = N$ で $\widehat{\psi}(\alpha) = \widehat{\varphi}(\alpha) \cdot \tau(\langle v, \alpha \rangle)$ だから

$$\int_{X^*} f(\alpha)\widehat{\psi}(\alpha) d_{X^*}(\alpha) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(X)_N$$

と同値である．よって開部分群 $M \subset N$ と $u \in N$ をとって $\psi = \chi_{M+u}$ とおけば

$$\widehat{\chi}_{M+u}(\alpha) = \mathrm{vol}_X(M) \cdot \chi_{M^\perp}(\alpha) \cdot \tau(-\langle u, \alpha \rangle) \qquad (\alpha \in X^*)$$

だから

$$\int_{M^\perp} f(\alpha)\tau(-\langle v+u, \alpha \rangle) d_{X^*}(\alpha) = 0$$

となる．■

$T \in \mathcal{D}_c(X)$ に対して $\check{T} \in \mathcal{D}(X^*)$ を

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle \qquad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(X^*))$$

($\check{\varphi}(x) = \int_{X^*} \varphi(\alpha)\tau(\langle x, \alpha\rangle) d_{X^*}(\alpha)$) により定義すると

$$\begin{aligned}\langle T, \check{\varphi}\rangle &= \int_X \left(\int_{X^*} \varphi(\alpha)\tau(\langle x, \alpha\rangle) d_{X^*}(\alpha)\right) dT(x) \\ &= \int_{X^*} \varphi(\alpha) \left(\int_X \tau(\langle x, \alpha\rangle) dT(x)\right) d_{X^*}(\alpha)\end{aligned}$$

より $\check{T} \in C^\infty(X^*)$ s.t. $\check{T}(\alpha) = \langle T, \tau_\alpha\rangle$ for $\forall \alpha \in X\ *)$ となる．このとき

$$\mathcal{D}_c(X) \ni T \mapsto \check{T} \in C^\infty(X^*)$$

は $\mathbb{C}$-代数の準同型写像（左辺は畳込み積，右辺は関数の値による積）となる．実際

$$\begin{aligned}(S * T)^\vee(\alpha) = \langle S * T, \tau_\alpha\rangle &= \int_{X\times X} \tau_\alpha(x+y) d(S\otimes T)(x, y) \\ &= \int_X \tau_\alpha(x) dS(x) \cdot \int_X \tau_\alpha(y) dT(y) = \check{S}(\alpha)\cdot\check{T}(\alpha).\end{aligned}$$

特に X-不変分布の部分代数 $\mathcal{H}(X) = \mathcal{S}(X) \subset \mathcal{D}_c(X)$ に関して

$$\mathcal{H}(X) = \mathcal{S}(X) \ni \varphi \mapsto \tilde{} \check{\varphi} \in \mathcal{S}(X^*)$$

は $\mathbb{C}$-代数の同型写像となる．特にコンパクト開部分群 $N \subset X$ に対して $\varepsilon_N = \mathrm{vol}_X(N)^{-1}\chi_N \in \mathcal{H}(X) = \mathcal{S}(X)$ に対して $\check{\varepsilon}_N = \chi_{N^\perp} \in \mathcal{S}(X^*)$ に注意する．すると C^∞-X-加群 E に対して E は $\mathcal{H}(X)\cdot E = E$ なる $\mathcal{H}(X)$-加群となり，上の同型により $\mathcal{S}(X^*)\cdot E = E$ なる $\mathcal{S}(X^*)$-加群となる．よって l-sheaf の一般論（1.3 節）から，E に付随する X^* 上の l-sheaf を $\mathcal{E}$ とする．このとき $\alpha \in X^*$ に対して

1) C^∞-X-加群 $\tau_\alpha^{-1} \otimes E$ 上の $\varphi \in \mathcal{H}(X) = \mathcal{S}(X)$ の作用は $\varphi\cdot(\mathbf{1}\otimes s) = (\varphi\cdot\tau_\alpha^{-1})\cdot s$ であり，$\psi \in \mathcal{S}(X^*)$ の作用は $\psi\cdot(\mathbf{1}\otimes s) = (\alpha\cdot\psi)\cdot s$ $(\alpha\cdot\psi)(\beta) = \psi(\beta-\alpha))$ である，
2) $E(X, \tau_\alpha) = E(\alpha)$，即ち $\mathcal{E}$ の stalk と E の Jacquet functor の同型

$$\mathcal{E}_\alpha \ni [(s_\beta)_{\beta\in V}] \mapsto \tilde{} \, s_\alpha \in E_{X,\tau_\alpha}$$

が成り立つ．

[**証明**] 1) $\forall\varphi \in \mathcal{H}(X) = \mathcal{S}(X)$ と $s \in E, s' \in E^\vee$ に対して

$$\langle \varphi \cdot (\mathbf{1} \otimes s), s' \rangle = \int_X \varphi(x)\tau_\alpha(x)^{-1}\langle x \cdot s, s' \rangle d_X(x)$$

より $\varphi \cdot (\mathbf{1} \otimes s) = (\varphi \cdot \tau_\alpha^{-1}) \cdot s$ である．一方

$$(\varphi \cdot \tau_\alpha^{-1})^\vee(\beta) = \int_X \varphi(x)\tau(-\langle x, \beta - \alpha \rangle)d_X(x) = \check{\varphi}(\beta - \alpha)$$

より $\psi \cdot (\mathbf{1} \otimes s) = (\alpha \cdot \psi) \cdot s$ for $\forall\psi \in \mathcal{S}(X^*)$ となる．

2) 11 頁の定義から

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \langle \varphi \cdot s \mid s \in E, \varphi \in \mathcal{S}(X^*) \text{ s.t. } \varphi(\alpha) = 0 \rangle \\ &= \{ s \in E \mid \psi \cdot s = 0 \text{ for some } \psi \in \mathcal{S}(X^*) \text{ s.t. } \psi(\alpha) = 0 \}. \end{aligned}$$

一方，命題 3.9.3 より

$$\begin{aligned} E(X, \mathbf{1}) &= \{ s \in E \mid \chi_N \cdot s = 0 \text{ for some } N \subset X\text{: コンパクト開部分群} \} \\ &= \{ s \in E \mid \chi_M \cdot s = 0 \text{ for some } M \subset X^*\text{: コンパクト開部分群} \}. \end{aligned}$$

ここで $\varphi \in \mathcal{S}(X^{ast})$ は $\varphi = \sum_i \lambda_i \chi_{M+\alpha_i}$ ($\lambda_i \in \mathbb{C}$, $M \subset X^*$:コンパクト開部分群，$\alpha_i \in X^*$) と書けることに注意すれば，$E(X, \mathbf{1}) = E(0)$ となる．よって

$$E(X, \tau_\alpha) = \left(\tau_\alpha^{-1} \otimes E\right)(X, \mathbf{1}) = (\tau_\alpha^{-1} \otimes E)(0) = E(\alpha)$$

となるから，$E_{X,\tau_\alpha} = E/E(\alpha)$ となる．■

4.2　$GL_2(F)$ の様子

以下，$G = GL_2(F), \Gamma = GL_2(O_F)$ とおく．G は局所コンパクト・ユニモジュラー群であり，Γ は G の開コンパクト部分群である．G 上の Haar 測度 $d_G(x)$ を $\displaystyle\int_\Gamma d_G(x) = 1$ となるように定める．$w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in G$ とおくと

$$w \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} w^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

である．

命題 4.2.1

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, b \in F \right\}, \qquad N' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, c \in F \right\}$$

とおくと $SL_2(F) = \langle N, N' \rangle = \langle N, w \rangle$.

[**証明**] まず

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+bc & -c^{-1} \\ c & 0 \end{bmatrix} \qquad (b \in F, c \in F^\times)$$

より

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & -c^{-1} \\ c & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in F, c \in F^\times \right\} \subset \langle N, N' \rangle.$$

又 $1 + bc \neq 0$ なる $b, c \in F$ に対して，$\beta = -b/(1+bc), \gamma = -c(1+bc)$ とおくと

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+bc & 0 \\ 0 & (1+bc)^{-1} \end{bmatrix}$$

となるから

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in F^\times \right\} \subset \langle N, N' \rangle.$$

よって $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(F)$ $(d \neq 0)$ に対して

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d^{-1}c & 1 \end{bmatrix}$$

となるから

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(F) \,\middle|\, d \neq 0 \right\} \subset \langle N, N' \rangle$$

となる．■

$w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in G$ とおき

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in F^\times, b \in F \right\}$$

とおくと，Bruhat 分解

$$G = F^\times B \sqcup NwF^\times B \tag{4.1}$$

が成り立つ．

4.3　$\mathcal{S}(F^\times)$ 上の B の表現

$F^\times$ 上の局所定数かつ台がコンパクトなる複素数値関数の全体 $\mathcal{S}(F^\times)$ の構造を調べておく．

$\varphi \in \mathcal{S}(F^\times)$ とすると，$\sharp\varphi(F^\times) < \infty$ かつ，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\varphi^{-1}(\lambda) \subset F^\times$ は開コンパクト集合だから

$$\varphi(F^\times) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}, \qquad \varphi^{-1}(\lambda_i) = \bigsqcup_{j=1}^{r} a_j(1 + \mathfrak{p}^{e_j})$$

と書ける．よって $1 + \mathfrak{p}^e$ $(0 < e \in \mathbb{Z})$ の特性関数を $\chi_e \in \mathcal{S}(F^\times)$ とおくと

$$\mathcal{S}(F^\times) = \langle a \cdot \chi_e \mid a \in F^\times, 0 < e \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{C}}$$

である．ここで $a \in F^\times, \varphi \in \mathcal{S}(F^\times)$ に対して $(a \cdot f)(x) = f(a^{-1}x)$ とおいて，$\mathcal{S}(F^\times)$ を C^∞-$F^\times$-加群とみるのである（$\chi_e \in \mathcal{S}(F^\times)$ は $1 + \mathfrak{p}^e$ の作用で不変だから，C^∞-加群である）．特に $(O_F^\times : 1 + \mathfrak{p}^e) < \infty$ だから，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(F^\times)$ は $O_F^\times$-finite である．よって直和分解

$$\mathcal{S}(F^\times) = \bigoplus_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \mathcal{S}_\nu(F^\times),$$

$$\mathcal{S}_\nu(F^\times) = \{\varphi \in \mathcal{S}(F^\times) \mid \varphi(\varepsilon x) = \nu(\varepsilon)\varphi(x)\ \forall \varepsilon \in O_F^\times\}$$

を得る．$\nu \in \widehat{O_F^\times}$ に対して射影 $P_\nu : \mathcal{S}(F^\times) \to \mathcal{S}_\nu(F^\times)$ は

$$(P_\nu\varphi)(x) = \int_{O_F^\times} \nu(t^{-1})\varphi(tx)d^\times t \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(F^\times))$$

である．$\varphi \in \mathcal{S}_\nu(F^\times)$ $(\nu \in \widehat{O_F^\times})$ に対して

$$\mathrm{supp}(\varphi) = \bigsqcup_{i=1}^{r} a_i O_F^\times \qquad (a_i \in F^\times)$$

とおけるから

$$\phi_\nu \in \mathcal{S}_\nu(F^\times) \text{ s.t. } \phi_\nu(x) = \begin{cases} \nu(x) & : x \in O_F^\times, \\ 0 & : x \notin O_F^\times \end{cases}$$

とおくと

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} \varphi(a_i)\cdot(a_i\cdot\phi_\nu), \qquad (a_i\cdot\phi_\nu)(x) = \begin{cases} \nu(a_i^{-1}x) & : x \in a_iO_F^\times, \\ 0 & : x \notin a_iO_F^\times \end{cases}$$

となるから，$\{a\cdot\phi_\nu \mid \dot{a} \in F^\times/O_F^\times\}$ が $\mathcal{S}_\nu(F^\times)$ の $\mathbb{C}$-上の基底である．

命題 4.3.1 $\varphi \in \mathcal{S}(F^\times)$ に対して

$$\varphi = \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \sum_{\dot{a} \in F^\times/O_F^\times} (a\cdot\phi_\nu)\cdot\int_{O_F^\times} \varphi(ax)\nu(x^{-1})d^\times x.$$

[**証明**] $\mathcal{S}(F^\times)$ 上の Hermite 内積が

$$(\varphi, \psi) = \int_{F^\times} \varphi(x)\overline{\psi(x)}d^\times x \qquad (\varphi, \psi \in \mathcal{S}(F^\times))$$

により定義される．この内積に関して，$\nu \neq \mu$ $(\nu, \mu \in \widehat{O_F^\times})$ ならば $\mathcal{S}_\nu(F^\times) \perp \mathcal{S}_\mu(F^\times)$ であり，$\dot{a} \neq \dot{b}$ $(\dot{a}, \dot{b} \in F^\times/O_F^\times)$ ならば

$$\mathrm{supp}(a\cdot\phi_\nu) = a\cdot O_F^\times, \qquad \mathrm{supp}(b\cdot\phi_\nu) = b\cdot O_F^\times,$$

だから $(a\cdot\phi_\nu, b\cdot\phi_\nu)=0$ となる．よって $\varphi\in\mathcal{S}(F^\times)$ に対して

$$\varphi=\sum_{\nu\in\widehat{O_F^\times}}\sum_{\dot{a}\in F^\times/O_F^\times}\lambda_{\nu,a}a\cdot\phi_\nu \qquad (\lambda_{\nu,a}\in\mathbb{C})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\lambda_{\nu,a}=(\varphi,a\cdot\phi_\nu)&=\int_{F^\times}\varphi(x)\overline{\phi_\nu(a^{-1}x)}d^\times x\\ &=\int_{F^\times}\varphi(ax)\overline{\phi_\nu(x)}d^\times x=\int_{O_F^\times}\varphi(ax)\nu(x^{-1})d^\times x.\end{aligned}$$

■

$$g=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in B \text{ と } \varphi\in C^\infty(F^\times) \text{ に対して}$$

$$(g\cdot\varphi)(x)=\tau(bx)\cdot\varphi(ax) \qquad (x\in F^\times)$$

とおくと，十分大きな $0<\in\mathbb{Z}$ に対して $\tau(bx\varepsilon)=\tau(ax)$ $(\forall\varepsilon\in 1+\mathfrak{p}^e)$ だから $g\cdot\varphi\in C^\infty(F^\times)$ となって，$(g,\varphi)\mapsto g\cdot\varphi$ により $C^\infty(F^\times)$ は B-加群となる．$\mathrm{supp}(g\cdot\varphi)=a\cdot\mathrm{supp}(\varphi)$ である．よって $\varphi\in\mathcal{S}(F^\times)$ ならば $g\cdot\varphi\in\mathcal{S}(F^\times)$ であるが，上で与えた $\mathcal{S}(F^\times)$ の生成元を見れば，十分大きな $0<e\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\varphi=\varphi \text{ for } \forall a\in 1+\mathfrak{p}^e, b\in\mathfrak{p}^e$$

となるから，$\mathcal{S}(F^\times)$ は C^∞-B-加群となる．このとき

定理 4.3.2 B-加群 $\mathcal{S}(F^\times)$ は単純である．

[**証明**] $0\neq\mathcal{H}\subset\mathcal{S}(F^\times)$ を B-不変な部分空間とする．

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{\nu\in\widehat{O_F^\times}}\mathcal{H}_\nu, \qquad (\mathcal{H}_\nu=P_\nu\mathcal{H})$$

である．$\nu\in\widehat{O_F^\times}$ とする．$\mathcal{H}_\mu\neq 0$ なる $\nu\neq\mu\in\widehat{O_F^\times}$ がある，実際 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_\nu\ni\varphi\neq 0$ とすると，$\psi=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\varphi\in\mathcal{H}_\nu$ で $\psi(x)=\tau(x)\varphi(x)$ $(x\in F^\times)$

だから，任意の $\varepsilon \in O_F^\times$ に対して $\psi(\varepsilon x) = \nu(\varepsilon)\psi(x), \varphi(\varepsilon x) = \nu(\varepsilon)\varphi(x)$ より $\tau(x\varepsilon) = \tau(x)$ となるが，これは $\varepsilon = 1$ に限るから矛盾である．そこで $\varphi(1) \neq 0$ なる $0 \neq \varphi \in \mathcal{H}_\mu$ をとる（$a \in F^\times$ に対して $\varphi(a) \neq 0$ ならば $\varphi' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \varphi \in \mathcal{H}_\mu$ で $\varphi'(1) = \varphi(a) \neq 0$）．$b \in F^\times$ に対して

$$\begin{aligned}
\psi(x) = P_\nu\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \varphi\right)(x) &= \int_{O_F^\times} \nu(t^{-1})(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \varphi)(tx)d^\times t \\
&= \int_{O_F^\times} \nu(t^{-1})\tau(btx)\varphi(xt)d^\times t = \int_{O_F^\times} (\nu^{-1}\mu)(t)\tau(bxt)d^\times t \times \varphi(x) \\
&= G(\nu^{-1}\mu, bx) \cdot \varphi(x)
\end{aligned}$$

である．よって $\mathrm{ord}_F(b) = -d-f$ ($f = \mathrm{Min}\{0 < f \in \mathbb{Z} \mid (\nu^{-1}\mu)(1+\mathfrak{p}^f) = 1\}$) とおくと $0 \neq \psi \in \mathcal{H}_\nu$ で

$$\mathrm{supp}(\psi) \subset O_F^\times, \qquad \psi(\varepsilon) = \nu(\varepsilon) \cdot G(\nu^{-1}\mu, b) \cdot \varphi(1) \quad (\varepsilon \in O_F^\times)$$

となるから，$\phi_\nu \in \mathcal{H}_\nu$ である．よって任意の $a \in F^\times$ に対して $a \cdot \phi_\nu = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \phi_\nu \in \mathcal{H}_\nu \subset \mathcal{H}$ となる．よって $\mathcal{H} = \mathcal{S}(F^\times)$ となる．■

4.4 Kirillov モデル

(π, E) を G の無限次元既約 C^∞-表現とする．即ち，$\pi : G \to GL_{\mathbb{C}}(E)$ は群準同型写像で，任意の $v \in E$ に対して $[x \mapsto \pi(x)v] \in C^\infty(G, E)$ である．Schur の補題（定理 3.3.1）より

$$\pi(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}) = \chi_\pi(a) \text{ for } \forall a \in F^\times$$

なる C^∞-群準同型写像 $\chi_\pi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ がとれる．これを π の**中心指標**と呼ぶ．N の連続ユニタリ指標 $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \tau(b)$ を同じく τ で表すと，命題 3.9.3

より

$$\begin{aligned} E(N,\tau) &= \left\langle \pi(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v - \tau(b)v \;\middle|\; b \in F, v \in E \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left\{ v \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \mathfrak{a} \subset F : \text{open compact subgroup} \\ \text{s.t. } \displaystyle\int_{\mathfrak{a}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ v \in E \;\middle|\; \int_{\mathfrak{p}^{-e}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx = 0 \text{ for } \forall e \gg 0 \right\} \end{aligned}$$

とおく（$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}^{-e}$ ならば $\mathfrak{p}^{-e} = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{r}(b_i + \mathfrak{a})$ とおけて

$$\begin{aligned} &\int_{\mathfrak{p}^{-e}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx = \sum_{i=1}^{r}\int_{\mathfrak{a}} \tau(-x-b_i)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x+b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx \\ &= \sum_{i=1}^{r} \tau(-b_i)\pi(\begin{bmatrix} 1 & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \int_{\mathfrak{p}^{-e}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx \end{aligned}$$

となるから，第二，第三の表示が同値となる）．ここで

$$\begin{aligned} N_{G,\tau}(N) &= \{ g \in G \mid gNg^{-1} = N, \tau(gng^{-1}) = \tau(n) \text{ for } \forall n \in N \} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in F^{\times}, b \in F \right\} \end{aligned}$$

だから

$$X = E_{N,\tau} = E/E(N,\tau) : C^{\infty}\text{-}F^{\times}N\text{-加群}$$

とおく.

補題 4.4.1 任意の $b \in F$ に対して $\pi(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = v$ なる $v \in E$ は $v = 0$ に限る.

[**証明**] $G_v = \{g \in G \mid \pi(g)v = v\}$ は G の開部分群で N を含む．$\exists \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_v$ s.t. $c \neq 0$ だから

$$\begin{aligned} G_v \ni \begin{bmatrix} 1 & -ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -dc^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & b-adc^{-1} \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -dc^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b-adc^{-1} \\ c & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって $\exists w = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in G_v$ $(b, c \in F^\times)$ となり

$$G_v \ni w \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} (-bc)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ cb^{-1}\beta & 1 \end{bmatrix}$$

より $N' \subset G_v$．よって $SL_2(F) = \langle N, N' \rangle \subset G_v$ となる．一方，十分大きな $0 < e \in \mathbb{Z}$ に対して $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in 1 + \mathfrak{p}^e \right\} \subset G_v$ だから

$$\begin{aligned} G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in F^\times \right\} \ltimes SL_2(F) &\supset F^\times G_v \\ &\supset \left\{ \begin{bmatrix} a^2\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in F^\times \\ \varepsilon \in 1 + \mathfrak{p}^e \end{array} \right\} \ltimes SL_2(F) \end{aligned}$$

で $(O_F^\times : 1 + \mathfrak{p}^e) < \infty$ かつ

$$\mathbb{Z} \times O_F^\times \ni (n, \varepsilon) \overset{\sim}{\mapsto} \varpi^n \varepsilon \in F^\times, \quad 2\mathbb{Z} \times (O_F^\times)^2 \ni (n, \varepsilon) \overset{\sim}{\mapsto} \varpi^n \varepsilon \in (F^\times)^2$$

より $(G : F^\times G_v) < \infty$ となる．よって $\dim_{\mathbb{C}} \langle \pi(g)v \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}} < \infty$ である．ここで $v \neq 0$ とすると，$E = \langle \pi(g)v \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}}$ となり $\dim_{\mathbb{C}} E < \infty$ となって矛盾する．■

$v \in E$ に対して

$$\varphi_v : F^\times \ni t \mapsto \overline{\pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v} \in X = E/E(N, \tau) : C^\infty\text{-関数}$$

とおくと

補題 4.4.2 複素線形写像 $E \to C^\infty(F^\times, X)$ $(v \mapsto \varphi_v)$ は単射である．

[**証明**] $v \in E$ に対して $\varphi_v = 0$ とする．即ち $\pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v \in E(N,\tau)$ for $\forall t \in F^\times$ とすると，任意の $t \in F^\times$ に対して $e_t \in \mathbb{Z}$ が定まって $\forall e \geq e_t$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{p}^{-e}} \tau(x)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx = 0 \\
=&\int_{\mathfrak{p}^{-e}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t^{-1}x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx \\
=&|t|_F\pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\int_{t^{-1}\mathfrak{p}^{-e}} \tau(-tx)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx.
\end{aligned}
$$

よって $n_t \in \mathbb{Z}$ が定まって，$\forall n \geq n_t$ に対して

$$
\int_{\mathfrak{p}^{-n}} \tau(-tx)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx = 0
$$

となる．そこで

$$
f(x) = \pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v \quad (x \in F), \qquad f_n(t) = \int_{\mathfrak{p}^{-n}} \tau(-tx)f(x)dx \quad (t \in F^\times)
$$

とおく．十分大きな $0 < e \in \mathbb{Z}$ をとれば任意の $\varepsilon \in U = 1 + \mathfrak{p}^e$ に対して $\pi(\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = v$ となるから

$$
\begin{aligned}
f_n(t\varepsilon) &= \int_{\mathfrak{p}^{-n}} \tau(-t\varepsilon x)f(x)dx \\
&= \int_{\mathfrak{p}^{-n}} \tau(-tx)f(\varepsilon^{-1}x)dx = \pi(\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})f_n(x)
\end{aligned}
$$

となる．よってコンパクト集合 $K \subset F^\times$ に対して，$K \subset \bigcup_{i=1}^{r} t_iU$ とすると，$\forall n \geq \mathrm{Max}\{n_{t_1}, \cdots, n_{t_r}\}$ に対して $f_n(t) = 0$ for $\forall t \in F^\times$ となる．さて，イ

デアル $\mathfrak{a} \subset F$ をとって $\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = v$ for $\forall x \in \mathfrak{a}$ とできるから

$$f(x+b) = f(x) \text{ for } \forall b \in \mathfrak{a}, x \in F \tag{4.2}$$

である．任意のイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset F$ をとると $(\mathfrak{b}^{-1} \subset \mathfrak{a}^{-1})$ $\mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1} \setminus \mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1} \subset F^{\times}$ はコンパクト集合だから，$n \in \mathbb{Z}$ を十分大きくとって $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}^{-n}$ かつ

$$\int_{\mathfrak{p}^{-n}} \tau(-tx)f(x)dx = 0 \text{ for } \forall t \in \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1} \setminus \mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1} \tag{4.3}$$

となる．ここで位相群の同型 $F \xrightarrow{\sim} \widehat{F}$ が $a \mapsto \tau_a = [x \mapsto \tau(ax)]$ により与えられて，$\tau_a|_{\mathfrak{p}^{-n}} = 1$ は $a \in \mathfrak{f}\mathfrak{p}^n$ と同値だから

$$F/\mathfrak{f}\mathfrak{p}^n \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{p}^{-n}} \qquad (\dot{a} \mapsto \tau_a|_{\mathfrak{p}^{-n}})$$

となるから

$$f(x) = \sum_{\dot{a} \in F/\mathfrak{f}\mathfrak{p}^n} \tau(ax) \int_{\mathfrak{p}^{-n}} f(y)\tau(-ay)dy$$

となる．よって任意の $b \in \mathfrak{b}, x \in F$ に対して $f(x+b) = f(x)$ となる必要十分条件は

$$\int_{\mathfrak{p}^{-n}} f(y)\tau(-ay)dy = 0 \text{ if } a\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{f} \text{ (i.e. } a \notin \mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1})$$

なることである．ここで(4.2) より

$$\int_{\mathfrak{p}^{-n}} f(y)\tau(-ay)dy = 0 \text{ if } a \notin \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$$

だから，(4.3) と合わせると，任意の $b \in \mathfrak{b}, x \in F$ に対して $f(x+b) = f(x)$ となり

$$\pi(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = f(b) = f(0) = v$$

となる．よって任意の $x \in F$ に対して $\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = v$ となるから，補題 4.4.1 より $v = 0$ を得る．■

これにより $v \in E$ と $\varphi_v \in C^{\infty}(F^{\times}, X)$ を同一視して $E \hookrightarrow C^{\infty}(F^{\times}, X)$ とみなす.

補題 4.4.3 $\varphi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times, X)$ に対して

1) $\left(\pi(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\varphi\right)(t) = \tau(bt)\varphi(at)$ $(a \in F^\times, b \in F)$,

2) $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$ なるコンパクト集合 $K \subset F$ がとれる．

[**証明**] 1) $u = \pi(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v \in E$ とおくと

$$\begin{aligned}
\varphi_u(t) &= \pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v \pmod{E(N,\tau)} \\
&= \pi(\begin{bmatrix} 1 & tb \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v \pmod{E(N,\tau)} \\
&= \tau(tb)\cdot\pi(\begin{bmatrix} at & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v \pmod{E(N,\tau)} = \tau(bt)\varphi(at).
\end{aligned}$$

2) 任意の $b \in \mathfrak{a}$ に対して $\pi(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = v$ なるイデアル $\mathfrak{a} \subset F$ がとれる．1) より任意の $b \in \mathfrak{a}, t \in F^\times$ に対して $\tau(bt)\varphi(t) = \varphi(t)$ となる．よって $t \notin \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$ ならば，$\tau(bt) \neq 1$ なる $b \in \mathfrak{a}$ がとれて，$\varphi(t) = 0$ となる．よって $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$. ■

$\mathcal{S}(F^\times, X) = \mathcal{S}(F^\times)\otimes_{\mathbb{C}} X$ は

$$(g\cdot\varphi)(t) = \tau(bt)\cdot\varphi(at) \text{ for } g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in B, \varphi \in \mathcal{S}(F^\times, X)$$

により C^∞-B-加群となる（112 頁）.

補題 4.4.4

$$\mathcal{S}(F^\times, X) = \left\{ \varphi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times, X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists r > 0 \text{ s.t.} \\ \varphi(t) = 0 \,\text{for } \forall t \in F^\times \text{ s.t. } |t|_F < r \end{array} \right\}.$$

[**証明**] $\mathcal{S}(F^\times) = \bigoplus_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \mathcal{S}_\nu(F^\times)$ （110 頁）より

$$\mathcal{S}(F^\times, X) = \bigoplus_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \mathcal{S}_\nu(F^\times, X), \qquad \mathcal{S}_\nu(F^\times, X) = \mathcal{S}_\nu(F^\times) \otimes_{\mathbb{C}} X$$

である．又，補題 4.4.3 の 2) より

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{ \varphi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times, X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists r > 0 \text{ s.t.} \\ \varphi(t) = 0 \,\text{for}\; \forall t \in F^\times \text{ s.t. } |t|_F < r \end{array} \right\} \\ &\subset \mathcal{S}(F^\times, X) = \mathcal{S}(F^\times) \otimes_{\mathbb{C}} X \end{aligned}$$

は B-部分加群である．従って $v \in X$ に対して

$$\mathcal{S}(F^\times)_v = \{\varphi \in \mathcal{S}(F^\times) \mid \varphi \otimes v \in E_0\}$$

は $\mathcal{S}(F^\times)$ の B-部分加群となるから，$\mathcal{S}(F^\times)_v \neq 0$ を示せば，定理 4.3.2 より $\mathcal{S}(F^\times) \otimes v \subset E_0$ を得る．ここで $\nu \in \widehat{O_F^\times}$ に対して

$$E_{0,\nu} = \{\varphi \in E_0 \subset \mathcal{S}(F^\times, X) \mid \pi(\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\varphi = \nu(\varepsilon)\varphi \,\text{for}\; \forall \varepsilon \in O_F^\times\}$$

とおくと $E_0 = \bigoplus_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} E_{0,\nu}$ である．一方 $v \in E$ に対して

$$\varphi_v(1) = \dot{v} \in X = E/E(N, \tau)$$

だから

$$X = \{\varphi(1) \mid \varphi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times, X)\}$$

であるが，$\varphi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times, X)$ に対して $\psi = \varphi - \pi(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\varphi \in E_0$ である，実際 $\psi(t) = (1 - \tau(bt))\varphi(t)$ だから $t \in F^\times$ が 0 に十分近ければ $\tau(bt) = 1$ となり $\psi(t) = 0$ となる．このとき $\psi(1) = (1 - \tau(b))\varphi(1)$ だから

$$X = \{\varphi(1) \mid \varphi \in E_0 \subset \mathcal{S}(F^\times, X)\} = \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \{\varphi(1) \mid \varphi \in E_{0,\nu} \subset \mathcal{S}_\nu(F^\times, X)\}$$

となる．そこで $0 \neq \varphi \in E_{0,\nu}$ $(\nu \in \widehat{O_F^\times})$ に対して $v = \varphi(1) \in X$ として $\mathcal{S}(F^\times)_v \neq 0$ を示す．そのために $\nu \neq \mu \in \widehat{O_F^\times}$ として

$$\psi = P_\mu \left(\pi(\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix})\varphi\right) \in E_{0,\mu} \qquad (b \in F^\times)$$

とおく．ここで

$$(P_\mu(f))(x) = \int_{O_F^\times} \mu(t^{-1}) f(tx) d^\times t \qquad (x \in F^\times)$$

で $\psi(x) = G(\mu^{-1}\nu, bx)\varphi(x)$ $(x \in F^\times)$ となる（113 頁）．よって $b \in F^\times$ を

$$\mathrm{ord}_F(b) = -d - f \qquad (f = \mathrm{Min}\{0 < f \in \mathbb{Z} \mid (\mu^{-1}\nu)(1+\mathfrak{p}^f) = 1\})$$

と取れば，$0 \neq \psi \in E_{0,\mu}$ で $\mathrm{supp}(\psi) \subset O_F^\times$ かつ

$$\psi(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)\psi(1) = \mu(\varepsilon) \cdot G(\mu^{-1}\nu, b) \cdot v \qquad (\varepsilon \in O_F^\times)$$

となるから，$\phi_\mu \otimes v = \mathrm{const} \times \psi \in E_{0,\mu}$，従って $\phi_\mu \in \mathcal{S}(F^\times)_v$ となり $\mathcal{S}(F^\times)_v \neq 0$ を得る．■

命題 4.4.5 $E = \mathcal{S}(F^\times, X) + \pi(w)\mathcal{S}(F^\times, X)$ $(w = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix})$.

[**証明**] $G = F^\times B \sqcup NwF^\times B$ だから，$\mathcal{S}(F^\times, X) = E_0 \subset E$ （補題 4.4.4）より

$$E = \langle G \cdot \mathcal{S}(F^\times, X)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathcal{S}(F^\times, X), Nw \cdot \mathcal{S}(F^\times, X)\rangle_{\mathbb{C}}.$$

ここで任意の $\varphi \in E_0 = \mathcal{S}(F^\times, X)$ に対して

$$w \cdot \varphi - (\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix} w)\varphi \in E_0 = \mathcal{S}(F^\times, X)$$

だから（補題 4.4.4 の証明参照）上の通り．■

$t \in F^\times, \nu \in \widehat{O_F^\times}$ に対して $J_\pi(t,\nu) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$ を

$$\begin{aligned}
J_\pi(t,\nu)v &= \chi_\pi(t)^{-1}\left(\pi(w)(\phi_\nu \otimes v)\right)(t) \quad (w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}) \\
&= \left(\pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix} w)(\phi_\nu \otimes v)\right)(1) \quad (\chi_\pi(t) = \pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix})) \\
&= \left(\pi(w \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})(\phi_\nu \otimes v)\right)(1) \in X \quad \text{for } v \in X
\end{aligned}$$

により定義する．よって

$$J_\pi(t\varepsilon,\nu) = \nu(\varepsilon^{-1}) \cdot J_\pi(t,\nu) \text{ for } \forall \varepsilon \in O_F^\times$$

である．

補題 4.4.6 $\varphi \in E_0 = \mathcal{S}(F^\times, X)$ に対して

$$(\pi(w)\varphi)(t) = \chi_\pi(t) \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} J_\pi(tx,\nu)\varphi(x) d^\times x.$$

[**証明**] $\varphi \in \mathcal{S}(F^\times), v \in X$ として

$$\varphi \otimes v = \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \sum_{\dot{a} \in F^\times/O_F^\times} (a \cdot \phi_\nu \otimes) \cdot \int_{O_F^\times} \varphi(ax)\nu(x^{-1}) d^\times x$$

で

$$\begin{aligned}
\left(\pi(w)(\phi_\nu \otimes v)\right)(t) &= \left(\pi(w \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})(\phi_\nu \otimes v)\right)(t) \\
&= \left(\pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} w)(\phi_\nu \otimes v)\right)(t) \\
&= \chi_\pi(a^{-1})\left(\pi(w)(\phi_\nu \otimes v)\right)(at) \\
&= \chi_\pi(t) \cdot J_\pi(at,\nu)v
\end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
&(\pi(w)(\varphi\otimes v))(t)\\
=&\sum_{\nu\in\widehat{O_F^\times}}\sum_{\dot a\in F^\times/O_F^\times}\chi_\pi(t)J_\pi(at,\nu)v\cdot\int_{O_F^\times}\varphi(ax)\nu(x^{-1})d^\times x\\
=&\chi_\pi(t)\sum_{\nu\in\widehat{O_F^\times}}\sum_{\dot a\in F^\times/O_F^\times}\int_{O_F^\times}\varphi(ax)J_\pi(axt,\nu)vd^\times x\\
=&\chi_\pi(t)\sum_{\nu\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times}\varphi(x)J_\pi(xt,\nu)vd^\times x.
\end{aligned}
$$

■

補題 4.4.7 任意の $s,t\in F^\times,\mu,\nu\in\widehat{O_F^\times}$ に対して $[J_\pi(s,\mu),J_\pi(t,\nu)]=0$.

[**証明**] $b\in F^\times$ に対して

$$
\begin{aligned}
b^{-1}\begin{bmatrix}1&-b^{-1}\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b^2&-b\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b^{-1}&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b&-1\\0&b^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-b&1\end{bmatrix}\\
=w\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}w^{-1}
\end{aligned}
$$

より $n(b)=\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}$ として

$$
\begin{aligned}
\varphi_b&=\chi_\pi(b^{-1})\cdot\pi\left(n(-b^{-1}w\begin{bmatrix}b^2&-b\\0&1\end{bmatrix}\right)\varphi\\
&=\pi(wn(b)w^{-1})\varphi
\end{aligned}
$$

とおく．第一の等式から

$$
\begin{aligned}
&\varphi_b(t)\\
=&\chi_\pi(tb^{-1})\tau(-b^{-1}t)\sum_{\nu\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times}\tau(-bx)J_\pi(tx,\nu)\varphi(b^2x)d^\times x\\
=&\chi_\pi(tb^{-1})\tau(-b^{-1}t)\int_{F^\times}\tau(-b^{-1}x)J_\pi(tb^{-2}x,\nu)\varphi(x)d^\times x
\end{aligned}
$$

である．一方，第二の等式を

$$
\begin{aligned}
\varphi_b &= \pi(w)\left(\pi(n(b)\pi(w^{-1})\varphi - \pi(w^{-1})\varphi\right) + \varphi \\
&= \chi_\pi(-1)\pi(w)\left(\pi(n(b)w)\varphi - \pi(w)\varphi\right) + \varphi
\end{aligned}
$$

とおくと，$\pi(n(b)w)\varphi - \pi(w)\varphi \in \mathcal{S}(F^\times, X)$ だから（119 頁参照）

$$
\begin{aligned}
&\varphi_b(t) \\
&= \varphi(t) + \chi_\pi(-t) \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} J_\pi(tx,\nu)(\pi(n(b)w)\varphi - \pi(w)\varphi)(x) d^\times x \\
&= \varphi(t) + \chi_\pi(-t) \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} J_\pi(tx,\nu)(\tau(bx) - 1) \\
&\qquad\qquad \left(\chi_\pi(x) \sum_{\mu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} J_\pi(xs,\mu)\varphi(s) d^\times s\right) d^\times x \\
&= \varphi(t) + \chi_\pi(-t) \sum_{\nu,\mu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} d^\times x \int_{F^\times} d^\times s \\
&\qquad\qquad (\tau(bx) - 1)\chi_\pi(x) J_\pi(tx,\nu) \circ J_\pi(xs,\mu)\varphi(s)
\end{aligned}
$$

となる．これらから，$b, c \in F^\times$ に対して $\varphi_b - \varphi_c$ を二通りに書けば

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu, \min \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} d^\times x \int_{F^\times} d^\times s (\tau(bx) - \tau(cx))\chi_\pi(x) J_\pi(tx,\nu) \circ J_\pi(xs,\mu)\varphi(s) \\
&= \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} \begin{pmatrix} \chi_\pi(-b^{-1})\tau(-b^{-1}(t+x)) J_\pi(b^{-2}tx,\nu) \\ -\chi_\pi(-c^{-1})\tau(-c^{-1}(t+x)) J_\pi(c^{-2}tx,\mu) \end{pmatrix} \varphi(x) d^\times x
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\varphi \in \mathcal{S}(F^\times, X)$ として $\varphi \otimes v$ $(\varphi \in \mathcal{S}(F^\times), v \in X)$ をとって，任意の $\psi \in \mathcal{S}(F^\times)$ に対して

$$\sum_{\nu,\mu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} d^\times t \int_{F^\times} d^\times x \int_{F^\times} d^\times s$$

$$\psi(t)\varphi(s)(\tau(bx) - \tau(cx))\chi_\pi(x) J_\pi(tx,\nu) \circ J_\pi(sx,\mu)v$$

$$= \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} d^\times t \int_{F^\times} d^\times x \psi(t)\varphi(x) \begin{pmatrix} \chi_\pi(-b^{-1})\tau(-b^{-1}(t+x))J_\pi(b^{-2}tx,\nu) \\ -\chi_\pi(-c^{-1})\tau(-c^{-1}(t+x))J_\pi(c^{-2}tx,\mu) \end{pmatrix} v$$

$$= \sum_{\nu,\mu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} d^\times t \int_{F^\times} d^\times x \int_{F^\times} d^\times s$$

$$\psi(t)\varphi(s)(\tau(bx) - \tau(cx))\chi_\pi(x) J_\pi(sx,\mu) \circ J_\pi(tx,\nu)v$$

となる．よって任意の $s, t \in F^\times, v \in X$ に対して

$$f(x) = |x|_F^{-1} \chi_\pi \left(J_\pi(tx,\nu) \circ J_\pi(sx,\mu) - J_\pi(sx,\mu) \circ J_\pi(tx,\nu) \right) v \quad (x \in F^\times)$$

とおくと

$$\int_{F^\times} (\tau(bx) - \tau(cx)) f(x) dx = 0 \text{ for } \forall b, c \in F^\times$$

となる．ここで $f \in C^\infty(F^\times, X)$ で $\mathrm{supp}(f) \subset K$ なるコンパクト集合 $K \subset F$ がある（補題 4.4.3）．任意のイデアル $\mathfrak{a} \subset F$ に対して

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & : x \notin \mathfrak{a}, \\ 0 & : x \in \mathfrak{a} \end{cases}$$

とおくと，$f' \in \mathcal{S}(F^\times, X)$ で，$b - c \in \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$ なる $b, c \in F^\times$ に対して

$$\tau(bx) - \tau(cx) = \tau(cx)(\tau((b-c)x) - 1) = 0 \text{ for } \forall x \in \mathfrak{a}$$

だから

$$\int_F (\tau(bx) - \tau(cx)) f'(x) dx = \int_{F^\times} (\tau(bx) - \tau(cx)) f(x) dx = 0$$

となる．即ち $\widehat{f'}(b) = \widehat{f'}(c)$ となる．よって $y \notin \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$ ならば $\widehat{f'}(y+d) = \widehat{f'}(y)$ for $\forall d \in \mathfrak{f}\mathfrak{a}^{-1}$ である．よって補題 4.4.2 で用いた議論を $\widehat{f'}$ に用いれば，

$f(x) = f'(x) = 0$ for $\forall x \notin \mathfrak{a}$ となる．よって $f(x) = 0$ for $\forall x \in F^\times$ となり，特に

$$0 = f(1) = (J_\pi(t,\nu) \circ J_\pi(s,\mu) - J_\pi(s,\mu) \circ J_\pi(t,\nu))v$$

となる．■

命題 4.4.8 $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ $(X = E_{N,\tau} = E/E(N,\tau))$

[**証明**] $X = 0$，即ち $E = E(N,\tau)$ とすると，任意の $v \in E, b \in F$ に対して

$$\pi(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = \tau(b)v$$

となる．そこで $0 \neq v \in E$ をとって

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \dot{a} \in F^\times/(F^\times)^2 \right\} \cdot SL_2(F) \qquad SL_2(F) = \langle N, w \rangle$$

に注意すると

$$\begin{aligned} E &= \langle \pi(g)v \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left\langle \pi(\begin{bmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v, \pi(\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v, \pi(w)v \middle| \varepsilon \in O_F^\times \right\rangle_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

となる．ここで十分大きな $0 < e \in \mathbb{Z}$ をとれば $\pi(\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = v$ for $\forall \varepsilon \in 1+\mathfrak{p}^e$ だから，$\dim_{\mathbb{C}} E < \infty$ となり，仮定に反する．よって $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 1$.

$A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$ が任意の $J_\pi(t,\nu)$ $(t \in F^\times, \nu \in \widehat{O_F^\times})$ と可換ならば A は定数倍写像である．実際，$T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(F^\times, X))$ を $(T\varphi)(t) = A\varphi(t)$ $(\varphi \in C^\infty(F^\times, X))$ により定義する．$\varphi \in E_0 = \mathcal{S}(F^\times, X)$ に対して $T\varphi \in$

$\mathcal{S}(F^\times, X) = E_0$ で

$$\begin{aligned}(T\circ\pi(w)\varphi)(t) &= A(\pi(w)\varphi)(t)\\ &= A\left(\chi_\pi(t)\sum_{\nu\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times} J_\pi(tx,\nu)\varphi(x)d^\times x\right)\\ &= \chi_\pi(t)\sum_{\nu\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times} J_\pi(tx,\nu)\circ A\varphi(x)d^\times x = (\pi(w)\circ T\varphi)(t).\end{aligned}$$

よって $E = \mathcal{S}(F^\times, X) + \pi(w)\mathcal{S}(F^\times, X)$ より，任意の $\varphi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times, X)$ に対して $T\varphi \in E$ かつ $T\circ\pi(w)\varphi = \pi(w)\circ T\varphi$ となる．任意の $g \in B$ に対して $T\circ\pi(g)\varphi = \pi(g)\circ T\varphi$ となることは明らかだから，Bruhat 分解 $G = F^\times B \sqcup NwF^\times B$ より，任意の $g \in G$ に対して $T\circ\pi(g)\varphi = \pi(g)\circ T\varphi$ となる．よって Schur の補題（定理 3.3.1）より $T|_E = \lambda \in \mathbb{C}$ である．よって

$$A\varphi(1) = (T\varphi)(1) = \lambda\cdot\varphi(1) \text{ for } \forall\varphi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times, X)$$

より A は λ-倍写像である．従って補題 4.4.7 より任意の $J_\pi(t,\nu)$ $(t \in F^\times, \nu \in \widehat{O_F^\times})$ は定数倍写像となり，従って任意の $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$ は定数倍写像となる．よって $\dim_{\mathbb{C}} X \leq 1$ となる．■

$C^\infty(F^\times)$ は

$$(g\cdot\varphi)(t) = \tau(bt)\cdot\varphi(at) \text{ for } g = \begin{bmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{bmatrix} \in B, \varphi \in C^\infty(F^\times)$$

により B-加群となる（112）．ここで

定理 4.4.9　1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_B(E, C^\infty(F^\times)) = 1$,

2) $0 \neq T \in \mathrm{Hom}_B(E, C^\infty(F^\times))$ とすると，$T : E \to C^\infty(F^\times)$ は単射で，T により $E \hookrightarrow C^\infty(F^\times)$ とすると

i) $\mathcal{S}(F^\times) = \left\{\varphi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times) \;\middle|\; \begin{array}{l}\exists r > 0 \text{ s.t.}\\ \varphi(t) = 0 \text{ for } \forall t \in F^\times \text{ s.t. } |t|_F < r\end{array}\right\}$,

ii) $E = \mathcal{S}(F^\times) + \pi(w)\mathcal{S}(F^\times)$ $\left(w = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)$.

[証明] $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ より同一視 $X = \mathbb{C}$ を一つ定めれば

$$E \ni v \mapsto \varphi_t \in C^\infty(F^\times) \qquad (\varphi_v(t) = \overline{\pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v} \in X = E/E(N,\tau))$$

は $\mathrm{Hom}_B(E, C^\infty(F^\times))$ の 0 でない元で，上の性質を全てもつ．一方，$T \in \mathrm{Hom}_B(E, C^\infty(F^\times))$ として，E 上の複素線形形式

$$\theta : E \ni v \mapsto (Tv)(1) \in \mathbb{C}$$

を考える．$v \in E(N,\tau)$ とすると

$$\int_{\mathfrak{a}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx = 0 \text{ for some ideal } \mathfrak{a} \subset F$$

だから

$$\begin{aligned} 0 = \theta\left(\int_{\mathfrak{a}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx\right) &= \int_{\mathfrak{a}} \tau(-x)\theta\circ\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})vdx \\ = \int_{\mathfrak{a}} \tau(-x)\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot(Tv)\right)(1)dx &= \theta(v)\cdot\int_{\mathfrak{a}} dx \end{aligned}$$

より $\theta(v) = 0$ となる．よって

$$\theta : E \xrightarrow{(*)} E/E(N,\tau) = X = \mathbb{C} \xrightarrow{\overline{\theta}} \mathbb{C} \qquad ((*)v = \varphi_v(1))$$

となる．このとき $\overline{\theta} = \lambda$-倍写像だから $(Tv)(1) = \lambda\cdot\varphi_v(1)$ $(\forall v \in E)$．よって任意の $t \in F^\times$ に対して

$$(Tv)(t) = (\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot(Tv))(1) = (T\circ\pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v)(1) = \lambda\cdot\varphi_v(t) \qquad (v \in E)$$

となる．■

$0 \neq T \in \mathrm{Hom}_B(E, C^\infty(F^\times))$ として，$\mathcal{K}_\tau(\pi) = T(E) \subset C^\infty(F^\times)$ を π の **Kirillov 空間** と呼ぶ．$\mathcal{S}(F^\times) \subset \mathcal{K}_\tau(\pi)$ で

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(F^\times) &= \bigoplus_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \mathcal{S}_\nu(F^\times), \\ \mathcal{S}_\nu(F^\times) &= \{\varphi \in \mathcal{S}(F^\times) \mid \varphi(t\varepsilon) = \nu(\varepsilon)\varphi(t) \text{ for } \forall\varepsilon \in O_F^\times\} \end{aligned}$$

となり，$\nu \in \widehat{O_F^\times}$ に対して

$$\phi_\nu \in \mathcal{S}_\nu(F^\times)\ \mathrm{s.t.}\ \phi_\nu(t) = \begin{cases} \nu(t) & : t \in O_F^\times, \\ 0 & : t \notin O_F^\times \end{cases}$$

とおくと $\left\{ \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \phi_\nu \,\middle|\, \dot{a} \in F^\times/O_F^\times \right\}$ が $\mathcal{S}_\nu(F^\times)$ の $\mathbb{C}$-基底であった．そこで

$$\begin{aligned} J_\pi(t,\nu) &= \left(\pi(w \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\phi_\nu \right)(1) \\ &= \chi_\pi(t^{-1}) \cdot (\pi(w)\phi_\nu)(t) \qquad (t \in F^\times) \end{aligned}$$

とおくと

1) $J_\pi(t\varepsilon,\nu) = \nu(\varepsilon^{-1})J_\pi(t,\nu)$ for $\forall\varepsilon \in O_F^\times$,
2) 任意の $\varphi \in \mathcal{S}(F^\times) \subset \mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して

$$(\pi(w)\varphi)(t) = \chi_\pi(t) \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} J_\pi(ts,\nu)\varphi(s)d^\times s \qquad (t \in F^\times)$$

である．$\varphi \in \mathcal{S}_\mu(F^\times)$ $(\mu \in \widehat{O_F^\times})$ に対して

$$\int_{F^\times} J_\pi(ts,\nu)\varphi(s)d^\times s = \begin{cases} 0 & : \nu \neq \mu, \\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_\pi(t\varpi^n,\mu)\varphi(\varpi^n) & : \nu = \mu \end{cases}$$

となることに注意する．

4.5 Kirillov モデルの応用

(π, E) を G の無限次元 C^∞-既約表現とする．

定理 4.5.1 1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_N(E, E_{N,\tau}) = 1$ $(E_{N,\tau} = E/E(N,\tau)$, 114 頁参照),

2) N の指標 $\tau(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \tau(x)$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_N^G \tau) = 1$.

[**証明**] 1) $T_0 = [v \mapsto \overline{v}] \in \mathrm{Hom}_N(E, E_{N,\tau})$ は明らか．$T \in \mathrm{Hom}_N(E, E_{N,\tau})$ とすると，$v \in E(N, \tau)$ に対して

$$\int_{\mathfrak{a}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v dx = 0 \qquad (\exists \mathfrak{a} \subset F : \text{ideal})$$

だから n

$$0 = T\left(\int_{\mathfrak{a}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v dx\right) = T(v) \cdot \int_{\mathfrak{a}} dx$$

より $T(v) = 0$ となる．即ち $E(N, \tau) \subset \mathrm{Ker}(T)$ だから

$$T : E \xrightarrow{T_0} E_{N,\tau} \xrightarrow{\overline{T}} E_{N,\tau}$$

である．ここで命題 4.4.8 より $\dim_{\mathbb{C}} E_{N,\tau} = 1$ だから，$\overline{T} = \lambda$-倍写像 $(\lambda \in \mathbb{C})$ となり，$T = \lambda T_0$ となる．

2) $\dim_{\mathbb{C}} E_{N,\tau} = 1$ だから，N のユニタリ指標 τ は N の $E_{N,\tau}$ 上の自然な C^∞-表現と同値である．よって Frobenius 相互律（定理 3.8.1）より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_N^G \tau) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_N(E, \tau) = 1.$$

■

C^∞-群準同型写像 $\chi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して，G の E 上の既約 C^∞-表現 $\chi \otimes \pi$ を $g \mapsto \chi(\det g)\pi(g)$ により定義する．対応する Kirillov 空間は

$$\mathcal{K}_\tau(\chi \otimes \pi) = \{\chi \cdot \varphi \mid \varphi \in \mathcal{K}(\pi)\} \subset C^\infty(F^\times)$$

となる．

定理 4.5.2 G の既約許容表現 (π, E) の反傾表現は $(\chi_\pi^{-1} \otimes \pi, E)$ と同値である（$\pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}) = \chi_\pi(t) \in \mathbb{C}^\times$）．

[**証明**] 同一視 $E/E(N,\tau)=\mathbb{C}$ を一つ定めて，Kirillov モデル

$$E \hookrightarrow C^\infty(F^\times) \text{ by } v \mapsto \varphi_v = [t \mapsto \overline{\pi(\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v}]$$

を用いる．$\sigma = \chi_\pi^{-1} \otimes \pi$ とおく．$\varphi, \psi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times)$ のどちらかが $E_0 = \mathcal{S}(F^\times)$ の元ならば

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{F^\times} \varphi(t)\psi(-t)\chi_\pi(t^{-1})d^\times t$$

ととおくと

$$\langle \pi(w)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \sigma(w^{-1})\psi \rangle \text{ for } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(F^\times).$$

実際

$$(\pi(w^{-1})\psi)(t) = \chi_\pi(-1)(\pi(w)\psi)(t) = \chi_\pi(-1) \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} J_\pi(ts,\nu)\psi(s)d^\times s$$

だから

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \sigma(w^{-1})\psi \rangle &= \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} d^\times t \int_{F^\times} d^\times s J_\pi(-ts,\nu)\varphi(t)\psi(s) \\
&= \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} d^\times t \int_{F^\times} d^\times s J_\pi(ts,\nu)\varphi(t)\psi(-s) \\
&= \int_{F^\times} (\pi(w)\varphi)(s)\psi(-s)\chi_\pi(s)^{-1}d^\times s = \langle \pi(w)\varphi, \psi \rangle
\end{aligned}$$

となる．$E = \mathcal{S}(F^\times) + \pi(w)\mathcal{S}(F^\times)$ だから，$\varphi, \psi \in E \hookrightarrow C^\infty(F^\times)$ に対して $\varphi = \varphi_1 + \pi(w)\varphi_2$ $(\varphi_i \in \mathcal{S}(F^\times))$ として

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi_1, \psi \rangle + \langle \varphi_2, \sigma(w^{-1})\psi \rangle$$

は well-defined である．実際 $\varphi_1 + \pi(w)\varphi_2 = 0$ $(\varphi_i \in \mathcal{S}(F^\times))$ とすると，$\psi = \psi_1 + \pi(w)\psi_2$ $(\psi_i \in \mathcal{S}(F^\times))$ として

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_1, \psi \rangle &= \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle + \langle \varphi_1, \sigma(w^{-1})\psi_2 \rangle \\
&= -\langle \pi(w)\varphi_2\, \psi_1 \rangle + \langle \pi(w^{-1})\varphi_1, \psi_2 \rangle \\
&= -\langle \varphi_2, \sigma(w^{-1})\psi_1 \rangle - \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle
\end{aligned}$$

だから $\langle\varphi_1,\psi\rangle+\langle\varphi_2,\sigma(w^{-1})\psi\rangle=0$ となる．よって

$$\begin{aligned}\langle\varphi,\sigma(w^{-1})\psi\rangle &= \langle\varphi_1,\sigma(w^{-1})\psi\rangle+\langle\varphi_2,\chi_\pi(-1)\psi\rangle\\ &= \langle\chi_\pi(-1)\varphi_2+\pi(w)\varphi_1,\psi\rangle\\ &= \langle\pi(w)\varphi,\psi\rangle.\end{aligned}$$

$g=\begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}\in G$ に対して $\pi(g)=\chi_\pi(t)$, $\sigma(g)=\chi_\pi(t)^{-1}$ だから

$$\langle\pi(g)\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,\sigma(g^{-1})\psi\rangle \qquad (\forall\varphi,\psi\in E).$$

$g=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in G$ に対して $g^{-1}=\begin{bmatrix}a^{-1} & -a^{-1}b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ で

$$(\pi(g)\varphi)(t)=\tau(bt)\varphi(at), \quad (\sigma(g^{-1})\psi)(t)=\chi_\pi(a)\tau(-a^{-1}bt)\psi(a^{-1}t)$$

だから，$\varphi,\psi\in E$ のどちらかが $\mathcal{S}(F^\times)$ の元ならば

$$\begin{aligned}\langle\varphi,\sigma(g^{-1})\psi\rangle &= \int_{F^\times}\varphi(t)\chi_\pi(a)\tau(a^{-1}bt)\psi(-a^{-1}t)\chi_\pi(t)^{-1}d^\times t\\ &= \int_{F^\times}\tau(bt)\varphi(at)\psi(-t)\chi_\pi(t)^{-1}d^\times t\\ &= \langle\pi(g),\psi\rangle.\end{aligned}$$

よって Bruhat 分解 $G=F^\times B\sqcup NwF^\times B$ より

$$\langle\pi(g)\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,\sigma(g^{-1})\psi\rangle \qquad (\forall g\in G,\varphi,\psi\in\mathcal{S}(F^\times)).$$

よって $g\in G,\varphi,\psi\in\mathcal{S}(F^\times$ ならば

$$\langle\pi(g)\circ\pi(w)\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,\sigma(gw)^{-1}\psi\rangle=\langle\pi(w)\varphi,\sigma(g^{-1})\psi\rangle$$

から

$$\langle\pi(g)\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,\sigma(g^{-1})\psi\rangle \qquad (\forall g\in G,\varphi,\psi\in\mathcal{S}(F^\times))$$

となる．$(\pi,E),(\sigma,E)$ は G の既約許容表現だから，双線形形式は非退化である．よって命題 3.4.3 より (σ,E) は $(\pi^\vee,E^\vee)$ と同値である．■

4.6　主系列表現，特殊表現

$$P=\left\{\begin{bmatrix}x & z\\ 0 & y\end{bmatrix}\ \middle|\ x,y\in F^\times, z\in F\right\},\qquad \Gamma=GL_2(O_F)$$

とおく．

$$d_P(\begin{bmatrix}x & z\\ 0 & y\end{bmatrix})=|x|_F^{-1}d^\times x d^\times y dz$$

は P の左 Haar 測度で，モジュラー関数は $\Delta_P(\begin{bmatrix}x & z\\ 0 & y\end{bmatrix})=|x/y|_F^{-1}$ である．$G=\Gamma P$ だから $\rho(g)=\Delta_P(p)$ $(g=kp\in G=\Gamma P)$ は P に関する G の ρ 関数である．付随する G/P 上の Radon 測度を μ_ρ とおくと

$$\int_G \varphi(x)\rho(x)d_G(x)=\int_{G/P}\left(\int_P \varphi(px)d_P(p)\right)d\mu_\rho(\dot{x})\qquad (\varphi\in C_c(G))$$

である．一方，定数 $0<c\in\mathbb{R}$ があって

$$\begin{aligned}\int_G \varphi(x)d_G(x)&=\int_P d_P(p)\int_\Gamma d_G(k)\varphi(pk)\\ &=\int_\Gamma d_G(k)\int_P d_P(p)\varphi(kp)\Delta_P(p)^{-1}\qquad (\varphi\in C_c(G))\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $f(xp)=\Delta_P(p)f(x)$ $(\forall p\in P)$ なる $f\in C_c(G)$ に対して

$$c\cdot\int_\Gamma f(k)d_G(k)=\int_{G/P} f(x)\rho(x)^{-1}d\mu_\rho(\dot{x})\tag{4.4}$$

であり，任意の $g\in G$ に対して

$$\int_\Gamma f(g^{-1}k)d_G k=\int_\Gamma f(k)d_G k.\tag{4.5}$$

[**証明**] $\varphi(x)=f(x)\rho(x)^{-1}$ $(x\in G)$ とおくと，$\varphi(xp)=\varphi(x)$ for $\forall p\in P$ だから，$\varphi\in C_c(P\backslash G)$ とみなせば

$$\varphi(x)=\int_P \psi(xp)d_P(p)\qquad (x\in G)$$

なる $\psi \in C_c(G)$ がとれる．よって

$$\begin{aligned}\int_{P\backslash G} f(x)\rho(x)^{-1}d\mu_\rho(\dot{x}) &= \int_{G/P}\varphi(x)d\mu_\rho(\dot{x})\\ &= \int_{G/P} d\mu_\rho(\dot{x})\int_P d_P(p)\psi(xp)\\ &= \int_G \psi(x)\rho(x)d_G(x)\\ &= c\cdot\int_\Gamma d_G(k)\int_P d_P(p)\psi(kp)\rho(kp)\Delta_P(p)^{-1}\\ &= c\cdot\int_\Gamma d_G(k)\int_P d_P(p)\psi(kp)\\ &= c\cdot\int_\Gamma \varphi(k)d_G(k) = c\cdot\int_\Gamma f(k)d_G(k)\end{aligned}$$

となる．一方，$J_\rho(g,\dot{x}) = \rho(gx)/\rho(x)$ $(g \in G, \dot{x} \in G/P)$ とおくと $d\mu_\rho(g\cdot\dot{x}) = J_\rho(g,\dot{x})d\mu_\rho(\dot{x})$ だから

$$\begin{aligned}c\cdot\int_\Gamma f(g^{-1}x)d_G(k) &= \int_{G/P} f(g^{-1}x)\rho(x)^{-1}d\mu_\rho(\dot{x})\\ &= \int_{G/P} f(x)\rho(gx)^{-1}d\mu_\rho(g\cdot\dot{x})\\ &= \int_{G/P} f(x)\rho(gx)^{-1}J_\rho(g,\dot{x})d\mu_\rho(\dot{x})\\ &= \int_{G/P} f(x)\rho(x)^{-1}d\mu_\rho(\dot{x}) = c\cdot\int_\Gamma f(k)d_G(k)\end{aligned}$$

となる．■

$[P,P] = \left\{\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix} \,\middle|\, b \in F\right\}$ だから

$$F^\times \times F^\times \tilde{\to} P/[P,P] \quad \left((a,d) \mapsto \begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}\cdot [P,P]\right).$$

よって P の一次元連続表現は連続群準同型写像 $\mu,\nu : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\mu\otimes\nu : P \ni \begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix} \mapsto \mu(a)\nu(d) \in \mathbb{C}^\times$$

で尽くされる．そこで

$$\mathcal{B}_{\mu,\nu} = \left\{ \varphi \in C^\infty(G) \;\middle|\; \begin{array}{r} \varphi(px) = (\mu \cdot |\cdot|_F^{1/2}) \otimes (\nu \cdot |\cdot|_F^{-1/2})(p) \cdot \varphi(x) \\ \text{for } \forall p \in P \end{array} \right\}$$

とおき，$(\rho_{\mu,\nu}(g)\varphi)(x) = \varphi(xg)$ $(\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}, g \in G)$ とおくと，$G = P\Gamma$ $(\Gamma = GL_2(O_F))$ だから

$$\mathcal{B}_{\mu,\nu} \ni \varphi \mapsto \varphi|_\Gamma \in C^\infty(\Gamma)$$

は単射となり，$\Gamma \subset G$ は開コンパクト集合だから，$\psi \in C^\infty(\Gamma)$ に対して $\psi(xk) = \psi(x)$ $(\forall x \in \Gamma, k \in K)$ なる開部分群 $K \subset \Gamma$ がとれ，更に $(\Gamma : K) < \infty$ である．よって $(\rho_{\mu,\nu}, \mathcal{B}_{\mu,\nu})$ は G の許容表現となり

$$\rho_{\mu,\nu} = \mathrm{Ind}_P^G((\mu \cdot |\cdot|_F^{1/2} \otimes (\nu \cdot |\cdot|_F^{-1/2}))$$

である．

命題 4.6.1 $\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ と $\psi \in \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ に対して

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Gamma \varphi(k)\psi(k) d_G(k)$$

とおくと

1) $\langle\, , \rangle : \mathcal{B}_{\mu,\nu} \times \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}} \to \mathbb{C}$ は非退化双線形形式である，
2) $\langle \rho_{\mu,\nu}(g)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \rho_{\mu,\nu}(g^{-1})\psi \rangle$ $(\forall g \in G)$ が成り立つ．

特に $\rho_{\mu,\nu}$ の反傾表現は $\rho_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ に同値である．

[**証明**] 1) $\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ は $\varphi|_\Gamma$ により定まるから，非退化であることはよい．

2) $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ $(x \in G)$ とおくと，$f(px) = \Delta_P(p)^{-1} f(x)$ for $\forall p \in P$ となるから，積分公式(4.5) を $f'(x) = f(x^{-1})$ に適用すればよい．よって命題 3.4.4 より $\mathcal{B}_{\mu,\nu}$ の反傾表現は $\mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ と同値である．■

以下，連続群準同型写像 $\mu, \nu : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ を固定して $\delta = \mu\nu^{-1}$ とおく．Bruhat 分解 $G = P \sqcup NwP = P \sqcup Pw^{-1}N$ に注意すれば

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac^{-1}d - b & a \\ 0 & c \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c \neq 0)$$

より，$\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ に対して

$$\varphi(g) = \begin{cases} (\mu \otimes \nu)(g)\Delta_P(g)^{-1/2} & : g \in P, \\ \mu(\det g)\delta(c)^{-1}|\det g|_F^{1/2}|c|_F^{-1} \cdot \varphi(w^{-1}\begin{bmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) & : g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Pw^{-1}N \end{cases}$$

となる．そこで $\phi(t) = \varphi(w^{-1}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$ $(x \in F)$ とおくと

$$\phi(x) = \delta(x)^{-1}|x|_F^{-1}\varphi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{bmatrix}) \qquad (x \in F^\times)$$

となるから，$\phi \in C^\infty(F)$ かつ

$$\phi(x) = \varphi(1) \times \delta(x)^{-1}|x|_F^{-1} \text{ for } |x|_F \gg 0$$

となる．そこで $C^\infty(F)$ の複素部分空間

$$\mathcal{F}_\delta = \left\{\phi \in C^\infty(F) \mid \phi(x) = \text{const.} \times \delta(x)^{-1}|x|_F^{-1} \text{ for } |x|_F \gg 0\right\}$$

をとると，$\varphi \mapsto \phi$ は複素線形同型 $\mathcal{B}_{\mu,\nu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_\delta$ を与える．

$$\phi_\delta(x) = \begin{cases} \delta(x)^{-1}|x|_F^{-1} & : |x|_F \geq 1, \\ 0 & : |x|_F < 1 \end{cases}$$

とおくと，$\mathcal{F}_\delta = \mathcal{S}(F) \oplus \mathbb{C}\phi_\delta$ である．$\phi \in \mathcal{S}(F)$ に対しては Fourier 変換

$$\widehat{\phi}(y) = \int_F \phi(x)\tau(-xy)dx \qquad (y \in F)$$

が絶対収束して $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(F)$ であるが，ϕ_δ については，$|\delta(\varpi^n\varepsilon)| = |\delta(\varphi)|^n$ $(\varepsilon \in O_F^\times)$ より

$$\begin{aligned} \int_F |\phi_\delta(x)\tau(-xy)|dx &= \int_{\mathrm{ord}_F(x)\leq 0} |\delta(\varpi)|^{\mathrm{ord}_F(x)}|x|_F^{-1}dx \\ &= \sum_{n\leq 0}\int_{\varpi^n O_F^\times} |\delta(\varphi)|^n d^\times(x) \times \text{const.} \\ &= \text{const.}\sum_{n\leq 0}|\delta(\varpi)|^n \end{aligned}$$

となって，一般には絶対収束しない．そこで $\phi \in \mathcal{F}_\delta$ に対して

$$\widehat{\phi}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathrm{ord}_F(x)=n} \phi(x)\tau(-xt)dx \qquad (t \in F^\times)$$

とおく（これは絶対収束することが示される；補題 4.6.3）．

補題 4.6.2 $C = q^{d/2}(1-q^{-1})^{-1}$（即ち $d^\times(x) = C|x|_F^{-1}dx$）とおいて

1) $\delta|_{O_F^\times} \neq 1$ のとき．$f = \mathrm{Min}\{0 < f \in \mathbb{Z} \mid \delta(1+\mathfrak{p}^f) = 1\}$ とおくと

$$\widehat{\phi}_\delta(t) = \begin{cases} C^{-1}\cdot\delta(\varpi)^{d+f} G(\delta^{-1}|_{O_F^\times}, -\varpi^{-(d+f)})\cdot\delta(t) & : |t|_F \leq q^{d+f}, \\ 0 & : |t|_F > q^{d+f}. \end{cases}$$

2) $\delta|_{O_F^\times} = 1, \delta \neq 1$ のとき

$$\widehat{\phi}_\delta(t) = \begin{cases} \dfrac{q^{-1-d/2}(1-q)}{1-\delta(\varpi)} - \dfrac{C^{-1}(1-q^{-1}\delta(\varpi))}{(1-q^{-1})(1-\delta(\varpi))} & \cdot\delta(\varpi^{d+1}t) \\ & : \mathrm{ord}_F(t) \geq -d, \\ -q^{-1-d/2} & : \mathrm{ord}_F(t) = -d-1, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(t) < -d-1. \end{cases}$$

特に $\delta = |\cdot|_F^{-1}$ のとき

$$\widehat{\phi}_\delta(t) = \begin{cases} -q^{-1-d/2} & : \mathrm{ord}_F(t) \geq -d-1, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(t) < -d-1. \end{cases}$$

3) $\delta = 1$ のとき

$$\widehat{\phi}_\delta(t) = \begin{cases} C^{-1}(d+2) - q^{-d/2} + C^{-1}\mathrm{ord}_F(t) & : \mathrm{ord}_F(t) \geq -d, \\ -q^{-1-d/2} & : \mathrm{ord}_F(t) = -d-1, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(t) < -d-1. \end{cases}$$

[**証明**] まず

$$\begin{aligned} C\widehat{\phi}_\delta(t) &= C\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathrm{ord}_F(x)=n}\phi_\delta(x)\tau(-xt)dx \\ &= \sum_{n\le 0}\int_{\mathrm{ord}_F(x)=n}\delta(x)^{-1}\tau(-xt)d^\times x \\ &= \sum_{n\le 0}\delta(\varpi)^{-n}\int_{O_F^\times}\delta(\varpi^n x)^{-1}\tau(-t\varpi^n x)d^\times X \\ &= \sum_{n\le 0}\delta(\varpi)^{-n}G(\delta^{-1}|_{O_F^\times}, -t\varpi^n) \end{aligned}$$

となる．ここで $\varepsilon\in O_F^\times$ に対して $G(\delta^{-1}|_{O_F^\times},\varepsilon t)=\delta(\varepsilon)\cdot G(\delta^{-1}|_{O_F^\times},t)$ $(t\in F^\times)$ となることに注意する．

1) $\delta\_O_F^\times\neq 1$ のとき．$G(\delta^{-1}|_{O_F^\times},-t\varpi^n)\neq 0$ となるのは $\mathrm{ord}_F(t\varpi^n)=-d-f$ のとき，即ち $n=-d-f-\mathrm{ord}_F(t)$ のときに限るから

$$\begin{aligned} C\widehat{\phi}_\delta(t) &= \begin{cases} \delta(\varpi)^{d+f+\mathrm{ord}_F(t)}G(\delta^{-1}|_{O_F^\times}, -t\varpi^{-d-f-\mathrm{ord}_F(t)}) & : d+f+\mathrm{ord}_F(t)\ge 0, \\ 0 & : d+f+\mathrm{ord}_F(t)<0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \delta(t)\delta(\varpi)^{d+f}G(\delta^{-1}|_{O_F^\times}, -\varpi^{-(d+f)}) & : \mathrm{ord}_F(t)\ge -d-f, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(t)<-d-f \end{cases} \end{aligned}$$

となる．

2) $\delta\_O_F^\times=1$ のとき．$\delta(x)=|x|_F^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{C})$，即ち $\delta(\varpi)=q^{-\alpha}$ となり，$\mathbb{Z}\ni n\le 0$ に対して

$$\begin{aligned} &\delta(\varpi)^{-n}\int_{O_F^\times}\delta(x)^{-1}\tau(-tx)d^\times x = Cq^{\alpha n}\int_{O_F^\times}\delta(x)^{-1}\tau(-tx)dx \\ =&Cq^{\alpha n}\left(\int_{O_F}\tau(-t\varpi^n x)dx-\int_{\mathfrak{p}}\tau(-t\varphi^n x)dx\right) \\ =&Cq^{\alpha n}\left(\int_{O_F}\tau(-t\varpi^n x)dx-q^{-1}\int_{O_F}\tau(-t\varpi^{n+1}x)dx\right) \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\int_{O_F}\tau(ax)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{O_F}dx=q^{-d/2} & :\mathrm{ord}_F(a)\geq -d,\\ 0 & :\mathrm{ord}_F(a)<-d\end{cases}$$

だから

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_\delta(t)&=c^{-1}\sum_{n\leq 0}\delta(\varpi)^{-n}\int_{O_F^\times}\delta(x)^{-1}\tau(-t\varpi^n x)d^\times x\\&=F_\alpha(t)-q^{-1}F_\alpha(\varpi t)\end{aligned}$$

となる．ここで

$$F_\alpha(t)=\sum_{-d-\mathrm{ord}_F(t)\leq n\leq 0}\int_{O_F}\tau(-t\varpi^n x)dx=\sum_{-d-\mathrm{ord}_F(t)\leq n\leq 0}q^{\alpha n-d/2}$$

とおく．従って $-d-\mathrm{ord}_F(t)>0$（即ち $\mathrm{ord}_F(t)<-d$）ならば $F_\alpha(t)=0$ である．

$\delta\neq 1$（即ち $\delta(\varphi)\neq 1$）のとき．$d+\mathrm{ord}_F(t)\geq 0$ ならば

$$\begin{aligned}F_\alpha(t)&=q^{-d/2}\cdot\frac{1-q^{-\alpha(d+\mathrm{ord}_F(t))}}{1-q^{-\alpha}}\\&=\frac{q^{-d/2}}{1-\delta(\varpi)}\bigl(1-\delta(\varpi^{d+1}t)\bigr)\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_\delta(t)&=\frac{q^{-d/2}}{1-\delta(\varpi)}\bigl(1-\delta(\varpi^{d+1}t)\bigr)-\frac{q^{-1-d/2}}{1-\delta(\varpi)}\bigl(1-\delta(\varpi^{d+2}t)\bigr)\\&=\frac{q^{-d/2}(1-q^{-1})}{1-\delta(\varpi)}-\frac{q^{-d/2}(1-q^{-(1+\alpha)})}{1-\delta(\varpi)}\delta(\varpi^{d+1}t)\\&=\frac{C^{-1}}{1-\delta(\varpi)}-\frac{C^{-1}(1-q^{-1}\delta(\varpi))}{(1-q^{-1})(1-\delta(\varpi))}\delta(\varpi^{d+1}t)\end{aligned}$$

となる．$\mathrm{ord}_F(t)=-d-1$ のとき

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_\delta(t)&=-q^{-1}F_\alpha(\varpi t)\\&=-\frac{q^{-1-d/2}}{1-\delta(\varpi)}\bigl(1-\delta(\varpi^{d+2}t)\bigr)\end{aligned}$$

となる．

3) $\delta = 1$，即ち上の記号で $q^\alpha = 1$ のとき．$d+\mathrm{ord}_F(t) \geq 0$ ならば $F_\alpha(t) = q^{-d/2}(d+\mathrm{ord}_F(t)+1)$ だから

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_\delta(t) &= q^{-d/2}(d+\mathrm{ord}_F(t)+1) - q^{-1-d/2}(d+\mathrm{ord}_F(\varpi t)+1) \\ &= \left\{q^{-d/2}(1-q^{-1})(d+1) - q^{-1-d/2}\right\} + q^{-d/2}(1-q^{-1})\mathrm{ord}_F(t) \\ &= \left\{q^{-d/2}(1-q^{-1})(d+2) - q^{-d/2}\right\} + q^{-d/2}(1-q^{-1})\mathrm{ord}_F(t)\end{aligned}$$

となる．$\mathrm{ord}_F(t) = -d-1$ ならば

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_\delta(t) &= -q^{-1}F_\alpha(\varpi t) \\ &= -q^{-1-d/2}(d+1+\mathrm{ord}_F(\varpi t)) = -q^{-1-d/2}\end{aligned}$$

となる．■

補題 4.6.3 1) $\phi \in \mathcal{F}_\delta$ に対して

$$\widehat{\phi}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathrm{ord}_F(x)=n} \phi(x)\tau(-xt)dx \qquad (t \in F^\times)$$

は $F^\times$ の任意のコンパクト集合上一様収束する．

2) $\widehat{\mathcal{F}}_\delta = \{\widehat{\phi} \mid \phi \in \mathcal{F}_\delta\}$ は $\psi \in C^\infty(F^\times)$ で

i) $\mathrm{supp}(\psi) \subset K$ なるコンパクト集合 $K \subset F$ があり，

ii) $|t|_F$ が十分小さいとき

$$\psi(t) = \begin{cases} a\cdot\delta(t)+b & : \delta \neq 1, |\cdot|_F^{-1}, \\ a\cdot\mathrm{ord}_F(t)+b & : \delta = 1, \\ \mathrm{const.} & : \delta = |\cdot|_F^{-1} \end{cases}$$

$(a, b \in \mathbb{C})$ なるもの全体となる．

3) $\delta \neq |\cdot|_F^{-1}$ ならば $\phi \mapsto \widehat{\phi}$ は単射である．

4) $\delta = |\cdot|_F^{-1}$ のとき，$\phi \mapsto \widehat{\phi}$ の核は $\mathcal{F}_\delta$ の定数関数全体である．

[**証明**] 補題 4.6.2 から 1), 2) が従う．$\varphi = \varphi_0 + c\phi_\delta \in \mathcal{F}_\delta$ $(\varphi_0 \in \mathcal{S}(F), c \in \mathbb{C})$ として $\widehat{\varphi} = 0$ とすると，$c\widehat{\phi}_\delta = -\widehat{\varphi}_0$ は 0 の近傍では定数関数となる．補題

4.6.2 から，そのようなことが起きるのは $\delta = |\cdot|_F^{-1}$ のときのみである．このとき

$$\phi_\delta(t) = \begin{cases} 1 & : |x|_F \geq 1, \\ 0 & : |x|_F < 1, \end{cases} \qquad \widehat{\phi}_\delta(t) = \begin{cases} -q^{-1-d/2} & : \mathrm{ord}_F(t) \geq -d-1, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(t) < -d-1 \end{cases}$$

だから

$$\widehat{\varphi}_0(t) = \begin{cases} a & : \mathrm{ord}_F(t) \geq -d-1, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(t) < -d-1. \end{cases} \qquad (a = c \cdot q^{-1-d/2})$$

よって

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \int_F \widehat{\varphi}_0(y)\tau(xy)dy = a \cdot \int_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{-1}} \tau(xy)dy \\ &= \begin{cases} a\displaystyle\int_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{-1}} dy & : \mathrm{ord}_F(x) > 0, \\ 0 & : \mathrm{ord}_F(x) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となるが

$$\int_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{-1}} dy = \int_{O_F} d(\varpi^{-d-1}y) = |\varpi|_F^{-d-1} \int_{O_F} dy = q^{d+1}q^{-d/2} = q^{1+d/2}$$

だから

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} c & : |x|_F < 1, \\ 0 & : |x|_F \geq 1 \end{cases}.$$

よって $\varphi = \varphi_0 + c \cdot \phi_\delta = c$ (定数関数) となる．■

補題 4.6.4 $\rho_{\mu,\nu}(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\varphi = \varphi$ for $\forall b \in F$ なる $0 \neq \varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ が存在するならば

1) $\delta = |\cdot|_F^{-1}$ であり，
2) $\varphi(g) = \mu(\det g)|\det g|_F^{-1} \cdot \varphi(1)$ $(g \in G)$ である．

[**証明**] 仮定から $\phi(x)=\varphi(w^{-1}\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix})$ $(x\in F)$ は定数関数で，$\varphi\neq 0$ より $\phi\neq 0$ である．$\phi\in\mathcal{F}_\delta$ だから，$|x|_F\gg 0$ のとき $\delta(x)|x|_F=c\in\mathbb{C}$ （定数関数）である．よって $\delta|_{O_F^\times}=1$ となり $\delta(x)=|x|_F^\alpha$ $(x\in F^\times)$ なる $\alpha\in\mathbb{C}$ がとれる．ここで $|x|_F\gg 0$ のとき $|x|_F^{\alpha+1}=c$ だから $\alpha=-1$，よって $\delta=|\cdot|_F^{-1}$ である．このとき

$$\begin{aligned}\varphi(\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}) &= \varphi(\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a^{-1}b\\ 0 & 1\end{bmatrix})\\ &= \mu(a)|a|_F^{1/2}\nu(d)|d|_F^{-1/2}\varphi(1)=\mu(ad)|ad|_F^{1/2}\varphi(1)\\ \varphi(g)=\mu(\det g)|\det g|_F^{1/2}\varphi(w^{-1}) & \qquad (g=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, c\neq 0)\end{aligned}$$

となるが，$Pw^{-1}N\subset G$ は稠密で φ は G 上の連続関数だから $\varphi(w^{-1})=\varphi(1)$ で

$$\varphi(g)=\mu(\det g)|\det g|_F^{1/2}\cdot\varphi(1) \text{ for } \forall g\in G$$

となる．■

補題 4.6.5 $\varphi\in\mathcal{B}_{\mu,\nu}$ に対して

$$\phi(x)=\varphi(w^{-1}\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}) \quad (x\in F), \qquad \xi_\varphi(t)=\nu(t)|t|_F^{1/2}\widehat{\phi}(t) \quad (t\in F^\times)$$

とおくと，$\varphi\mapsto\xi_\varphi$ は B-加群の準同型写像 $\mathcal{B}_{\mu,\nu}\to C^\infty(F^\times)$ を与える．更に

$$\mathrm{Ker}[\varphi\mapsto\xi_\varphi]=\begin{cases}0 & :\delta\neq|\cdot|_F^{-1},\\ \mathbb{C}\varphi_0 & :\delta=|\cdot|_F^{-1} \quad (\varphi_0(g)=\mu(\det g)|\det g|_F^{1/2})\end{cases}$$

である．

[**証明**] $\varphi' = \rho_{\mu,\nu}(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\varphi$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\phi'(x) &= \varphi(w^{-1}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \varphi(w^{-1}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a^{-1}x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \\
&= \varphi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} w^{-1}\begin{bmatrix} 1 & a^{-1}x + a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \\
&= \nu(a)|a|_F^{-1/2}\phi(a^{-1}x + a^{-1}b)
\end{aligned}
$$

となる．ここで $b = 0$ とすると

$$
\begin{aligned}
\widehat{\phi'}(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathrm{ord}_F(x)=n} \nu(a)|a|_F^{-1/2}\phi(a^{-1}x)\tau(-tx)dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu(a)|a|_F^{-1/2}\int_{\mathrm{ord}_F(x)=n} \phi(x)\tau(-tax)d(ax) = \nu(a)|a|_F^{1/2}\widehat{\phi}(at)
\end{aligned}
$$

より $\xi_{\varphi'}(t) = \xi_\varphi(at)$ となる．$a = 1$ とすると，$\mathrm{ord}_F(b) = m$ として

$$
\begin{aligned}
\widehat{\phi'}(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathrm{ord}_F(x)=n} \nu(a)|a|_F^{-1/2}\phi(x+b)\tau(-tx)dx \\
&= \sum_{n<m} \int_{\mathrm{ord}_F(x)=n} \nu(a)|a|_F^{-1/2}\phi(x)\tau(-t(x-b))dx \\
&\quad + \int_{\mathfrak{p}^m} \nu(a)|a|_F^{-1/2}\phi(x)\tau(-t(x-b))dx \\
&= \tau(bt)\widehat{\phi}(t)
\end{aligned}
$$

より $\xi_{\varphi'}(t) = \tau(bt)\xi_\varphi(t)$ となる．$\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ に対して $\xi_\varphi = 0$ とすると $\widehat{\phi} = 0$. 補題 4.6.3 より，$\delta \neq |\cdot|_F^{-1}$ ならば $\phi = 0$ 従って $\varphi = 0$ となり，$\delta = |\cdot|_F^{-1}$ ならば ϕ は定数関数，従って $\rho_{\mu,\nu}(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\varphi = \varphi$ for $\forall b \in F$ となり $\varphi = \varphi_0 \cdot \varphi(1)$ となる．■

$C^\infty(F^\times)$ の複素部分空間

$$
\mathcal{K}_{\mu,\nu} = \{\xi_\varphi \in C^\infty(F^\times) \mid \varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}\}
$$

は

1) $|t|_F \gg 0$ で $\xi(t) = 0$,

2) 0 の近傍では

$$\xi(t) = \begin{cases} |t|_F^{1/2}(a\mu(t) + b\nu(t)) & : \delta \neq 1, |\cdot|_F^{-1}, \\ |t|_F^{1/2}(a\nu(t)\mathrm{ord}_F(t) + b\nu(t)) & : \delta = 1, \\ |t|_F^{1/2} \cdot a\nu(t) + b & : \delta = |\cdot|_F^{-1} \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{C})$$

なる $\xi \in C^\infty(F^\times)$ の全体である．$\mathcal{S}(F^\times) \subset \mathcal{K}_{\mu,\nu}$ で

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_{\mu,\nu}/\mathcal{S}(F^\times) = \begin{cases} 2 & : \delta \neq \cdot|_F^{-1}, \\ 1 & : \delta = |\cdot|_F^{-1} \end{cases}$$

となる．

補題 4.6.6 $\{0\} \subsetneqq V \subsetneqq \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ なる G-不変部分空間があるならば $\delta = |\cdot|_F$ 又は $\delta = |\cdot|_F^{-1}$ で

1) $\delta = |\cdot|_F$ ならば

$$V = \{\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu} \mid \langle \varphi, \psi_0 \rangle = 0\}$$

である．ここで $\psi_0 \in \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ は $\psi_0(g) = \mu^{-1}(\det g)|\det g|_F^{1/2}$ $(g \in G)$ である．

2) $\delta = |\cdot|_F^{-1}$ ならば $V = \mathbb{C}\varphi_0$ である．ここで $\varphi_0 \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ は $\varphi_0(g) = \mu(\det g)|\det g|_F^{1/2}$ $(g \in G)$ である．

[**証明**] $\delta \neq |\cdot|_F^{-1}$ とする．

$$V' = \{\xi_\varphi \in C^\infty(F^\times) \mid \varphi \in V\}$$

は $\mathcal{K}_{\mu,\nu}$ の B-不変部分空間である．$\delta \neq |\cdot|_F^{-1}$ だから $V' \neq 0$ だから $0 \neq \xi \in V'$ をとる．任意の $b \in F$ に対して $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi - \xi \in \mathcal{S}(F^\times) \cap V'$ だから $\mathcal{S}(F^\times) \cap V' \neq 0$ である．ここで $\mathcal{S}(F^\times)$ は単純 B-加群だから $\mathcal{S}(F^\times) \cap V' = \mathcal{S}(F^\times)$, 即ち $\mathcal{S}(F^\times) \subset V'$．命題 3.4.1 より

$$V^\perp = \{\psi \in \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}} \mid \langle V, \psi \rangle = 0\}$$

は $\mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ の非自明な G-不変部分空間となる．$0 \neq \psi \in V^{\perp}$ とすると，任意の $\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ と $b \in F$ に対して

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_{\varphi} - \xi_{\varphi} \in \mathcal{S}(F^{\times}) \subset V'$$

より $\rho_{\mu,\nu}(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\varphi - \varphi \in V$，従って

$$0 = \langle \rho_{\mu,\nu}(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\varphi - \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \rho_{\mu^{-1},\nu^{-1}}(\begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi - \xi \rangle$$

となる．よって任意の $b \in F$ に対して $\rho_{\mu^{-1},\nu^{-1}}(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})\psi = \psi$ となる．よって $\mu^{-1} = |\cdot|_F^{-1}$ かつ

$$V^{\perp} = \mathbb{C}\psi_0, \qquad \psi_0(g) = \mu^{-1}(\det g)|\det g|_F^{1/2} \quad (g \in G)$$

となる．よって

$$V = (V^{\perp})^{\perp} = \{\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu} \mid \langle \varphi, \psi_0 \rangle = 0\}.$$

$\delta = |\cdot|_F^{-1}$ とする．命題 3.4.1 より $V^{\perp} \subset \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ は非自明な G-不変部分空間で，$\mu^{-1} \neq |\cdot|_F^{-1}$ だから

$$V^{\perp} = \{\psi \in \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu-1} \mid \langle \varphi_0, \psi \rangle = 0\}$$

$(\varphi(g) = \mu(\det g)|\det g|_F^{1/2})$ となる．よって $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}/V^{\perp} = 1$ となり

$$(V^{\perp})^{\perp} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}/V^{\perp}, \mathbb{C})$$

より $\dim_{\mathbb{C}}(V^{\perp})^{\perp} = 1$．一方 $0 \neq V \subset (V^{\perp})^{\perp}$ だから

$$V = (V^{\perp})^{\perp} = \mathbb{C}\varphi_0$$

となる．■

$\delta \neq |\cdot|_F^{\pm 1}$ のとき，$\pi_{\mu,\nu} = (\rho_{\mu,\nu}, \mathcal{B}_{\mu,\nu})$ は G の既約許容表現である．これを G の**主系列表現** と呼ぶ.

$\delta = |\cdot|_F$ のとき

$$\mathcal{S}_{\mu,\nu} = \{\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu} \mid \langle \varphi, \psi_0 \rangle = 0\}$$

$(\psi_0 \in \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ s.t. $\psi_0(g) = \mu^{-1}(\det g)|\det g|_F^{1/2}$ $(g \in G))$ とおくと，$\sigma_{\mu,\nu} = \rho_{\mu,\nu}|_{\mathcal{S}_{\mu,\nu}}$ は G の既約許容表現である.

$\delta = |\cdot|_F^{-1}$ のとき

$$\mathcal{S}_{\mu,\nu} = \mathcal{B}_{\mu,\nu}/\mathbb{C}\varphi_0 \qquad (\varphi_0(g) = \mu(\det g)|\det g|_F^{1/2})$$

は G の既約許容表現である．$\delta = |\cdot|_F^{\pm 1}$ のときに $\sigma_{\mu,\nu}$ を**特殊表現** と呼ぶ.

$\delta = |\cdot|_F$ のとき，$\psi_0 \in \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ に対して

$$\mathcal{S}_{\mu,\nu} = (\mathbb{C}\psi_0)^{\perp}, \qquad \mathcal{S}_{\mu^{-1},\nu^{-1}} = \mathcal{B}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}/\mathbb{C}\psi_0$$

だから

$$\langle\,,\rangle : \mathcal{S}_{\mu,\nu} \times \mathcal{S}_{\mu^{-1},\nu^{-1}} \ni (\varphi, \dot{\psi}) \mapsto \langle \varphi\psi \rangle \in \mathbb{C}$$

は非退化双線形形式で，任意の $g \in G$ に対して $\langle \sigma_{\mu,\nu}(g)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \sigma_{\mu^{-1},\nu^{-1}}(g)\psi \rangle$ となるから，$\mathcal{S}_{\mu,\nu}$ と $\mathcal{S}_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ は互いの反傾表現と同値である（命題 3.4.4）.

定理 4.6.7 $\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ に対して

$$\phi(x) = \varphi(w^{-1}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \quad (x \in F), \qquad \xi_\varphi(t) = \nu(t)|t|_F^{1/2}\widehat{\phi}(t) \quad (t \in F^\times)$$

とおくと

1) $\delta \neq |\cdot|_F^{\pm 1}$ のとき

$$\mathcal{B}_{\mu,\nu} \ni \varphi \mapsto \xi_\varphi \in C^\infty(F^\times)$$

は B-加群の単射準同型写像である．$\pi = \pi_{\mu,\nu}$ の Kirillof 空間 $\mathcal{K}_\tau(\pi) \subset C^\infty(F^\times)$ は

i) $\xi(t) = 0$ for $|t|_F \gg 0$,

ii) $0 \in F$ の近傍で

$$\xi(t) = \begin{cases} |t|_F^{1/2}(a \cdot \mu(t) + b \cdot \nu(t)) & : \delta \neq 1, \\ |t|_F^{1/2}(a \cdot \mu(t)\mathrm{ord}_F(t) + b \cdot \nu(t)) & : \delta = 1 \end{cases}$$

$(a, b \in \mathbb{C})$ なる $\xi \in C^\infty(F^\times)$ の全体である.

2) $\delta = |\cdot|_F^{-1}$ のとき

$$\mathcal{S}_{\mu,\nu} \ni \dot{\varphi} \mapsto \xi_\varphi \in C^\infty(F^\times)$$

は B-加群の単射準同型写像である．$\sigma = \sigma_{\mu,\nu}$ の Kirillov 空間 $\mathcal{K}_\tau(\sigma) \subset C^\infty(F^\times)$ は

i) $\xi(t) = 0$ for $|t|_F \gg 0$,

ii) $0 \in F$ の近傍で $\xi(t) = a \cdot |t|_F^{1/2}\nu(t)$ $(a \in \mathbb{C})$

なる $\xi \in C^\infty(F^\times)$ の全体である.

3) $\delta = |\cdot|_F$ のとき

$$\mathcal{S}_{\mu,\nu} \ni \varphi \mapsto \xi_\varphi \in C^\infty(F^\times)$$

は B-加群の単射準同型写像である．$\sigma = \sigma_{\mu,\nu}$ の Kirillov 空間 $\mathcal{K}_\tau(\sigma) \subset C^\infty(F^\times)$ は

i) $\xi(t) = 0$ for $|t|_F \gg 0$,

ii) $0 \in F$ の近傍で $\xi(t) = a \cdot |t|_F^{1/2}\mu(t)$ $(a \in \mathbb{C})$

なる $\xi \in C^\infty(F^\times)$ の全体である.

[**証明**] 1) 2) は今までの議論で示されている.

3) $\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ として，$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Pw^{-1}N$ に対して

$$\varphi(g) = \mu(\det g)|\det g|_F^{1/2}|c|_F^{-2}\phi(c^{-1}d), \qquad \psi_0(g) = \mu(\det g)^{-1}|\det g|_F^{1/2}$$

だから，$\Gamma = GL_2(O_F)$ に対して $\Gamma' = \Gamma \cap Pw^{-1}N$ とおくと

$$\langle \varphi, \psi_0 \rangle = \int_\Gamma \varphi(k)\psi_0(k)d_G(k) = \int_{\Gamma'} |c|_F^{-2}\phi(c^{-1}d)d_G(k).$$

ここで $d_G(g) = |\det g|_F^{-2}dg$ $(dg = \prod_{i,j} dg_ij)$ で

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} w^{-1} \begin{bmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & yw - x \\ z & zw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = g$$

とおくと $w = c^{-1}d$ で

$$dg = dy(|y|_F dw + |w|_F dy - dx)dz(|z|_F dw + |w|_F dz) = |z|_F dxdydzdw,$$

となる．よって

$$\langle \varphi, \psi_0 \rangle = \mathrm{const.} \times \int_F \phi(w)dw$$

となる．ここで $\phi = \varphi + c \cdot \phi_\delta$ $(\varphi \in \mathcal{S}(F))$ で，$|x|_F \geq 1$ では $\phi_\delta(x) = \delta(x)^{-1}|x|_F^{-1} = |x|_F^{-2}$ だから $\phi \in L^1(F)$ である．よって $\langle \varphi, \psi_0 \rangle = \mathrm{const.} \times \widehat{\phi}(0)$ となる．従って

$$\mathcal{S}_{\mu,\nu} = \{\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu} \mid \widehat{\phi}(0) = 0\}$$

となる．一般に $0 \in F$ の近傍で $\widehat{\phi}(t) = a \cdot |t|_F + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$ だから，$\varphi \in \mathcal{S}_{\mu,\nu}$ に対して，$0 \in F$ の近傍で $\xi_\varphi(t) = \nu(t)|t|_F^{1/2}\widehat{\phi}(t) = a \cdot |t|_F^{1/2}\mu(t)$ となる．■

定理 4.6.8 G-加群の同値

$$\pi_{\mu,\nu} \simeq \pi_{\nu,\mu}, \qquad \sigma_{\mu,\nu} \simeq \sigma_{\nu,\mu}$$

が成り立つ．

[**証明**] $\pi_{\mu,\nu}$ の中心指標は $\mu \cdot \nu$ だから，定理 4.5.2 より $\pi_{\mu,\nu}$ の反傾表現は $(\mu \cdot \nu)^{-1} \otimes \pi_{\mu,\nu} = \pi_{\nu^{-1},\mu^{-1}}$ である．一方，命題 4.6.1 より $\pi_{\mu,\nu}$ の反傾表現は $\pi_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ だから，$\pi_{\nu^{-1},\mu^{-1}} \simeq \pi_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ となる．同様に $\sigma_{\mu^{-1},\nu^{-1}} \simeq \sigma_{\nu^{-1},\mu^{-1}}$ を得る．■

4.7 尖点表現

定理 4.7.1 G の既約 C^∞-表現 (π, E) に対して次の同値である；

1) $E_{N,\mathbf{1}_N} = 0$ （即ち $E(N, \mathbf{1}) = E$ 75 頁参照），
2) $\mathcal{K}_\tau(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$,
3) 任意の $v \in E, \alpha \in E^\vee$ に対して $\{g \in G \mid \langle \pi(g)v, \alpha \rangle \neq 0\}$ は $G/F^\times$ 上コンパクトである．

このとき (π, E) を**尖点表現** と呼ぶ.

[**証明**] $v \in E$ をとる．イデアル $\mathfrak{a} \subset F$ と $t \in F^\times$ に対して，$|t|_F \to 0$ のとき $\tau(tx) = 1$ for $\forall x \in \mathfrak{a}$ だから

$$\int_{t\mathfrak{a}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t & 0\\0 & 1\end{bmatrix})vdx = |t|_F\pi(\begin{bmatrix}t & 0\\0 & 1\end{bmatrix})\int_{\mathfrak{a}} \tau(-x)\pi(\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 1\end{bmatrix})vdx$$

$$= |t|_F\pi(\begin{bmatrix}t & 0\\0 & 1\end{bmatrix})\int_{\mathfrak{a}} \pi(\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 1\end{bmatrix})vdx \quad \text{as } |t|_F \to 0.$$

ここで $\varphi_v = [t \mapsto \overline{\pi(\begin{bmatrix}t & 0\\0 & 1\end{bmatrix})v \in E_{N,\tau}}] \in \mathcal{K}_\tau(\pi)$ であったから，$v \in E(N, \mathbf{1}_N)$ は $\varphi_v \in \mathcal{K}_\tau(\pi)$ が $0 \in F$ の近傍で 0 となることと同値，即ち $\varphi_v \in \mathcal{S}(F^\times)$ と同値である．一般に $\mathcal{S}(F^\times) \subset \mathcal{K}_\tau(\pi)$ だから，1) と 2) が同値であることが判る.

2) $\Rightarrow$ 3) $\mathcal{K}_\tau(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$ とすると $\mathcal{K}_\tau(\pi^\vee) = \mathcal{K}_\tau(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$ である．よって自然な非退化双線形形式 $\langle , \rangle : E \times E^\vee \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{S}(F^\times)$ 上でみれば

$$\langle \xi, \xi' \rangle = \int_{F^\times} \xi(t)\xi'(-t)\chi_\pi(t^{-1})d^\times t \qquad (\xi, \xi' \in \mathcal{S}(F^\times))$$

となる（定理 4.5.2 の証明を参照）．ここで

$$G = \Gamma\left\{\begin{bmatrix}a & 0\\0 & d\end{bmatrix} \;\middle|\; a, d \in F^\times\right\}\Gamma$$

で，$\xi \in E^K, \xi' \in (E^\vee)^K$ なる開コンパクト部分群 $K \subset \Gamma$ をとれば $(\Gamma : K) < \infty$ であり

$$\varphi(t) = \langle \pi(\begin{bmatrix}t & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\xi, \xi' \rangle = \int_{F^\times} \xi(tu)\xi'(u)\chi_\pi(u^{-1})d^\times u \quad (t \in F^\times)$$

とおけば $\varphi \in \mathcal{S}(F^\times)$ だから，$\{g \in G \mid \langle \pi(g)\xi, \xi' \rangle \neq 0\}$ は $G/F^\times$ 上でコンパクトとなる.

3) $\Rightarrow$ 2) $\xi \in \mathcal{K}_\tau(\pi)$ をとる．任意の $\xi' \in \mathcal{S}(F^\times) \subset \mathcal{K}_\tau(\pi^\vee)$ に対して

$$\int_{F^\times} \xi(x)\xi'(-tx)\chi_\pi(x^{-1})d^\times x = \langle \pi(\begin{bmatrix}t^{-1} & 0\\0 & 1\end{bmatrix})\xi, \xi' \rangle \qquad (t \in F^\times)$$

は $t \in F^\times$ の関数として $F^\times$ のコンパクト集合の外で 0 となる．よって $\xi \in \mathcal{K}_\tau(\pi)$ は $0 \in F$ の近傍で 0 となるから $\varphi \in \mathcal{S}(F^\times)$ となる．よって $\mathcal{K}_\tau(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$ となる．■

定理 4.7.2 G の既約 C^∞-表現 (π, E) が尖点表現でないならば，π は主系列表現又は特殊表現と同値である．

[**証明**] $N_{G,\mathbf{1}_N}(N) = P$ だから，$E(N, \mathbf{1}_N) \subset E$ は P-部分加群である．ここで E は P-加群として有限生成である．実際，$0 \neq v \in E$ とすると，E は G-加群として v により生成される．$G = P\Gamma$ で，$v \in E^K$ なる開コンパクト部分群 $K \subset \Gamma$ をとれば $(\Gamma : K) < \infty$ だから，E は P-加群として有限集合 $\{\pi(k)v \mid \dot{k} \in \Gamma/K\}$ により生成される．仮定から $E(N, \mathbf{1}_N) \subsetneqq E$ だから，Zorn の補題から $E(N, \mathbf{1}_N) \subset V \subsetneqq E$ なる極大 P-部分加群が存在する．このとき E/V は単純 P-加群であるが，N の作用は自明だから，可換群 $P/N \simeq F^\times \times F^\times$ の表現として既約である．よって $\dim_{\mathbb{C}} E/V = 1$ となり，$F^\times$ の連続指標 μ, ν をとって P-加群の同型

$$E/V \simeq (\mu \cdot |\cdot|_F^{1/2}) \otimes (\nu \cdot |\cdot|_F^{-1/2})$$

が成り立つ．ここで自然写像 $E \to E/V$ は $\mathrm{Hom}_P(\pi|_P, (\mu \cdot |\cdot|_F^{1/2}) \otimes (\nu \cdot |\cdot|_F^{-1/2}))$ の非自明な元を与えるから，定理 3.8.2 より $\mathrm{Hom}_G(E, \mathcal{B}_{\mu,\nu}) \neq 0$ となり，π は主系列表現又は特殊表現となる．■

系 4.7.3 G の既約 C^∞-表現は全て許容表現である．

[**証明**] (π, E) を G の既約 C^∞-表現とする．π が尖点表現ならば，命題 3.11.3 より (π, E) は許容表現である．π が尖点表現でないならば，定理 4.7.2 より π は $\mathcal{B}_{\mu,\nu}$ の部分表現と同値である．$G = \Gamma P$ だから G/P はコンパクトだから，系 3.6.3 より $\mathcal{B}_{\mu,\nu}$ は許容表現，従って (π, E) も許容表現となる．■

命題 4.7.4 G の尖点表現 (π, E) の Kirillov 空間 $\mathcal{K}_\tau(\pi)$ 上で

1) 任意の $\nu \in \widehat{O_F^\times}$ に対して $n(\nu) \in \mathbb{Z}$ があって

$$J_\pi(t, \nu) \neq 0 \iff \mathrm{ord}_F(t) = n(\nu).$$

2) $n(\nu^{-1}\chi_\pi) = n(\nu)$ で，$\mathrm{ord}_F(t) = n(\nu)$ ならば

$$J_\pi(t, \nu^{-1}\chi_\pi) = \chi_\pi(-t^{-1})J_\pi(t, \nu)^{-1}.$$

[証明] $\varphi \in \mathcal{S}(F^\times) = \mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して，$\pi(w)\varphi \in \mathcal{S}(F^\times)$ かつ $\pi(w^2)\varphi = \chi_\pi(-1)\varphi$ である．特に $\nu \in \widehat{O_F^\times}$ に対して $\varphi = \phi_\nu \in \mathcal{S}_\nu(F^\times)$ とおけば（ϕ_ν の定義は 128 頁参照），$\pi(w)\phi_\nu \in \mathcal{S}_{\nu^{-1}\chi_\pi}(F^\times)$ となるから

$$\begin{aligned}
\chi_\pi(-1)\phi_\nu(t) &= \chi_\pi(t)\int_{F^\times} J_\pi(ts, \nu^{-1}\chi_\pi)(\pi(w)\phi_\nu)(s)d^\times s \\
&= \chi_\pi(t)\int_{F^\times} J_\pi(ts, \nu^{-1}\chi_\pi)\left(\chi_\pi(s)\int_{F^\times} J_\pi(su, \nu)\phi_\nu(u)d^\times u\right)d^\times s \\
&= \chi_\pi(t)\int_{F^\times} \chi_\pi(s)J_\pi(ts, \nu^{-1}\chi_\pi)J_\pi(s, \nu)d^\times s \\
&= \chi_\pi(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{O_F^\times} \chi_\pi(\varpi^n s)J_\pi(t\varpi^n s, \nu^{-1}\chi_\pi)J_\pi(\varpi^n s, \nu)d^\times s \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_\pi(t\varpi^n)J_\pi(t\varpi^n, \nu^{-1}\chi_\pi)J_\pi(\varpi^n, \nu).
\end{aligned}$$

よって $t = \varpi^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ とおいて

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_\pi(-\varpi^{n+p})J_\pi(\varpi^{n+p}, \nu^{-1}\chi_\pi)J_\pi(\varpi^n, \nu) = \begin{cases} 1 & : p = 0, \\ 0 & : p \neq 0 \end{cases}$$

となる．そこで

$$a_n = \chi_\pi(-\varpi^n)J_\pi(\varpi^n, \nu^{-1}\chi_\pi), \qquad b_n = J_\pi(\varpi^n, \nu) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m X^{-m}\right) &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n b_m X^{n-m} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n+p}b_n X^p = 1.
\end{aligned}$$

よって $n_0 \in \mathbb{Z}$ があって

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n = a_{n_0}X^{n_0}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n X\ -n = b_{n_0}X^{-n_0}$$

で $a_{n_0}b_{n_0}=1$ となる．■

命題 4.7.5 G の尖点表現 (π, E) の Kirillov 空間 $\mathcal{K}_\tau(\pi)$ 上で，$a, b \in F^\times$, $\mu, \nu \in \widehat{O_F^\times}$ に対して

$$\int_{F^\times} J_\pi(at,\mu)J_\pi(bt,\nu)\chi_\pi(t)\tau(-t)d^\times t$$
$$= \sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}} G(\mu\alpha^{-1},a)G(\nu\alpha^{-1},b)J_\pi(ab,\alpha).$$

[**証明**] $w\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}w^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}w\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$ より

$$\pi(w\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}w^{-1})\varphi = \pi(\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}w\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix})\varphi \text{ for } \forall\varphi\in\mathcal{S}(F^\times)=\mathcal{K}_\tau(\pi).$$

特に $\varphi\in\mathcal{S}_\nu(F^\times)$ $(\nu\in\widehat{O_F^\times})$ として

$$\begin{aligned}&\left(\pi(w\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}w^{-1})\varphi\right)(t)\\ =&\chi_\pi(t)\sum_{\alpha\in\widehat{O_F^{times}}}\int_{F^\times}J_\pi(ts,\alpha)\tau(s)\left(\pi(w^{-1})\varphi\right)(s)d^\times s\\ =&\chi_\pi(t)\sum_{\alpha\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times}d^\times s\int_{F^\times}d^\times u J_\pi(ts,\alpha)\tau(s)\cdot\chi_\pi(-s)J_\pi(su,\nu)\varphi(u),\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}&\left(\pi(\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}w\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix})\varphi\right)(t) = \tau(-t)\left(\pi(w\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix})\varphi\right)(t)\\ =&\tau(-t)\chi_\pi(t)\sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times}J_\pi(ts,\alpha)\tau(-s)\varphi(s)d^\times s.\end{aligned}$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\chi_\pi(-1)\sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times}d^\times s\int_{F^\times}d^\times u J_\pi(ts,\alpha)J_\pi(su,\nu)\tau(s)\chi_\pi(s)\varphi(u)\\
=&\tau(-t)\sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times}J_\pi(ts,\alpha)\tau(-s)\varphi(s)d^\times s.
\end{aligned}
$$

ここで $\varphi(s)=\phi_\nu(b^{-1}s)$ $(b\in F^\times)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}=&\chi_\pi(-1)\sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times}d^\times s\int_{O_F^\times}d^\times u J_\pi(ts,\alpha)J_\pi(sbu,\nu)\tau(s)\chi_\pi(s)\nu(u)\\
=&\chi_\pi(-1)\sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times}J_\pi(ts,\alpha)J_\pi(sb,\nu)\tau(s)\chi_\pi(s),\\
\text{右辺}=&\tau(-t)\sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}}\int_{O_F^\times}J_\pi(tbs,\alpha)\tau(-bs)\nu(s)d^\times s
\end{aligned}
$$

だから，両辺に $\phi_\mu(a^{-1}t)$ を掛けて $t\in F^\times$ で積分すれば

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}=&\chi_\pi(-1)\sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}}\int_{F^\times}d^\times t\int_{F^\times}d^\times s J_\pi(ts,\alpha)J_\pi(bs,\nu)\tau(s)\chi_\pi(s)\phi_\mu(a^{-1}t)\\
=&\chi_\pi(-1)\sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}}\int_{O_F^\times}d^\times t\int_{F^\times}d^\times s J_\pi(ats,\alpha)J_\pi(bs,\nu)\tau(s)\chi_\pi(s)\mu(t)\\
=&\chi_\pi(-1)\int_{F^\times}d^\times s J_\pi(as,\mu)J_\pi(bs,\nu)\tau(s)\chi_\pi(s),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}} \int_{F^\times} d^\times t \int_{O_F^\times} d^\times s \tau(-t) J_\pi(tbs,\alpha)\tau(-bs)\nu(s)\phi_\mu(a^{-1}t) \\
&= \sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}} \int_{O_F^\times} d^\times t \int_{O_F^\times} d^\times s \tau(-at) J_\pi(atbs,\alpha)\tau(-bs)\nu(s)\mu(t) \\
&= \sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}} J_\pi(ab,\alpha)\cdot \int_{O_F^\times} (\alpha^{-1}\mu)(t)\tau(-at)d^\times t \cdot \int_{O_F^\times} (\alpha^{-1}\nu)(s)\tau(-bs)d^\times s \\
&= \sum_{\alpha\in\widehat{O_F^\times}} J_\pi(ab,\alpha)G(\alpha^{-1}\mu,a)G(\alpha^{-1}\nu,b)
\end{aligned}
$$

となり，求める等式を得る．■

命題 4.7.6 命題 4.7.4 の記号を用いると，G の尖点表現 (π, E) について，任意の $\nu \in \widehat{O_F^\times}$ に対して $n(\nu) \leq -2(d+1)$ である．

[**証明**] 命題 4.7.5 で $\nu = \mu^{-1}\chi_\pi$, $a = b$ とおくと，$n = n(\mu)$ として

$$
\begin{aligned}
&\int_{F^\times} J_\pi(at,\mu)J_\pi(at,\mu^{-1}\chi_\pi)\chi_\pi(t)\tau(-t)d^\times t \\
=&\int_{F^\times} J_\pi(t,\mu)J_\pi(t,\mu^{-1}\chi_\pi)\chi_\pi(a^{-1}t)\tau(-a^{-1}t)d^\times t \\
=&\int_{F^\times} J_\pi(\varphi^n t,\mu)J_\pi(\varpi^n s,\mu^{-1}\chi_\pi)\chi_\pi(a^{-1}\varpi^n t)\tau(-a^{-1}\varpi^n t)d^\times t \\
=&J_\pi(\varpi^n,\mu)J_\pi(\varpi^n,\mu^{-1}\chi_\pi)\chi_\pi(a^{-1}\varpi^n)\cdot G(1,-a^{-1}\varpi^n)
\end{aligned}
$$

で，$n - \mathrm{ord}_F(a) \geq -d-1$ ならば $G(1,-a^{-1}\varpi^n) \neq 0$ である（定理 4.1.2 ）．よって $\mathrm{ord}_F(a) \leq n+d+1$ のとき

$$
G(\mu\alpha^{-1},a)G(\mu^{-1}\chi_\pi\alpha^{-1},a)J_\pi(a^2,\alpha) \neq 0
$$

なる $\alpha \in \widehat{O_F^\times}$ が存在する．そこで $\mathrm{ord}_F(a) = n+d+1$ として，$\alpha = \mu$ ならば，$J_\pi(a^2,\mu) \neq 0$ より $n(\mu) = \mathrm{ord}_F(a^2) = 2(n(\mu)+d+1)$ となり $n(\mu) = -2(d+1)$ である．$\alpha \neq \mu$ のときは，$G(\mu\alpha^{-1},a) \neq 0$ より $\mathrm{ord}_F(a) = -d-f$（定理 4.1.2）だから $n+d+1 = \mathrm{ord}_F(a) \leq -d-1$ となり $n(\mu) \leq -2(d+1)$ を得る．■

4.8　Γ_n-不変ベクトル

$0 \le n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\Gamma_n &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(O_F) \mid c \in \mathfrak{p}^n \right\} \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, d \in O_F^\times, b \in O_F, c \in \mathfrak{p}^n \right\rangle.
\end{aligned}
$$

[**証明**] $n > 0$ のとき．$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_n$ とすると，$d \in O_F^\times$ で

$$
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{-1}(ad-bc) & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d^{-1}c & 1 \end{bmatrix}.
$$

$n = 0$ のとき．$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_n$ に対して，$c \in \mathfrak{p}$ ならば $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_1$ だからよい．$c \in O_F^\times$ のとき

$$
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -c^{-1}(ad-bc) \\ c & 0 \end{bmatrix}
$$

となり．$a, c \in O_F^\times, b \in O_F$ に対して

$$
\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(1+bc) & -ac^{-1} \\ c & 0 \end{bmatrix}.
$$

■

そこで G の無限次元既約許容表現 (π, E) に対して

$$
\begin{aligned}
E_0 &= E^\Gamma \qquad (\Gamma = \Gamma_0 = GL_2(O_F)), \\
E_n &= \left\{ v \in E \mid \pi(k)v = \chi_\pi(d)v \text{ for } \forall k = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_n \right\}
\end{aligned}
$$

とおく．

命題 4.8.1 1) $n > 0$ に対して $E_n \neq 0$ ならば，任意の $\varepsilon \in 1 + \mathfrak{p}^n \subset O_F^\times$ に対して $\chi_\pi(\varepsilon) = 1$ である．よってこのとき

$$\Gamma_n \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \chi_\pi(d) \in \mathbb{C}^\times$$

は群準同型写像となる．

2) $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$E_n = \left\{ v \in E \;\middle|\; \begin{matrix} 1)\ \pi(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = v \text{ for } \forall a \in O_F^\times, \\ 2)\ \pi(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v = v \text{ for } \forall b \in O_F, \\ 3)\ \pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix})v = v \text{ for } \forall c \in \mathfrak{p}^n \end{matrix} \right\}.$$

[**証明**] 1) $\varepsilon \in 1 + \mathfrak{p}^n$ に対して

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon - 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon^{-1} - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

だから $\chi_\pi(\varepsilon) = \pi(\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}) = 1$．このとき $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}^n}$ なる $\alpha, \beta \in O_F^\times$ に対して $\chi_\pi(\alpha) = \chi_\pi(\beta)$ だから

$$kl \equiv \begin{bmatrix} a\alpha & * \\ 0 & d\delta \end{bmatrix} \pmod{\mathfrak{p}^n} \text{ for } k = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, l = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \Gamma_n$$

より $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \chi_\pi(d)$ は群準同型写像となる．

2) 左辺 $\subset$ 右辺は明らか．$n > 0$ のとき．$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_n$ に対して，$d \in O_F^\times$ で

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{-2}(ad - bc) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d^{-1}c & 1 \end{bmatrix}$$

かつ $\pi(\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}) = \chi_\pi(d)$ だから，左辺 $\supset$ 右辺を得る．$n=0$ のとき．$a \in O_F^\times$ に対して

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}-a & 1 \end{bmatrix}$$

だから，右辺 $\neq 0$ ならば $\chi_\pi(a) = 1$ for $\forall a \in O_F^\times$ となり，左辺 $\supset$ 右辺を得る．■

定理 4.8.2 $N = \mathrm{Min}\{0 \leq n \in \mathbb{Z} \mid E_n \neq 0\}$ とおくと，$\dim_{\mathbb{C}} E_N = 1$ で

$$E_n = \bigoplus_{i=0}^{n-N} \pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^i \end{bmatrix}) E_N \text{ for } n \geq N.$$

[証明] τ を $\mathfrak{f} = O_F$ となるようにとって，π の Kirillov 空間 $E = \mathcal{K}_\tau(\pi) \subset C^\infty(F^\times)$ 上で考える．

$$(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi)(t) = \tau(bt)\varphi(at) \text{ for } a \in F^\times, b \in F, \varphi \in C\ \infty(F^\times)$$

だから，$\varphi \in E_n$ に対して，$\varphi(t) \neq 0$ ならば $\tau(tO_F) = 1$，よって $t \in \mathfrak{f} = O_F$ となり，$n \geq 0$ に対して

$$E_n = \left\{ \varphi \in E = \mathcal{K}_\tau(\pi) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \varphi(at) = \varphi(t) \text{ for } \forall a \in O_F^\times, \\ 2)\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset O_F, \\ 3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \varphi = \varphi \text{ for } \forall c \in \mathfrak{p}^n \end{array} \right\}$$

となる．ここで $\varphi \in \mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して

$$(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^i \end{bmatrix} \varphi)(t) = \chi_\pi(\varpi^i)\varphi(\varpi^{-i}t) \qquad (i \in \mathbb{Z}),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{-i}c & 1 \end{bmatrix}$$

だから，$n \geq 0, i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\pi(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \varpi^i\end{bmatrix})E_n = \left\{ \varphi \in E = \mathcal{K}_\tau(\pi) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \varphi(at) = \varphi(t) \text{ for } \forall a \in O_F^\times, \\ 2)\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathfrak{p}^i, \\ 3)\ \begin{bmatrix}1 & 0\\c & 1\end{bmatrix}\varphi = \varphi \text{ for } \forall c \in \mathfrak{p}^{n+i} \end{array} \right\}$$

となる．まず

$$\pi(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \varpi^i\end{bmatrix})E_N \cap E_{N+i-1} = 0 \text{ for } \forall i > 0 \tag{4.6}$$

である．実際，$N > 0$ のとき．

$$E_N \cap \pi(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \varpi^{-i}\end{bmatrix})E_{N+i-1} = N_{N-1} = 0.$$

$N = 0$ のとき．$v \in E_0 \cap \pi(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \varpi^{-i}\end{bmatrix})E_{i-1}$ とすると，任意の $b \in O_F, c \in \mathfrak{p}^{-1}$ に対して

$$\pi(\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix})v = v, \qquad \pi(\begin{bmatrix}1 & 0\\c & 1\end{bmatrix})v = v$$

であり

$$\begin{bmatrix}\varpi & 0\\0 & \varpi^{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \varpi\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\\varpi^{-1}(\varpi - 1) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1-\varpi & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

より

$$SL_2(F) = \left\langle \begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\c & 1\end{bmatrix} \mid b \in O_F, c \in \mathfrak{p}^{-1} \right\rangle$$

であるから

$$\pi(g)v = v \text{ for } \forall g \in SL_2(F), \qquad \pi(\begin{bmatrix}a & 0\\0 & 1\end{bmatrix})v = v \text{ for } \forall a \in O_F^\times$$

$$\pi(\begin{bmatrix}\varpi^2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix})v = \chi_\pi(\varpi)\pi(\begin{bmatrix}\varpi & 0\\0 & \varpi^{-1}\end{bmatrix})v = \chi_\pi(\varpi)v$$

となる．よって $v \neq 0$ とすると

$$E = \langle \pi(g)v \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}} = \left\langle v, \pi(\begin{bmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})v \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

は有限次元空間となり矛盾する．

次に，任意の $n \geq 0$ に対して $\dim_{\mathbb{C}}(E_{n+1}/E_n) = 1$ である．実際，$n > N$ に対して(4.6) より

$$\pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{n-N} \end{bmatrix})E_N \cap E_{n-1} = 0, \qquad \pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{n-N} \end{bmatrix})E_N \subset E_n$$

だから $\dim_{\mathbb{C}}(E_{n+1}/E_n) \geq 1$ $(\forall n \geq 0)$ である．一方，$\varphi \in E_{n+1} \subset \mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して，$\varphi(at) = \varphi(t)$ for $\forall a \in O_F^\times$ かつ $\mathrm{supp}(\varphi) \subset O_F$ だから，$\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathfrak{p}$ となる必要十分条件は $\varphi(1) = 0$ なることである．よって

$$\begin{aligned} \pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{bmatrix})E_n &= \left\{ \varphi \in E = \mathcal{K}_\tau(\pi) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \varphi(at) = \varphi(t) \text{ for } \forall a \in O_F^\times, \\ 2)\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathfrak{p}^i, \\ 3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \varphi = \varphi \text{ for } \forall c \in \mathfrak{p}^{n+1} \end{array} \right\} \\ &= \mathrm{Ker}[E_{n+1} \ni \varphi \mapsto \varphi(1) \in \mathbb{C}] \end{aligned}$$

となる．よって

$$\dim_{\mathbb{C}} E_n = \dim_{\mathbb{C}} \pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{bmatrix})E_n \leq \dim_{\mathbb{C}} E_{n+1} - 1$$

となる．よって $\dim_{\mathbb{C}} E_N = 1$ かつ

$$E_{N+i} = \pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^i \end{bmatrix})E_N \oplus E_{N+i-1} \text{ for } \forall i > 0$$

となり，求める直和分解を得る．■

定理 4.8.3 G の無限次元既約許容表現 (π, E) に対して，$E^\Gamma \neq 0$ なる必要十分条件は

$$\pi = \pi_{\mu,\nu} \text{ with } \mu, \nu \in \widehat{F^\times} \text{ s.t. } \mu|_{O_F^\times} = \nu|_{O_F^\times} = 1$$

なることである．このとき $\dim_{\mathbb{C}} E^\Gamma = 1$ である．

[**証明**] $G = P\Gamma$ で，$\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ に対して

$$\varphi(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} k) = \mu(a)\nu(d)|a/d|_F^{1/2}\varphi(k) \text{ for } a, d \in F^\times, b \in F, k \in \Gamma$$

だから，$\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}$ は $\varphi|_\Gamma$ により定まり，$\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu}^\Gamma$ ならば $\varphi|_\Gamma = C \in \mathbb{C}$（定数関数）で

$$\varphi(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} k) = C \cdot \mu(a)\nu(d)|a/d|_F^{1/2} \qquad (a, d \in F^\times, b \in F).$$

よって $\varphi \neq 0$ ならば $C \neq 0$ で，$\mu|_{O_F^\times} = \nu|_{O_F^\times} = 1$ であり $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_{\mu,\nu}^\Gamma = 1$ である．よって $\pi = \pi_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu \in \widehat{F^\times}$ s.t. $\mu\nu^{-1} =\neq |\cdot|_F^{\pm 1})$ のときは上の通り．$\pi = \sigma_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu \in \widehat{F^\times}$ s.t. $\mu\nu^{-1} = |\cdot|_F)$ のとき

$$E = \{\varphi \in \mathcal{B}_{\mu,\nu} \mid \langle \varphi, \psi_0 \rangle = 0\} \qquad (\psi 0(g) = \mu^{-1}(\det g)|\det g|_F^{1/2})$$

である．$0 \neq \varphi \in E^\Gamma$ とすると，$\varphi|_\Gamma = C \in \mathbb{C}$ かつ

$$0 = \langle \varphi, \psi_0 \rangle = \int_\Gamma \varphi(k) d_G k = C \cdot \int_\gamma d_G k$$

より $C = 0$ となり，矛盾する．$\pi = \sigma_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu \in \widehat{F^\times}$ s.t. $\mu\nu^{-1} = |\cdot|_F^{-1})$ のとき，$0 \neq \varphi \in E^\Gamma$ ならば

$$\langle \varphi, \pi^\vee(k)\psi \rangle = \langle \pi(k^{-1})\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle \text{ for } \forall k \in \Gamma, \psi \in E^\vee$$

より，$\langle \varphi, \psi \rangle \neq 0$ なる $\psi \in E^\vee$ をとれば，$0 \neq \psi \in (E^\vee)^\Gamma$ となる．ここで $\pi^\vee = \sigma_{\mu^{-1},\nu^{-1}}$ だから，上で見たとおりこれは矛盾．π が尖点表現のとき，$\mathfrak{f} = O_F$ なる τ に関する Kirillov 空間 $\mathcal{K}_\tau(\pi) = \mathcal{S}(F^\times)$ 上で

$$E^\Gamma = \left\{ \varphi \in \mathcal{S}(F^\times) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ \varphi(at) = \varphi(t) \text{ for } \forall a \in O_F^\times, \\ 2)\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset O_F, \\ 3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \varphi = \varphi \text{ for } \forall c \in O_F \end{array} \right\}$$

である．$\varphi \in E^\Gamma$ とすると，$\pi(w)\varphi = \varphi$ $\left(w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma\right)$ だから

$$\varphi(t) = \chi_\pi(t) \sum_{\nu \in \widehat{O_F^\times}} J_\pi(ts, \nu)\varphi(s)d^\times s \qquad (t \in F^\times).$$

ここで $d = 1$ だから，$t \in O_F$ ならば $J_\pi(t, \nu) = 0$，よって $\varphi = 0$. ■

4.9　GL_1 上のゼータ積分

T を変数とする複素係数形式的 Laurent 級数の全体

$$\mathbb{C}((T)) = \left\{ \sum_{n \geq n_0} a_n T^n \mid n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

は，複素係数形式的冪級数の環 $\mathbb{C}[[T]]$ の分数体である．

以下，$F^\times$ の連続指標 χ を固定しておく．$\varphi \in \mathcal{S}(F)$ に対して

$$z_m(\varphi, \chi) = \int_{\varpi^m O_F^\times} \varphi(x)\chi(x)d^\times x \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

とおくと，$|z_m(\varphi, \chi)| \leq \mathrm{Max}_{x \in \varpi^m O_F^\times} |\varphi(x)| \cdot |\chi(\varpi)|^m$ だから，$m \ll 0$ ならば $z_m(\varphi, \chi) = 0$ となり

$$Z(\varphi, \chi, T) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z_m(\varphi, \chi) T^m \in \mathbb{C}((T))$$

は形式的 Laurent 級数となる．$a \in F^\times$ に対して

$$\begin{aligned} z_m(a \cdot \varphi, \chi) &= \int_{\varpi^m O_F^\times} \varphi(a^{-1}x)\chi(x)d^\times x \\ &= \int_{a^{-1}\varpi^m O_F^\times} \varphi(x)\chi(ax)d^\times(ax) = \chi(a) z_{m-\mathrm{ord}_F(a)}(\varphi, \chi) \end{aligned}$$

より

$$Z(a \cdot \varphi, \chi, T) = \chi(a) T^{\mathrm{ord}_F(a)} Z(\varphi, \chi, T)$$

となるから，複素ベクトル部分空間

$$\mathcal{Z}(\chi) = \{Z(\varphi, \chi, T) \mid \varphi \in \mathcal{S}(F)\} \subset \mathbb{C}((T))$$

は $\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$-部分加群である．$\varphi_0 \in \mathcal{S}(F)$ を O_F の特性関数とすると，$z_m(\varphi, \chi) = 0$ for $m < 0$．一方，$m \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} z_m(\varphi_0, \chi) &= \int_{\varpi O_F^\times} \chi(x) d^\times x = \chi(\varpi^m) \int_{O_F^\times} \chi(x) d^\times x \\ &= \begin{cases} \chi(\varpi)^m & : \chi|_{O_F^\times} = 1, \\ 0 & : \chi|_{O_F^\times} \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

より

$$Z(\varphi_0, \chi, T) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m \geq 0} \chi(\varpi)^m T^m = (1 - \chi(\varpi)T)^{-1} & : \chi|_{O_F^\times} = 1, \\ 0 & : \chi|_{O_F^\times} \neq 1 \end{cases}$$

となる．$\chi|_{O_F^\times} \neq 1$ のとき，$n = \mathrm{Min}\{0 < n \in \mathbb{Z} \mid \chi(1 + \mathfrak{p}^n) = 1\}$ として，$1 + \mathfrak{p}^n$ の特性関数を $\varphi_n \in \mathcal{S}(F)$ とすると

$$\begin{aligned} z_m(\varphi, \chi) &= \int_{\varpi^m O_F^\times} \varphi_n(x) \chi(x) d^\times x \\ &= \begin{cases} 0 & : m \neq 0, \\ \displaystyle\int_{1+\mathfrak{p}^n} d^\times x = (O_F^\times : 1 + \mathfrak{p}^n)^{-1} = \left|(O_F/\mathfrak{p}^n)^\times\right|^{-1} & : m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となるから

$$Z(\varphi_n, \chi, T) = \left|(O_F/\mathfrak{p}^n)^\times\right|^{-1} \in \mathbb{C}$$

となる．そこで

$$L(\chi, T) = \begin{cases} (1 - \chi(\varpi)T)^{-1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \chi(\varpi)^m T^m & : \chi|_{O_F^\times} = 1, \\ 1 & : \chi|_{O_F^\times} \neq 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

とおくと

命題 4.9.1 $\mathcal{Z}(\chi) = L(\chi, T)\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ である．よって特に

$$\frac{Z(\varphi, \chi, T)}{L(\chi, T)} \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}] \text{ for } \forall \varphi \in \mathcal{S}(F).$$

[**証明**] $\mathcal{S}(F^\times) = \{\varphi \in \mathcal{S}(F) \mid \varphi(0) = 0\}$ と同一視して，$\varphi_0 \in \mathcal{S}(F)$ を O_F の特性関数とすると，$\mathcal{S}(F) = \mathcal{S}(F^\times) \oplus \mathbb{C}\varphi_0$ である．$\varphi \in \mathcal{S}(F^\times)$ とすると，$m \gg 0$ ならば $\mathrm{supp}(\varphi) \cap \varpi^m O_F^\times = \emptyset$ となるから，$z_m(\varphi, \chi) = 0$ for $|m| \gg 0$, 従って $Z(\varphi, \chi, T) \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ となる．$\chi|_{O_F^\times} = 1$ のときには，O_F の特性関数 $\varphi_0 \in \mathcal{S}(F)$ に対して

$$Z(\varphi_0, \chi, T) = L(\chi, T) = (1 - \chi(\varpi)T)^{-1}$$

だから，$\mathcal{Z}(\chi) = L(\chi, T)\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ となる．$\chi|_{O_F^\times} \neq 1$ のときには，$Z(\varphi_0, \chi, T) = 0$ で $Z(\varphi, \chi, T) = 1$ となる $\varphi \in \mathcal{S}(F)$ があるから，$\mathcal{Z}(\chi) = \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ となる．■

ここで

補題 4.9.2 $\mathbb{C}(T)$-ベクトル空間

$$\Lambda(\chi) = \left\{ \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(F), \mathbb{C}(T)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda(a \cdot \varphi) = \chi(a) T^{\mathrm{ord}_F(a)} \lambda(\varphi) \\ \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{S}(F), a \in F^\times \end{array} \right\}$$

に対して $\dim_{\mathbb{C}(T)} \Lambda(\chi) = 1$ である．

[**証明**] まず $[\varphi \mapsto Z(\varphi, \chi, T)] \in \Lambda(\chi)$ だから $\Lambda(\chi) \neq \{0\}$．$0 < k \in \mathbb{Z}$ に対して $1 + \mathfrak{p}^k$ の特性関数を $\varphi_k \in \mathcal{S}(F)$ とする．$\chi(1 + \mathfrak{p}^n) = 1$ $(0 < n \in \mathbb{Z})$ として，$\mathbb{C}(T)$-線形写像

$$\Lambda(\chi) \ni \lambda \mapsto \lambda(\varphi_n) \in \mathbb{C}(T)$$

が単射であることを示す．実際，$\lambda \in \Lambda(\chi)$ に対して $\lambda(\varphi_n) = 0$ とする．任意の $a \in 1 + \mathfrak{p}^n$ と $k > 0$ に対して

$$\lambda(a \cdot \varphi_k) = \chi(a) T^{\mathrm{ord}_F(a)} \lambda(\varphi_k) = \lambda(\varphi_k)$$

だから，$k \geq n$ に対して $1+\mathfrak{p}^n = \bigsqcup_i a_i(1+\mathfrak{p}^k)$ とおくと $\varphi_n = \sum_i a_i \cdot \varphi_k$ となるから

$$0 = \lambda(\varphi_n) = \sum_i \lambda(a_i \cdot \varphi_k) = (1+\mathfrak{p}^n : 1+\mathfrak{p}^k)\lambda(\varphi_k)$$

より，$\lambda(\varphi_k) = 0$ for $\forall k \geq n$ である．ここで

$$\mathcal{S}(F^\times) = \langle a \cdot \varphi_k \mid a \in F^\times, k \geq n \rangle_{\mathbb{C}}$$

だから，$\lambda(\varphi) = 0$ for $\forall\varphi \in \mathcal{S}(F^\times)$ となる．O_F の特性関数を $\varphi_0 \in \mathcal{S}(F)$ とおくと $\mathcal{S}(F) = \mathcal{S}(F^\times) \oplus \mathbb{C}\varphi_0$ だから，$\varphi = \varphi_1 + \alpha\varphi_0 \in \mathcal{S}(F)$ ($\varphi_1 \in \mathcal{S}(F^\times), \alpha \in \mathbb{C}$) に対して

$$\lambda(\varphi) = \alpha \cdot \lambda(\varphi_0) = \lambda(\varphi_0) \cdot \varphi(0)$$

となるから，任意の $a \in F^\times$ に対して

$$\lambda(\varphi) = \lambda(a \cdot \varphi) = \chi(a) T^{\mathrm{ord}_F(a)} \lambda(\varphi)$$

となるから，$\lambda(\varphi) = 0$．よって $\lambda = 0$ となる．■

命題 4.9.3 $c_\tau(\chi, T) \in \mathbb{C}(T)$ があって，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(F)$ に対して

$$Z(\widehat{\varphi}, \chi^{-1}, (qT)^{-1}) = c_\tau(\chi, T) \cdot Z(\varphi, \chi, T)$$

が成り立つ．

[**証明**] $\varphi \in \mathcal{S}(F)$ と $a \in F^\times$ に対して

$$\begin{aligned} \widehat{a \cdot \varphi}(y) &= \int_F \varphi(a^{-1}x)\tau(-xy)dx \\ &= \int_F \varphi(x)\tau(-axy)d(ax) = |a|_F \widehat{\varphi}(ay) \end{aligned}$$

だから $\widehat{a \cdot \varphi} = |a|_F a^{-1} \cdot \widehat{\varphi}$．よって $\mathbb{C}$-線形写像

$$\lambda : \mathcal{S}(F) \ni \varphi \mapsto Z(\widehat{\varphi}, \chi^{-1}, (qT)^{-1}) \in \mathbb{C}(T)$$

に対して

$$\begin{aligned}\lambda(a\cdot\varphi) &= Z(|a|_F a^{-1}\cdot\widehat{\varphi},\chi^{-1},(qT)^{-1})\\ &= |a|_F\chi(a)(qT)^{\mathrm{ord}_F(a)}Z(\widehat{\varphi},\chi^{-1},(qT)^{-1}) = \chi(a)T^{\mathrm{ord}_F(a)}\lambda(\varphi)\end{aligned}$$

だから，$\lambda\in\Lambda(\chi)$ である．一方

$$[\varphi\mapsto Z(\varphi,\chi,T)]\in\Lambda(\chi)$$

だから，補題 4.9.2 より，上の通り．■

$$\varepsilon_\tau(\chi,T) = c_\tau(\chi,T)\cdot\frac{L(\chi,T)}{L(\chi^{-1},(qT)^{-1})}\in\mathbb{C}(T)$$

とおくと

$$\frac{Z(\widehat{\varphi},\chi^{-1},(qT)^{-1})}{L(\chi^{-1},(qT)^{-1}} = \varepsilon_\tau(\chi,T)\cdot\frac{Z(\varphi,\chi,T)}{L(\chi,T)}\quad\text{for }\forall\varphi\in\mathcal{S}(F)$$

である．

命題 4.9.4　1) $\varepsilon_\tau(\chi,T)\cdot\varepsilon_\tau(\chi^{-1},(qT)^{-1}) = \chi(-1)$,
2) $\varepsilon_\tau(\chi,T) = a(\tau,\chi)T^{n(\tau,\chi)}$ $(a(\tau,\chi)\in\mathbb{C}, n(\tau,\chi)\in\mathbb{Z})$.

[**証明**] 1) 任意の $\varphi\in\mathcal{S}(F)$ に対して

$$\begin{aligned}Z(\widehat{\widehat{\varphi}},\chi,T) &= c_\tau(\chi^{-1},(qT)^{-1})Z(\widehat{\varphi},\chi^{-1},(qT)^{-1})\\ &= c_\tau(\chi^{-1},(qT)^{-1})c_\tau(\chi,T)Z(\varphi,\chi,T)\end{aligned}$$

となるが，$\widehat{\widehat{\varphi}} = (-1)\cdot\varphi$ だから

$$Z(\widehat{\widehat{\varphi}},\chi,T) = \chi(-1)Z(\varphi,\chi,T)$$

となる．よって $c_\tau(\chi^{-1},(qT)^{-1})c_\tau(\chi,T) = \chi(-1)$．よって

$$\begin{aligned}&\varepsilon_\tau(\chi,T)\cdot\varepsilon_\tau(\chi^{-1},(qT)^{-1})\\ =&c_\tau(\chi,T)\frac{L(\chi,T)}{L(\chi^{-1},(qT)^{-1})}\cdot c_\tau(\chi^{-1},(qT)^{-1})\cdot\frac{L(\chi^{-1},(qT)^{-1})}{L(\chi,T)}\\ =&c_\tau(\chi,T)\cdot c_\tau(\chi^{-1},(qT)^{-1}) = \chi(-1).\end{aligned}$$

2) $Z(\varphi,\chi,T)=L(\chi,T)$ となる $\varphi_0\in\mathcal{S})(F)$ がとれるから

$$\varepsilon_\tau(\chi,T)=\frac{Z(\widehat{\varphi},\chi^{-1}(qT)^{-1})}{L(\chi^{-1},(qT)^{-1})}\in\mathbb{C}[T^{\pm1}].$$

更に 1) より $\varepsilon_\tau(\chi,T)\in\mathbb{C}[T^{\pm1}]^\times$ だから $\varepsilon_\tau(\chi,T)=aT^n$ $(a\in\mathbb{C},n\in\mathbb{Z})$ となる．■

定理 4.9.5 1) $\chi|_{O_F^\times}=1$ のとき

$$\varepsilon_\tau(\chi,T)=q^{d/2}\chi(\varpi)^d\cdot T^d.$$

2) $\chi|_{O_F^\times}\neq 1$ のとき，$n=\mathrm{Min}\{0<n\in\mathbb{Z}\mid\chi(1+\mathfrak{p}^n)=1\}$ とおくと

$$\varepsilon_\tau(\chi,T)=\left|(O_F/\mathfrak{p}^n)^\times\right|\cdot G_\tau(\chi,-\varpi^{-(d+n)})\cdot q^{d/2}\chi(\varphi)^{d+n}\cdot T^{d+n}.$$

[**証明**] 1) O_F の特性関数を $\varphi_0\in\mathcal{S}(F)$ とすると $Z(\varphi,\chi,T)=L(\chi,T)$ である．一方

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_0(y)&=\int_{O_F}\tau(-xy)dx\\&=\begin{cases}\displaystyle\int_{O_F}dx=q^{-d/2} & :y\in\mathfrak{f}=\mathfrak{p}^{-d},\\ 0 & :y\notin\mathfrak{p}^{-d}\end{cases}\\&=q^{-d/2}\varphi_0(\varpi^d y)\end{aligned}$$

より $\widehat{\varphi}_0=q^{-d/2}\varpi^{-d}\cdot\varphi_0$ となるから

$$\begin{aligned}\varepsilon_\tau(\chi,T)&=\varepsilon_\tau\cdot\mathfrak{Z}(\varphi_\mathfrak{o},\chi,\mathfrak{T})L(\chi,T)\\&=\frac{Z(\widehat{\varphi},\chi^{-1},(qT)^{-1})}{L(\chi^{-1},(qT)^{-1})}\\&=\frac{q^{-d/2}\chi(\varphi^d)(qT)^dZ(\varphi_0,\chi^{-1},(qT)^{-1})}{L(\chi^{-1},(qT)^{-1})}\\&=q^{d/2}\chi(\varpi)^d\cdot T^d.\end{aligned}$$

2) $\varphi\in\mathcal{S}(F)$ を $1+\mathfrak{p}^n$ の特性関数とすると

$$Z(\varphi,\chi,T)=\left|(O_F/\mathfrak{p}^n)^\times\right|^{-1}$$

である．一方，

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(y) &= \int_{1+\mathfrak{p}^n} \tau(-xy)dx = \int_{O_F} \tau(-(1+\varpi^n x)y)d(\varpi^n x) \\
&= \tau(-y)|\varpi^n|_F \int_{O_F} \tau(-\varpi^n yx)dx \\
&= \tau(-y)q^{-n} \times \begin{cases} \displaystyle\int_{O_F} dx = q^{-d/2} & : \varpi^n y \in \mathfrak{f} = \mathfrak{p}^{-d}, \\ 0 & : \varpi^n y \notin \mathfrak{p}^{-d} \end{cases} \\
&= \tau(-y)q^{-n-d/2} \cdot \varphi_0(\varpi^{d+n} y)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
z_m(\widehat{\varphi}, \chi^{-1}) &= \int_{\varpi^m O_F^\times} \widehat{\varphi}(y)\chi(y)^{-1} d^\times y \\
&= q^{-n-d/2} \int_{\varpi^m O_F^\times} \tau(-y)\varphi_0(\varphi^{d+n} y)\chi(y)^{-1} d^\times y \\
&= q^{-n-d/2} \int_{O_F^\times} \tau(-\varpi^m y)\varphi_0(\varpi^{d+n+m} y)\chi(\varpi^m y)^{-1} d^\times y
\end{aligned}$$

だから，$d+n+m<0$（即ち $m<-d-n$）ならば $z_m(\widehat{\varphi}, \chi^{-1}) = 0$ である．$d+n+m \geq 0$（即ち $m \geq -d-n$）のとき

$$\begin{aligned}
z_m(\widehat{\varphi}, \chi^{-1}) &= q^{-n-d/2}\chi(\varpi)^{-m} \int_{O_F^\times} \tau(-\varpi^m y)\chi(y)^{-1} d^\times y \\
&= q^{-n-d/2}\chi(\varpi)^{-m} \cdot G_\tau(\chi^{-1}, -\varpi^m)
\end{aligned}$$

となり，定理 4.1.2 より，$m > -d-n$ ならば $z_m(\widehat{\varphi}, \chi^{-1}) = 0$ となる．よって

$$Z(\widehat{\varphi}, \chi^{-1}, T) = q^{-n-d/2}\chi(\varpi)^{d+n} \cdot G_\tau(\chi^{-1}, -\varpi^{-d-n}) \cdot T^{-d-n}.$$

よって

$$Z(\widehat{\varphi}, \chi^{-1}, (qT)^{-1}) = q^{d/2}\chi(\varpi)^{d+n} G_\tau(\chi^{-1}, -\varpi^{-d-n}) \cdot T^{d+n}$$

となる．よって

$$Z(\widehat{\varphi}, \chi^{-1}, (qT)^{-1}) = \varepsilon_\tau(\chi, T) \cdot Z(\varphi, \chi, T)$$

より求める等式を得る．■

$$\zeta(\varphi,\chi,s) = Z(\varphi,\chi,q^{-s}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m(\varphi,\chi)q^{-s}$$
$$= \int_{F^\times} \varphi(x)\chi(x)|x|_F^s d^\times x$$

は $q^{\mathrm{Re}(s)} > |\chi(\varpi)|$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対して広義一様収束する．

4.10 GL_2 上のゼータ積分

(π, E) を G の無限次元既約許容表現として，$\mathcal{K}_\tau(\pi)$ をその Kirillov 空間とする．χ を $F^\times$ の連続指標とする．

$\xi \in \mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して

$$z_m(\xi,\chi) = \int_{\varpi^m O_F^\times} \xi(x)\chi(x)^{-1} d^\times x \in \mathbb{C} \text{ for } m \in \mathbb{Z}$$

とおくと，$\xi(x) = 0$ for $|x|_F \gg 0$ だから，

$$Z(\xi,\chi,T) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m(\xi,\chi)(q^{1/2}T)^m \in \mathbb{C}((T))$$

は形式的 Laurent 級数である．$a \in F^\times$ に対して

$$z_m(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \chi) = \int_{\varpi^m O_F^\times} \xi(ax)\chi(x)^{-1} d^\times = \chi(a)\cdot z_{m+\mathrm{ord}_F(a)}(\xi,\chi) \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

だから

$$Z(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi, \chi, T) = \chi(a)(q^{1/2}T)^{-\mathrm{ord}_F(a)} Z(\xi,\chi,T)$$

となる．よって

$$\{Z(\xi,\chi,T) \mid \xi \in \mathcal{K}_\tau(\pi)\} \subset \mathbb{C}((T))$$

は $\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$-部分加群である．ここで

$$L(\pi,\chi,T)=\begin{cases} L(\mu\chi^{-1},T)\cdot L(\nu\chi^{-1},T) & :\pi=\pi_{\mu,\nu}, \\ L(\mu\chi^{-1},T) & :\pi=\sigma_{\mu,\nu}\ (\mu\nu^{-1}=|\cdot|_F), \\ 1 & :\pi \text{ が尖点表現} \end{cases}$$

とおくと

命題 4.10.1 $\{Z(\xi,\chi,T)\mid \xi\in\mathcal{K}_\tau(\pi)\}=L(\pi,\chi,T)\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$.

[**証明**] π が尖点表現のとき．$\mathcal{K}_\tau(\pi)=\mathcal{S}(F^\times)$ だから，$\chi(1+\mathfrak{p}^n)=1$ $(0<n\in\mathbb{Z})$ として $\xi\in\mathcal{S}(F^\times)$ を $1+\mathfrak{p}^n$ の特性関数とすれば，$Z(\xi,\chi,T)=1$ となる．よって

$$\{Z(\xi,\chi,T)\mid \xi\in\mathcal{K}_\tau(\pi)\}=\mathbb{C}[T^{\pm 1}].$$

$\pi=\pi_{\mu,\nu}$ $(\mu\neq\nu)$ のとき．定理 4.6.7 より

$$\mathcal{K}_\tau(\pi)=\{\xi(t)=|t|_F^{1/2}(\mu(t)\varphi_1(t)+\nu(t)\varphi_2(t))\mid \varphi_i\in\mathcal{S}(F)\}$$

だから，$\xi(t)=|t|_F^{1/2}(\mu(t)\varphi_1(t)+\nu(t)\varphi_2(t))$ $(\varphi_i\in\mathcal{S}(F))$ に対して

$$\begin{aligned} z_m(\xi,\chi)&=\int_{\varpi^m O_F^\times}|t|_F^{1/2}(\mu(t)\varphi_1(t)+\nu(t)\varphi_2(t))\chi(t)^{-1}d^\times t \\ &=q^{-m/2}\left(z_m(\varphi_1,\mu\chi^{-1})+z_m(\nu\chi^{-1},T)\right) \end{aligned}$$

となり

$$Z(\xi,\chi,T)=Z(\varphi_1,\mu\chi^{-1},T)+Z(\varphi_2,\nu\chi^{-1},T)$$

となる．$\mu\chi^{-1}|_{O_F^\times}=\nu\chi^{-1}|_{O_F^\times}=1$ のとき，$\varphi_i\in\mathcal{S}(F)$ を選んで

$$Z(\varphi_1,\mu\chi^{-1},T)=\frac{(\nu\chi^{-1})(\varpi)}{1-(\mu\chi^{-1})(\varpi)T},\qquad Z(\varphi_2,\nu\chi^{-1},T)=\frac{-(\mu\chi^{-1})(\varpi)}{1-(\nu\chi^{-1})(\varpi)T}$$

とできる．$\mu\chi^{-1}|_{O_F^\times}\neq 1,\ \nu\chi^{-1}|_{O_F^\times}=1$ のとき，$\varphi_i\mathcal{S}(F)$ を選んで

$$Z(\varphi_1,\mu\chi^{-1},T)=1,\qquad Z(\varphi_2,\nu\chi^{-1},T)=\frac{(\nu\chi^{-1})(\varpi)T}{1-(\nu\chi^{-1})(\varpi)T}$$

とできる．よって

$$\{Z(\xi,\chi,T)\mid \xi\in\mathcal{K}_\tau(\pi)\}=L(\mu\chi^{-1},T)L(\nu\chi^{-1},T)\cdot\mathbb{C}[T^{\pm1}].$$

$\pi=\pi_{\mu,\mu}$ のとき．定理 4.6.7 より

$$\mathcal{K}_\tau(\pi)=\{\xi(t)=|t|_F^{1/2}(\mu(t)\mathrm{ord}_F(t)\varphi_1(t)+\mu(t)\varphi_2(t))\mid\varphi_i\in\mathcal{S}(F)\}$$

だから，$\xi(t)=|t|_F^{1/2}(\mu(t)\mathrm{ord}_F(t)\varphi_1(t)+\mu(t)\varphi_2(t))$ $(\varphi_i\in\mathcal{S}(F))$ に対して

$$\begin{aligned}z_m(\xi,\chi)&=q^{-m/2}\int_{\varpi^m O_F^\times}(\mu(t)\mathrm{ord}_F(t)\varphi_1(t)+\mu(t)\varphi_2(t))d^\times t\\&=q^{-m/2}\left(m\cdot z_m(\varphi_1,\mu\chi^{-1})+z_m(\varphi_2,\mu\chi^{-1})\right)\end{aligned}$$

となり

$$Z(\xi,\chi,T)=T\frac{d}{dT}Z(\varphi_1,\mu\chi^{-1})+Z(\varphi_2,\mu\chi^{-1},T)$$

である．$Z(\varphi_1,\mu\chi^{-1},T)=L(\mu\chi^{-1},T)\cdot f(T)$ $(f(T)\in\mathbb{C}[T^{\pm1}])$ とおくと

$$T\frac{d}{dT}Z(\varphi_1,\mu\chi^{-1},T)=f(T)\cdot T\frac{d}{dT}L(\mu\chi^{-1},T)+L(\mu\chi^{-1},T)\cdot T\frac{d}{dT}f(T)$$

で

$$T\frac{d}{dT}L(\mu\chi^{-1},T)=\begin{cases}(\mu\chi^{-1})(\varpi)\cdot T(1-(\mu\chi^{-1})(\varpi)T)^{-2} & :\mu\chi^{-1}|_{O_F^\times}=1,\\ 0 & :\mu\chi^{-1}|_{O_F^\times}\neq 1.\end{cases}$$

よって $\{Z(\xi,\chi,T)\mid\xi\in\mathcal{K}_\tau(\pi)\}=L(\mu\chi^{-1},T)^2\mathbb{C}[T^{\pm1}]$. ■

　ここで

補題 4.10.2 $Z(\xi,\chi,T)\neq 0$ なる $\xi\in\mathcal{S}(F^\times)\cap\pi(w)\mathcal{S}(F^\times)$ が存在する．

[証明] $\mathcal{K}_\tau(\pi)=\mathcal{S}(F^\times)+\pi(w)\mathcal{S}(F^\times)$ で $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{K}_\tau(\pi)/\mathcal{S}(F^\times)\le 2$ だから

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}(F^\times)/\mathcal{S}(F^\times)\cap\pi(w)\mathcal{S}(F^\times)\le 2$$

である．一方

$$\xi=\varpi^n\cdot\phi_\chi\in\mathcal{S}(F^\times),\qquad \phi_\chi(t)=\begin{cases}\chi(t) & :t\in O_F^\times,\\ 0 & :t\notin O_F^\times\end{cases}$$

とおくと

$$z_m(\xi,\chi)=\int_{\varpi^m O_F^\times}\phi_\chi(\varpi^{-n}x)\chi(x)^{-1}d^\times x=\begin{cases}0 & : m\neq n,\\ 1 & : m=n\end{cases}$$

より $Z(\xi,\chi,T)=(q^{1/2}T)^n$ となり

$$\dim_{\mathbb{C}}\{Z(\xi,\chi,T)\mid \xi\in\mathcal{S}(F^\times)\}=\infty$$

となるから，上の通り．■

そこで

$$\gamma_\tau(\pi,\chi,T)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}J_\pi(\varpi^m,\chi)\cdot\chi(\varpi)^m(q^{1/2}T)^{-m}\in\mathbb{C}((T^{-1}))$$

とおくと

定理 4.10.3　1) 任意の $\xi\in\mathcal{S}(F^\times)\subset\mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して

$$Z(\pi(w)\xi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1})=\gamma_\tau(\pi,\chi,T)\cdot Z(\xi,\chi,T),$$

2) $\gamma_\tau(\pi,\chi,T)\cdot\gamma_\tau(\pi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1})=\chi_\pi(-1)$.

[**証明**] 直和分解 $\mathcal{S}(F^\times)=\bigoplus_{\nu\in\widehat{O_F^\times}}\mathcal{S}_\nu(F^\times)$（110 頁）より $\xi=a\cdot\phi_\nu\in\mathcal{S}(F^\times)\subset\mathcal{K}_\tau(\pi)$ $(a\in F^\times,\nu\in\widehat{O_F^\times})$ として

$$\begin{aligned}z_m(\xi,\chi)&=\int_{\varpi^m O_F^\times}\phi_\nu(a^{-1}x)\chi(x)^{-1}d^\times x\\ &=\int_{\varpi^{m-\mathrm{ord}_F(a)}O_F^\times}\phi_\nu(x)\chi(ax)^{-1}d^\times x\\ &=\begin{cases}0 & : m\neq\mathrm{ord}_F(a),\\ \chi(a)^{-1}\displaystyle\int_{O_F^\times}(\nu\chi^{-1})(x)d^\times x=\chi(a)^{-1}\cdot\delta_{\nu,\chi} & : m=\mathrm{ord}_F(a)\end{cases}\end{aligned}$$

だから

$$Z(\xi,\chi,T)=\delta_{\nu,\chi}\cdot\chi(a)^{-1}(q^{1/2}T)^n\in\mathbb{C}[T^{\pm1}]$$

となる．一方

$$\begin{aligned}(\pi(w)\xi)(t) &= \left(\pi(w\begin{bmatrix}a^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\phi_\nu\right)(t) = \left(\pi(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}w)\phi_\nu\right)(t)\\ &= \chi_\pi(a)^{-1}\left(\pi(\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}w)\phi_\nu\right)(a) = \chi_\pi(a)^{-1}(\pi(w)\phi_\nu)(at)\\ &= \chi_\pi(t)\cdot J_\pi(at,\nu)\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}z_m(\pi(w)\xi,\chi_\pi\chi^{-1}) &= \int_{\varpi^m O_F^\times} J_\pi(at,\nu)\chi(t)d^\times t = \int_{O_F^\times} J_\pi(a\varpi^m t,\nu)\chi(\varpi^m t)d^\times t\\ &= J_\pi(a\varpi^m,\nu)\chi(\varpi)^m\int_{O_F^\times}(\nu^{-1}\chi)(t)d^\times t\\ &= J_\pi(\varpi^{m+\mathrm{ord}_F(a)},\nu)\nu(a\varpi^{-\mathrm{ord}_F(a)})^{-1}\chi(\varpi)^m\cdot\delta_{\nu\,\chi}\\ &= \chi(a)^{-1}J_\pi(\varpi^{m+\mathrm{ord}_F(a)},\nu)\cdot(\varpi^{m+\mathrm{ord}_F(a)})\cdot\delta_{\nu,\chi}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&Z(\pi(w)\xi,\chi_\pi\}\chi^{-1},(qT)^{-1})\\ =&\delta_{\nu,\chi}\cdot\chi(a)^{-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}J_\pi(\varpi^m,\nu)\chi(\varpi)^m(q^{1/2}T)^{-(m-\mathrm{ord}_F(a))}\\ =&\delta_{\nu,\chi}\cdot\chi(a)^{-1}(q^{1/2}T)^{\mathrm{ord}_F(a)}\cdot\gamma_\tau(\pi,\chi,T).\end{aligned}$$

よって任意の $\xi\in\mathcal{S}(F^\times)\subset\mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して

$$Z(\pi(w)\xi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1}) = \gamma_\tau(\pi,\chi,T)\cdot Z(\xi,\chi,T) \tag{4.8}$$

となる．そこで $\xi\in\mathcal{S}(F^\times)\cap\pi(w)\mathcal{S}(F^\times)$ とすると，$\pi(w)\xi\in\mathcal{S}(F^\times)$ かつ $\pi(w)(\pi(w)\xi)=\chi_\pi(-1)\xi$ だから，(4.8) を二回適用して

$$\begin{aligned}\chi_\pi(-1)Z(\xi,\chi,T) &= Z(\pi(w)\circ\pi(w)\xi,\chi,T)\\ &= \gamma_\tau(\pi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1})\cdot Z(\pi(w)\xi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1})\\ &= \gamma_\tau(\pi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1}Z(\pi(w)\xi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1})\\ &= \gamma_\tau(\chi_\pi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1}\gamma_\tau(\pi,\chi,T)Z(\xi,\chi,T).\end{aligned}$$

補題 4.10.2 より $Z({}^x i, \chi, T) \neq 0$ なる $\xi \in \mathcal{S}(F^\times) \cap \pi(w)\mathcal{S}(F^\times)$ をとれば

$$\gamma_\tau(\pi, \chi, T)\gamma_\tau(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1}) = \chi_\pi(-1)$$

を得る．そこで一般の $\xi \in \mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して $\xi = \xi_1 + \pi(w)\xi_2$ $(\xi_i \in \mathcal{S}(F^\times) \subset \mathcal{K}_\tau(\pi))$ とおくと

$$\begin{aligned}
&Z(\pi(w)\xi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1}) \\
=&Z(\pi(w)\xi_1, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1}) + \chi_\pi(-1)Z(\xi_2, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1}) \\
=&\gamma_\tau(\pi, \chi, T)Z(\xi_1, \chi, T) + \chi_\pi(-1)\gamma_\tau(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})^{-1}Z(\pi(w)\xi_2, \chi, T) \\
=&\gamma_\tau(\pi, \chi, T)Z(\xi, \chi, T)
\end{aligned}$$

となる．■

$$\varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) = \gamma_\tau(\pi, \chi, T) \cdot \frac{L(\pi, \chi, T)}{L(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})} \in \mathbb{C}((T^{-1}))$$

とおくと，任意の $\xi \in \mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して

$$\frac{Z(\pi(w)\xi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})}{L(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})} = \varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) \cdot \frac{Z(\xi, \chi, T)}{L(\pi, \chi, T)}$$

だから，$\varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) \in \mathbb{C}(T)$，従って $\gamma_\tau(\pi, \chi, T) \in \mathbb{C}(T)$ である．更に

命題 4.10.4 $\varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) = aT^n$ $(a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z})$ の形で

$$\varepsilon_\tau(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1}) \cdot \varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) = \chi_\pi(-1).$$

[**証明**] 定理 4.10.3 より

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\tau(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1}) \cdot \varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) = \chi_\pi(-1) \\
=&\gamma_\tau(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})\frac{L(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})}{L(\pi, \chi, T)} \cdot \gamma_\tau(\pi, \chi, T)\frac{L(\pi, \chi, T)}{L(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})} \\
=&\gamma_\tau(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})\gamma_\tau(\pi, \chi, T) = \chi_\pi(-1).
\end{aligned}$$

ここで $Z(\xi, \chi, T)/L(\pi, \chi, T) = 1$ なる $\xi \in \mathcal{K}_\tau(\pi)$ がとれるから

$$\varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) = \frac{Z(\pi(w)\xi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})}{L(\pi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})} \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$$

だから，$\varepsilon_\tau(\pi,\chi,T)\in\mathbb{C}[T^{\pm1}]^\times$ となり，$\varepsilon_\tau(\pi,\chi,T)=aT^n$ と書ける．■

$\gamma_\tau(\pi,\chi,T)$ の具体的な表示が次のように与えられる；

定理 4.10.5 $\pi=\pi_{\mu,\nu}$ 又は $\pi=\sigma_{\mu,\nu}$ ならば

$$\gamma_\tau(\pi,\chi,T)=(\mu\nu^{-1})(-1)\gamma_\tau(\mu\chi^{-1},T)\gamma_\tau(\nu\chi^{-1},T).$$

[**証明**] $\pi_{\mu,\nu}=\pi_{\nu,\nu},\sigma_{\mu,\nu}=\sigma_{\nu,\mu}$ だから，$\mu\nu^{-1}\neq|\cdot|_F^{-1}$ としてよい．補題 4.6.5 にある $\mathcal{B}_{\mu,\nu}$ から $C^\infty(F^\times)$ への B-加群の単射準同型写像 $\varphi\mapsto\xi_\varphi$ を用いて

$$\{\xi_\varphi\mid\varphi\in\mathcal{B}_{\mu,\nu}\}=\mathcal{K}_\tau(\pi)\text{ for }\pi=\begin{cases}\pi_{\mu,\nu} & :\mu\nu^{-1}\neq|\cdot|_F,\\ \sigma_{\mu,\nu} & :\mu\nu^{-1}=|\cdot|_F\end{cases}$$

である．ここで $\xi\in\mathcal{S}(F^\times)\subset\mathcal{K}_\tau(\pi)$ に対して

$$[t\mapsto\nu(t)^{-1}|t|_F^{-1/2}\xi(t)]\in\mathcal{S}(F^\times)=\{\varphi\in\mathcal{S}(F)\mid\varphi(0)=0\}$$

より，その F 上の Fourier 逆変換

$$\phi(x)=\int_{F^\times}\nu(t)^{-1}|t|_F^{-1/2}\xi(t)\tau(xt)dt\qquad(x\in F)$$

は $\phi\in\mathcal{S}(F)$ となるから，$\phi\in\mathcal{F}_\delta$ $(\delta=\mu\nu^{-1})$ となって

$$\phi(x)=\varphi(w^{-1}\begin{bmatrix}1&x\\0&1\end{bmatrix})\qquad(x\in F)$$

なる $\varphi\in\mathcal{B}_{\mu,\nu}$ がとれる．ここで

$$\widehat{\phi}(t)=\int_F\phi(x)\tau(-xt)dx=\nu(t)^{-1}|t|_F^{-1/2}\xi(t)\qquad(t\in F^\times)$$

だから $\xi(t)=\nu(t)|t|_F^{1/2}\widehat{\phi}(t)=\xi_\varphi(t)$ となる．そこでまず

$$\begin{aligned}z_m(\xi,\chi)&=\int_{\varpi^mO_F^\times}\nu(t)|t|_F^{1/2}\widehat{\phi}(t)\chi(t)^{-1}d^\times t\\&=q^{-m/2}\int_{\varpi^mO_F^\times}\widehat{\phi}(t)(\nu\chi^{-1})(t)d^\times t=q^{-m/2}z_m(\widehat{\phi},\nu\chi^{-1})\end{aligned}$$

より

$$Z(\xi,\chi,T)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m(\widehat{\phi},\nu\chi^{-1})T^m = Z(\widehat{\phi},\nu\chi^{-1},T) \tag{4.9}$$

となる．よって $\xi\in\mathcal{S}(F^\times)\cap\pi(w)\mathcal{S}(F^\times)$ ならば $\pi(w)\xi=\xi_{\rho(w)\varphi}\in\mathcal{S}(F^\times)$ $(\rho=\rho_{\mu,\nu})$ だから

$$\phi'(x)=(\rho(w)\varphi)(w^{-1}\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}) \qquad (x\in F)$$

なる $\phi'\in\mathcal{S}(F)$ がとれて $(\pi(w)\xi)(t)=\nu(t)|t|_F^{1/2}\widehat{\phi'}(t)$ $(t\in F^\times)$ と書ける．$\chi_\pi(a)=\mu(a)\nu(a)$ $(a\in F^\times)$ に注意すると

$$\begin{aligned} z_m(\pi(w)\xi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1}) &= \int_{\varpi^m O_F^\times}\nu(t)|t|_F^{1/2}\widehat{\phi'}(t)(\chi_\pi\chi^{-1})(t)d^\times t\\ &= q^{-m/2}\int_{\varpi^m O_F^\times}\widehat{\phi'}(t)(\mu^{-1}\chi)(t)d^\times t\\ &= q^{-m/2}\cdot z_m(\widehat{\phi'},\mu^{-1}\chi)\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} Z(\pi(w)\xi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1}) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m(\pi(w)\xi,\chi_\pi\chi^{-1})(q^{1/2}T)^{-m}\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m(\widehat{\phi'},\mu^{-1}\chi)(qT)^{-m}\\ &= Z(\widehat{\phi'},\mu^{-1}\chi,(qT)^{-1})\end{aligned}$$

となる．更に $\widehat{\widehat{\phi}}(x)=\phi(-x)$ と

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \varphi(w^{-1}\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}w)=\varphi(\begin{bmatrix}1 & 0\\ -x & 1\end{bmatrix})\\ &= (\mu\nu^{-1})(-x^{-1})|x|_F^{-1}\phi(-x^{-1}) \qquad (x\in F^\times)\end{aligned}$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
z_m(\phi', \mu\chi^{-1}) &= \int_{\varpi^m O_F^\times} (\mu\nu^{-1})(-x)^{-1}|x|_F^{-1}\phi(-x^{-1})(\mu\chi^{-1})(x)d^\times x \\
&= (\mu\nu^{-1})(-1)q^m \int_{\varpi^m O_F^\times} \phi(-x^{-1})(\nu\chi^{-1})(x)d^\times x \\
&= (\mu\nu^{-1})(-1)q^m \int_{\varpi^{-m} O_F^\times} \phi(-x)(\nu^{-1}\chi)(x)d^\times x \\
&= (\mu\nu^{-1})(-1)q^m \cdot z_{-m}(\widehat{\widehat{\phi}}, \nu^{-1}\chi)
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
Z(\phi', \mu\chi^{-1}, T) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\mu\nu^{-1})(-1)q^m z_{-m}(\widehat{\widehat{\phi}}, \nu^{-1}\chi)T^m \\
&= (\mu\nu^{-1})(-1) \cdot Z(\widehat{\widehat{\phi}}, \nu^{-1}\chi, (qT)^{-1})
\end{aligned}
$$

である．よって

$$
\begin{aligned}
\gamma_\tau(\pi, \chi, T) &= \frac{Z(\pi(w)\xi, \chi_\pi\chi^{-1}, (qT)^{-1})}{Z(\xi, \chi, T)} = \frac{Z(\widehat{\phi'}, \mu^{-1}, (qT)^{-1})}{Z(\widehat{\phi}, \nu\chi^{-1}, T)} \\
&= \frac{Z(\widehat{\phi'}, \mu^{-1}\chi, (qT)^{-1})}{Z(\phi', \mu\chi^{-1}, T)} \cdot \frac{(\mu\nu^{-1})(-1)Z(\widehat{\widehat{\phi}}, \nu^{-1}\chi, (qT)^{-1})}{Z(\widehat{\phi}, \nu\chi^{-1}, T)} \\
&= c_\tau(\mu\chi^{-1}, T) \cdot (\mu\nu^{-1})(-1)c_\tau(\nu\chi^{-1}, T)
\end{aligned}
$$

となる．■

ここから $\varepsilon_\tau(\pi, \chi, T)$ は具体的に次のように表示される；

定理 4.10.6　1) $\pi = \pi_{\mu,\nu}$ のとき

$$
\varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) = (\mu\nu^{-1})(-1) \cdot \varepsilon_\tau(\mu\chi^{-1}, T)\varepsilon_\tau(\nu\chi^{-1}, T).
$$

2) $\pi = \sigma_{\mu,\nu}$ $(\mu\nu^{-1} = |\cdot|_F)$ のとき

$$
\varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) = \begin{cases} -(\nu\chi^{-1})(\varpi)T \cdot \varepsilon_\tau(\mu\chi^{-1}, T)\varepsilon_\tau(\nu\chi^{-1}, T) & : \mu|_{O_F^\times} = \nu|_{O_F^\times} = \chi|_{O_F^\times}, \\ \varepsilon_\tau(\mu\chi^{-1}, T)\varepsilon_\tau(\nu\chi^{-1}, T) & : \mu|_{O_F^\times} = \nu|_{O_F^\times} \neq \chi|_{O_F^\times}. \end{cases}
$$

3) π が尖点表現のとき

$$\begin{aligned}\varepsilon_\tau(\pi,\chi,T) &= \gamma_\tau(\pi,\chi,T)\\ &= J_\pi(\varpi^{n(\chi)},\chi)\chi(\varpi)^{n(\chi)}\cdot(q^{1/2}T)^{-n(\chi)} \qquad (n(\chi)\le -2(d+1)).\end{aligned}$$

[**証明**] 1) $L(\pi,\chi,T)=L(\mu\chi^{-1},T)L(\nu\chi^{-1},T)$ だから

$$\begin{aligned}&\varepsilon_\tau(\pi,\chi,T)=\gamma_\tau(\pi,\chi,T)\frac{L(\pi,\chi,T)}{L(\pi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1})}\\ =&(\mu\nu^{-1})(-1)c_\tau(\mu\chi^{-1},T)c_\tau(\nu\chi^{-1},T)\frac{L(\mu\chi^{-1},T)L(\nu\chi^{-1},T)}{L(\mu\chi_\pi^{-1}\chi,(qT)^{-1})L(\nu\chi_\pi^{-1}\chi,(qT)^{-1})}\\ =&(\mu\nu^{-1})(-1)c_\tau(\mu\chi^{-1},T)c_\tau(\nu\chi^{-1},T)\frac{L(\mu\chi^{-1},T)L(\nu\chi^{-1},T)}{L(\nu^{-1}\chi,(qT)^{-1})L(\mu{-1}\chi,(qT)^{-1})}\\ =&(\mu\nu^{-1})(-1)\varepsilon_\tau(\mu\chi^{-1},T)\varepsilon_\tau(\nu\chi^{-1},T).\end{aligned}$$

2) $L(\pi,\chi,T)=L(\mu\chi^{-1},T)$ だから

$$\begin{aligned}&\varepsilon_\tau(\pi,\chi,T)=\gamma_\tau(\pi,\chi,T)\frac{L(\pi,\chi,T)}{L(\pi,\chi_\pi\chi^{-1},(qT)^{-1})}\\ =&(\mu\nu^{-1})(-1)c_\tau(\mu\chi^{-1},T)c_\tau(\nu\chi^{-1},T)\frac{L(\mu\chi^{-1},T)}{L(\mu\chi_\pi^{-1}\chi,(qT)^{-1})}\\ =&c_\tau(\mu\chi^{-1},T)c_\tau(\nu\chi^{-1},T)\frac{L(\mu\chi^{-1},T)}{L(\nu^{-1}\chi,(qT)^{-1})}.\end{aligned}$$

$\mu\chi^{-1}|_{O_F^\times}=\nu\chi^{-1}|_{O_F^\times}=1$ のとき，$\mu=\nu\cdot|\cdot|_F$ より $\mu(\varphi)=\nu(\varpi)q^{-1}$ だから

$$\begin{aligned}L(\mu^{-1}\chi,(qT)^{-1}) &= (1-(\mu^{-1}\chi)(\varpi)q^{-1}T^{-1})^{-1}=(1-(\nu^{-1}\chi)(\varpi)T^{-1})^{-1}\\ &= -(\nu\chi^{-1})(\varpi)T\cdot L(\nu\chi^{-1},T).\end{aligned}$$

よってこのとき

$$\begin{aligned}&\varepsilon_\tau(\pi,\chi,T)\\ =&c_\tau(\mu\chi^{-1},T)c_\tau(\nu\chi^{-1},T)\frac{L(\mu\chi^{-1},T)}{L(\mu^{-1}\chi,(qT)^{-1})}\cdot\frac{-(\nu\chi^{-1})(\varpi)L(\nu\chi^{-1},T)}{L(\nu^{-1}\chi,(qT)^{-1}}\\ =&-(\nu\chi^{-1}(\varpi)T\cdot\varepsilon_\tau(\mu\chi^{-1},T)\varepsilon_\tau(\nu\chi^{-1},T).\end{aligned}$$

$\mu\chi^{-1}|_{O_F^\times} = \nu\chi^{-1}|_{O_F^\times} \neq 1$ のときは $L(\mu\chi^{-1}, T) = L(\nu^{-1}\chi, T) = 1$ だから

$$\varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) = \varepsilon_\tau(\mu\chi^{-1}, T)\varepsilon_\tau(\nu\chi^{-1}, T).$$

3) π が尖点表現のときには $L(\pi, \chi, T) = 1$ だから，命題 4.7.4 より

$$\begin{aligned}\varepsilon_\tau(\pi, \chi, T) &= \gamma_\tau(\pi, \chi, T)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_\pi(\varpi^m, \chi)\chi(\varpi)^m(q^{1/2}T)^{-m}\\ &= J_\pi(\varpi^{n(\chi)}, \chi)\chi(\varpi)^{n(\chi)}(q^{1/2}T)^{n(\chi)}\end{aligned}$$

となる．■

第5章　$GL_n(F)$ の表現

5.1　$GL_n(F)$ の標準的な部分群

以下，$G = G_n = GL_n(F)$ ($F/\mathbb{Q}_p$ は有限次拡大体) とおく[1].
$\alpha = (n_1, \cdots, n_r)$ を n の分割とする（即ち $0 < n_i \in \mathbb{Z}, n_1 + \cdots + n_r = n$）.

$$I_\alpha = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_r \text{ with } I_i = \{j \in \mathbb{Z} \mid n_{i-1} < j \leq n_i\} \quad (n_0 = 0) \tag{5.1}$$

を α に付随した $\{1, 2, \cdots, n\}$ の分割と呼ぶ.

$$G_\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} G_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{n_r} \end{bmatrix} \right\} \subset G \text{ 閉部分群},$$

$$Z_\alpha = Z(G_\alpha) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 1_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r 1_{n_r} \end{bmatrix} \middle| \, a_i \in F^\times \right\},$$

とおく．又 G の閉部分群 $U_\alpha, \overline{U}_\alpha$ を

$$U_\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1_{n_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1_{n_r} \end{bmatrix} \in G \right\}, \quad \overline{U}_\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1_{n_r} \end{bmatrix} \in G \right\}$$

[1]帰納法による議論（例えば命題 5.3.1 の証明）を成立させるためには $G_{n_1} \times \cdots \times G_{n_r}$ の形の群一般で議論を進める必要があるが，簡単のために G_n の形に限ることにする.

により定義して

$$P_\alpha = G_\alpha \ltimes U_\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} G_{n_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{n_r} \end{bmatrix} \right\}$$

とおく．特に

$$T = T_n = G_{(1,1,\cdots,1)}, \quad U = U_n = U_{(1,1,\cdots,1)}, \quad B = B_n = P_{(1,1,\cdots,1)}$$

とおく．$U^{(k)} = \{(u_{ij}) \in U \mid u_{ij} \in \mathfrak{p}^{k(i-j)}\}$ $(0 < k \in \mathbb{Z})$ は U の開コンパクト部分群で $U = \bigcup_{k>0} U^{(k)}$ である．$\sigma \in S_n$（n 次対称群）に対して $[\sigma] \in G$ を

$$[\sigma]_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}, \quad \text{即ち} \quad [\sigma] = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$$

$(1_n = (e_1, e_2, \cdots, e_n))$ により定義すると

$$([\sigma][\tau])_{ij} = \sum_k \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\tau(j)} = \delta_{i,\sigma\circ\tau(j)} = [\sigma \circ \tau]_{ij}$$

より，$W = \{[\sigma] \mid \sigma \in S_n\}$ は $\sigma \mapsto [\sigma]$ により S_n と同型な G の部分群となる．$\sigma \in S_n$ と $g \in G$ に対して ${}^t[\sigma] = [\sigma^{-1}]$ であり

$$([\sigma]^{-1} g [\sigma])_{ij} = \sum_{k,l} \delta_{i,\sigma^{-1}(k)} g_{kl} \delta_{l,\sigma(j)} = g_{\sigma(i),\sigma(j)}$$

となる．n の分割 α と付随する $\{1, 2, \cdots, n\}$ の分割(5.1) に対して

$$W_\alpha = W \cap P_\alpha = W \cap G_\alpha = \{[\sigma] \in W \mid \sigma(I_k) = I_k \text{ for } 1 \le \forall k \le r\}$$

とおくと，W/W_α の代表系として

$$\begin{aligned} W^{(\alpha)} &= \{w \in W \mid w(G_\alpha \cap B) \subset B\} \\ &= \left\{ [\sigma] \in W \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma \in S_n \text{ は各 } I_k \ (1 \le k \le r) \\ \text{の元の大小関係を変えない} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

をとることができる．更に

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB = \bigsqcup_{w \in W, t \in T} UtwU \ \text{: Bruhat 分解},$$

$$G = B\Gamma \ \text{：岩澤分解} \qquad (\Gamma = GL_n(O_F) \subset G \ \text{開コンパクト部分群})$$

$$G = \bigsqcup_{\delta\in\Delta} \Gamma\delta\Gamma \ \text{：Cartan 分解}$$

$$\Delta = \Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \varpi^{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi^{e_n} \end{bmatrix} \middle| \, e_i \in \mathbb{Z}, e_1 \leq \cdots \leq e_n \right\}$$

が成り立つ．n の分割 $\alpha = (n_1, \cdots, n_r)$ に対して

$$\Delta_\alpha = \Delta_{n_1} \times \cdots \times \Delta_{n_r} \hookrightarrow G_\alpha \ \text{閉部分群}$$

とおく．

$$N_k = \{\gamma \in GL_n(O_F) \mid \gamma \equiv 1_n \pmod{\mathfrak{p}^k} \text{ for } 0 < k \in \mathbb{Z}$$

を G の合同部分群と呼ぶ．n の分割 β に対して $I_\beta = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_r$ として

$$i \equiv j \pmod{\beta} \ \Leftrightarrow \ \{i, j\} \subset I_k \text{ for some } 1 \leq k \leq r$$

とおいて，$\delta = \begin{bmatrix} \varpi^{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi^{e_n} \end{bmatrix} \in \Delta$ に対して

$$t_\beta(\delta) = \mathrm{Min}\{|e_i - e_j| \mid i \not\equiv j \pmod{\beta}\}$$

とおく．$g = (g_{ij}) \in G$ に対して

$$\delta g \delta^{-1} = (\varpi^{e_i - e_j} g_{ij}), \qquad \delta^{-1} g \delta = (\varpi^{e_j - e_i} g_{ij})$$

だから

1) コンパクト集合 $K \subset U_\beta$ と開集合 $1 \in V \subset U_\beta$ に対して，$\delta^{-1} K \delta \subset V$ for $\forall\delta \in \Delta$ s.t. $t_\beta(\delta) \gg 0$,
2) コンパクト集合 $L \subset \overline{U}_\beta$ と開集合 $1 \in V \subset \overline{U}_\beta$ に対して，$\delta L \delta^{-1} \subset V$ for $\forall\delta \in \Delta$ s.t. $t_\beta(\delta) \gg 0$.

又，次の命題が成り立つ；

命題 5.1.1 部分集合 $\Omega \subset \Delta$ に対して次は同値；

1) Ω は $G/Z(G)$ でコンパクト,
2) n の任意の分割 $\beta \neq (n)$ に対して $\sup\{t_\beta(\delta) \mid \delta \in \Omega\} < \infty$.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) $\Omega Z(G)/Z(G)$ は有限集合となるから 2) が成り立つことは明らか.

2) $\Rightarrow$ 1) $\Omega Z(G)/Z(G)$ がコンパクトでないとすると，番号 $1 \leq i < j \leq n$ があって

$$\sup\{|e_i - e_j| \mid \begin{bmatrix} \varpi^{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi^{e_n} \end{bmatrix} \in \Omega\} = \infty$$

となる．よって n の分割 β が i と j を分ければ $\sup\{t_\beta(\delta) \mid \delta \in \Omega\} = \infty$ となる．■

命題 5.1.2 合同部分群 $N \subset G$ と n の分割 β に対して

$$N_\beta^+ = N \cap U_\beta, \qquad N_\beta^0 = N \cap G_\beta, \qquad N_\beta^- = N \cap \overline{U}_\beta$$

とおくと

1) $N = N_\beta^+ N_\beta^0 N_\beta^- = N_\beta^- N_\beta^0 N_\beta^+$,
2) $\varepsilon_N = \varepsilon_{N_\beta^+} * \varepsilon_{N_\beta^0} * \varepsilon_{N_\beta^-} = \varepsilon_{N_\beta^-} * \varepsilon_{N_\beta^0} * \varepsilon_{N_\beta^+}$.

[**証明**] [1], Lemma 3.11 参照．■

5.2 Jacquet 加群と supercuspidal 表現

E を C^∞-G-加群とする．n の分割 β に対して

$$\begin{aligned} E(U_\beta) &= \langle g \cdot v - v \mid g \in U_\beta, v \in E \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left\{ v \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} \varepsilon_K \cdot v = \int_K k \cdot v d_K(k) = 0 \\ \text{for some } K \subset U_\beta\text{:開コンパクト部分群} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

で $N_G(U_\beta) = P_\beta = G_\beta \ltimes U_\beta$ だから，$E_{U_\beta,\mathbf{1}} = E/E(U_\beta)$ は P_β-加群で，U_β は自明に作用する．

命題 5.2.1 C^∞-G-加群 E と C^∞-G_β-加群 V (β は n の分割) に対して，U_β の自明な作用により V を P_β-加群としたものを $V \otimes \mathbf{1}_{U_\beta}$ と書くと，複素線形同型

$$\mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(V \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{G_\beta}(E_{U_\beta,\mathbf{1}}, V) \quad (A \mapsto [\dot{u} \mapsto (Au)(1)])$$

が成り立つ．

[**証明**] $V' = V \otimes \mathbf{1}_{U_\beta}$ とおいて，Frobnius 相互律（定理 3.8.1）により

$$\mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G V') \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{P_\beta}(E, V') \quad (A \mapsto [u \mapsto (Au)(1)])$$

は複素線形同型で，$B \in \mathrm{Hom}_{P_\beta}(E, V')$ に対して $E(U_\beta) \subset \mathrm{Ker}\, B$ だから，複素線形同型

$$\mathrm{Hom}_{P_\beta}(E, V') \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{P_\beta}(E/E(U_\beta), V') \quad (B \mapsto [\dot{u} \mapsto Bu])$$

が成り立つ．$\mathrm{Hom}_{P_\beta}(E/E(U_\beta), V') = \mathrm{Hom}_{G_\beta}(E_{U_\beta,\mathbf{1}}, V)$ だから，上の通り．
■

定理 5.2.2 有限生成 C^∞-G-加群 E と n の分割 β に対して，$E_{U_\beta,\mathbf{1}}$ は有限生成 G_β-加群である．

[**証明**] 任意の $v \in E$ に対して $\{\gamma \cdot v \mid \gamma \in \Gamma\}$ は有限集合だから，$G = P_\beta \Gamma$ より E は有限生成 P_β-加群である．$E/E(U_\beta)$ 上では U_β は自明に作用するから，$E_{U_\beta,\mathbf{1}}$ は有限生成 G_β-加群となる．■

定理 5.2.3 許容 G-加群 E と n の分割 β をとると，合同部分群 N に対して

$$E^N \ni u \mapsto \dot{u} \in (E/E(U_\beta))^{N_\beta^0}$$

($N_\beta^0 = N \cap G_\beta$) は全射である．特に $E_{U_\beta,\mathbf{1}}$ は許容 G_β-加群である．

[**証明**] 自然写像 $(*) : E \to E/E(U_\beta)$ による E^N の像を $(*)E^N \subset (E/E(U_\beta))^{N_\beta^0}$ とおく．$\dot{u} \in (E/E(U_\beta))^{N_\beta^0}$ に対して $0 < t \in \mathbb{Z}$ があって，$t_\beta(\delta) > t$ なる任意の $\delta \in \Delta \cap Z_\beta$ に対して $\delta^{-1} \cdot \dot{u} \in (*)E^N$ となる．実際，$E/E(U_\beta)$ における $N_\beta^+ \subset U_\beta$ の作用は自明だから

$$\varepsilon_{N_\beta^+} \cdot (\delta^{-1} \cdot \dot{u}) = \delta^{-1} \cdot \dot{u} \text{ for } \forall \delta \in \Delta$$

である．$\delta \in \Delta \cap Z_\beta$ ならば $\delta^{-1} N_\beta^0 = N_\beta^0 \delta^{-1}$ だから

$$\varepsilon_{N_\beta^0} \cdot (\delta^{-1} \cdot \dot{u}) = \delta^{-1} \cdot (\varepsilon_{N_\beta^0} \cdot \dot{u}) = \delta^{-1} \cdot \dot{u} \text{ for } \forall \delta \in \Delta \cap Z_\beta$$

である．$\delta \in \Delta \cap Z_\beta$ に対して $t_\beta(\delta)$ が十分大きければ $\delta N_\beta^- \delta^{-1}$ は $u \in E$ の G における固定部分群に含まれるから

$$\varepsilon_{N_\beta^-} \cdot (\delta^{-1} \cdot \dot{u}) = \delta^{-1} \cdot (\varepsilon_{\delta N_\beta^- \delta^{-1}} \cdot \dot{u}) = \delta^{-1} \cdot \dot{u}$$

となる．よって $\varepsilon_N = \varepsilon_{N_\beta^+} * \varepsilon_{N_\beta^0} * \varepsilon_{N_\beta^-}$ より

$$\delta^{-1} \cdot \dot{u} = \varepsilon_N \cdot (\delta^{-1} \cdot \dot{u}) \in (*)E^N$$

となる．そこで $\{\dot{u}_1, \cdots \dot{u}_r\} \subset (E/E(U_\beta))^{N_\beta^0}$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立とすると，$t_\beta(\delta)$ が十分大きな $\delta \in \Delta \cap Z_\beta$ に対して $\delta^{-1} \cdot \dot{u}_i \in (*)E^N$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ とできて，$\{\delta \cdot \dot{u}_1, \cdots, \delta \cdot \dot{u}_r\} \subset (*)E^N$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立だから $r \leq \dim_{\mathbb{C}}(*)E^N$．よって $\dim_{\mathbb{C}} (E/E(U_\beta))^{N_\beta^0} \leq \dim_{\mathbb{C}}(*)E^N$ となる．■

E を C^∞-G-加群として，$v \in E, \alpha \in E^\vee$ に対して E の行列成分を

$$\varphi_{v,\alpha}(x) = \langle x \cdot v, \alpha \rangle \qquad (x \in G)$$

により定義した（82 頁）．$v \in E^N, \alpha \in (E^\vee)^N$ なる合同部分群 $N \subset G$ をとると，n の分割 β に対して

$$\lim_{k \to \infty} t_\beta(\delta_k) = \infty \quad \text{かつ} \quad U_\beta \subset \bigcup_k \delta_k N \delta_k^{-1}$$

なる $\delta_k \in \Delta$ がとれる．このとき

$$\varphi_{v,\alpha}(\delta_k^{-1}) = \langle \delta_k^{-1} \cdot v, \varepsilon_N \cdot \alpha \rangle = \langle \delta_k^{-1} \cdot \varepsilon_{\delta_k N \delta_k^{-1}} \cdot v, \alpha \rangle$$

だから，$\varphi_{v,\alpha}(\delta_k^{-1}) \neq 0$ for $\forall k$ ならば $\varepsilon_{\delta_k N \delta_k^{-1}} \cdot v \neq 0$ for $\forall k$ だから $v \notin E(U_\beta)$ となり（命題 3.9.2 の証明を見よ），$E_{U_\beta,\mathbf{1}} = E/E(U_\beta) \neq 0$ となるから，$\mathrm{Hom}_{G_\beta}(E_{U_\beta,\mathbf{1}}, V) \neq 0$ なる C^∞-G_β-加群 V に対して

$$\mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(V \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})) \neq 0$$

となる．この議論を精密化する為に，まず次の命題を示す；

命題 5.2.4 C^∞-G-加群 E と n の分割 $\beta \neq (n)$ をとると，$v \in E$ に対して次は同値；

1) $u \in E(U_\beta)$,
2) 任意の合同部分群 $N \subset G$ に対して $0 < t \in \mathbb{Z}$ が定まり，$t_\beta(\delta) > t$ なる任意の $\delta \in \Delta$ に対して $\varepsilon_N \cdot (\delta^{-1} \cdot u) = 0$.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) $u \in E(U_\beta)$ とすると，$\varepsilon_K \cdot u = 0$ なる開コンパクト部分群 $K \subset U_\beta$ がとれる．任意の合同部分群 $N \subset G$ に対して，$t_\beta(\delta)$ が十分大い $\delta \in \Delta$ をとれば $\delta^{-1} K \delta \subset N$ とできる．このとき

$$\varepsilon_N \cdot (\delta^{-1} \cdot u) = \varepsilon_N * \varepsilon_{\delta^{-1} K \delta} \cdot (\delta^{-1} \cdot u) = \varepsilon_N * \varepsilon_{\delta^{-1}} \cdot (\varepsilon_K \cdot u) = 0$$

となる．

2) $\Rightarrow$ 1) $u \in E^N$ なる合同部分群 $N \subset G$ をとる．$N = N_\beta^+ N_\beta^0 N_\beta^-$ で，$\delta \in \Delta \cap Z_\beta$ ならば，$\delta N_\beta^0 \delta^{-1} = N_\beta^0$ は u の固定部分群に含まれ，$t_\beta(\delta)$ が十分大きければ $\delta N_\beta^- \delta^{-1}$ も u の固定部分群に含まれる．よって $t_\beta(\delta)$ が十分大きな $\delta \in \Delta \cap Z_\beta$ に対して

$$0 = \delta \cdot (\varepsilon_N \cdot (\delta^{-1} \cdot u)) = \varepsilon_{\delta N_\beta^+ \delta^{-1}} * \varepsilon_{\delta N_\beta^0 \delta^{-1}} * \varepsilon_{\delta N_\beta^- \delta^{-1}} \cdot u = \varepsilon_{\delta N_\beta^+ \delta^{-1}} \cdot u$$

となり，$\delta N_\beta^0 \delta^{-1} \subset U_\beta$ は開コンパクト部分群だから，$u \in E(U_\beta)$ となる．■

$G^0 = \{g \in G \mid \det g \in O_F^\times\}$ は G の開正規部分群で，群の同型

$$G/G^0 \tilde{\to} F^\times/O_F^\times \tilde{\to} \mathbb{Z} \qquad (g \mapsto \overline{\det g} \mapsto \mathrm{ord}_F(\det g))$$

が成り立ち，$\Gamma \subset G^0$ かつ

$$G^0 \cap Z(G) = \left\{ \begin{bmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{bmatrix} \middle| \, a \in O_F^\times \right\} \text{ コンパクト}, \quad (G : G^0 Z(G)) < \infty$$

となる．特に $K \subset G^0$ が開コンパクト部分群ならば K は G の開コンパクト部分群ともなるから，C^∞-G-加群 E に対して $(E|_{G^0})^\vee = E^\vee$ である．

定理 5.2.5 C^∞-G-加群 E に対して次は同値；

1) n の任意の分割 $\beta \neq (n)$ に対して $E_{U_\beta, \mathbf{1}} = 0$,
2) 任意の $v \in E$ と合同部分群 $N \subset G$ に対して $\{g \in G \mid \varepsilon_N(g \cdot u) \neq 0\}$ は $G/Z(G)$ でコンパクト,
3) E は supercuspidal G-加群（即ち，任意の $u \in E, \alpha \in E^\vee$ に対して $\operatorname{supp} \varphi_{v,\alpha}$ は $G/Z(G)$ でコンパクト），
4) E はコンパクト G^0-加群（即ち，任意の $v \in E$ と $\alpha \in E^\vee$ に対して $\operatorname{supp} \varphi_{v,\alpha} \cap G^0 \subset G^0$ はコンパクト）．

[**証明**] 2) $\Rightarrow$ 3) $\alpha \in E^N$ なる合同部分群 $N \subset G$ をとる．$g \in \operatorname{supp} \varphi_{v,\alpha}$ とすると

$$\langle \varepsilon_N \cdot (g \cdot v), \alpha \rangle = \langle g \cdot v, \varepsilon_N \cdot \alpha \rangle = \langle g \cdot v, \alpha \rangle = \varphi_{v,\alpha}(g) \neq 0$$

より $\varepsilon_N \cdot (g \cdot v) \neq 0$．即ち

$$\operatorname{supp} \varphi_{v,\alpha} \subset \{g \in G \mid \varepsilon_N \cdot (g \cdot u) \neq 0\}$$

となり，$\operatorname{supp} \varphi_{v,\alpha}$ は $G/Z(G)$ でコンパクト.

3) $\Rightarrow$ 4) $G^0/G^0 \cap Z(G) \hookrightarrow G/Z(G)$ $(\dot{g} \mapsto \dot{g})$ かつ $G^0 \cap Z(G)$ はコンパクトだから良い.

4) $\Rightarrow$ 2) 命題 3.11.2 より，任意の $v \in E$ と開コンパクト部分群 $K \subset G^0$ に対して

$$M_{K,v} = \{g \in G^0 \mid \varepsilon_K(g \cdot v) \neq 0\}$$

は G^0 のコンパクト集合となる．$G = \bigsqcup_i g_i G^0 Z(G)$（有限）とおく．合同部分群 $N \subset G$ に対して $K = N \cap G^0$ は G^0 の開コンパクト部分群で,

$N = \bigsqcup_j Kn_j$（有限）とおくと，$g \in G$ に対して

$$\varepsilon_N(g \cdot v) = (H : K)^{-1} \sum_j \varepsilon_K(n_j g \cdot v)$$

だから（命題 2.2.2），$\varepsilon_N(g \cdot v) \neq 0$ ならば $\varepsilon_K(n_j g \cdot v) \neq 0$ なる j がある．$n_j g \in g_i \cdot G^0 Z(G)$ とすると $\varepsilon_{g_i^{-1} K g_i}(g_i^{-1} n_j g \cdot v) \neq 0$ となり，$g_i^{-1} K g_i \subset G$ 0 だから

$$g \cdot Z(G) \in n_j^{-1} g_i M_{g_i^{-1} K g_i, v} \cdot Z(G)/Z(G)$$

となる．よって

$$\{g \in G \mid \varepsilon_N(g \cdot v) \neq 0\} \cdot Z(G)/Z(G) \subset \bigcup_{i,j} n_j^{-1} g_i M_{g_i^{-1} K g_i, v} \cdot Z(G)/Z(G)$$

となり $M_{N,v}$ は $G/Z(G)$ でコンパクト．

1) $\Leftrightarrow$ 2) 合同部分群 $N \subset G$ は Γ の正規部分群だから，Cartan 分解 $G = \Gamma \Delta \Gamma$ より $g = \gamma' \delta^{-1} \gamma \in G$ $(\gamma, \gamma' \in \Gamma, \delta \in \Delta)$ に対して

$$\varepsilon_N(g \cdot v) = \gamma'(\varepsilon_N(\delta^{-1} \gamma \cdot v))$$

となり $\Gamma \cdot v$ は有限集合だから

$$\begin{aligned} &\{g \in G \mid \varepsilon_N(g \cdot v) \neq 0\} \text{ が } G/Z(G) \text{ でコンパクト} \\ \Leftrightarrow &\{\delta \in \Delta \mid \varepsilon_N(\delta^{-1} \cdot v') \neq 0\} \text{ が } G/Z(G) \text{ でコンパクト for } \forall v' \in \Gamma \cdot v. \end{aligned}$$

命題 5.1.1 から，これは任意の $v' \in \Gamma \cdot v$ に対して

$$\sup\{t_\beta(\delta) \mid \delta \in \Delta \text{ s.t. } \varepsilon_N(\delta^{-1} \cdot v') \neq 0\} < \infty$$

であることと同値．即ち，任意の $v' \in \Gamma \cdot v$ に対して

$$\varepsilon_N(\delta^{-1} \cdot v') = 0 \text{ for } \forall \delta \in \Delta \text{ s.t. } t_\beta(\delta) \gg 0$$

と同値．よって命題 5.2.4 より $\Gamma \cdot v \subset E(U_\beta)$ と同値である．■

定理 5.2.6 単純な C^∞-G-加群 E は許容 G-加群である．

[**証明**] n の任意の分割 $\beta \neq (n)$ に対して $E_{U_\beta,\mathbf{1}} = 0$ ならば，定理 5.2.5 より，任意の $v \in E, \alpha \in E^\vee$ に対して $\operatorname{supp}\varphi_{v,\alpha}$ は $G/Z(G)$ でコンパクトとなる．よって命題 3.11.3 より E は許容 G-加群となる．

$E_{U_\beta,\mathbf{1}} \neq 0$ なる n の分割 $\beta \neq (n)$ があれば，G_β の自明な一次元表現 $\mathbb{C}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_G(E, \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\mathbb{C} \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{G_\beta}(E_{U_\beta,\mathbf{1}}, \mathbb{C}) \neq 0$$

で，E は単純 G-加群だから，E は $\mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\mathbb{C} \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$ の部分表現と同値．従って系 3.6.3 より E は許容 G- 加群となる．■

補題 5.2.7 G の既約 C^∞-加群 E に対して

1) E は長さ有限の半単純 G^0-加群である（即ち G^0-加群として有限既約分解 $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ をもつ），
2) G の既約 C^∞-加群 F と E が同型な単純 G^0-加群を直和因子としてもてば，G^0 上自明となる C^∞-指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ があって，G-加群の同型 $\chi \otimes E \simeq F$ が成り立つ．

[**証明**] 1) $(G : Z(G)G^0) < \infty$ だから，補題 3.1.7 より E は長さ有限の半単純 $Z(G)G^0$-加群である．単純 $Z(G)G^0$-加群 F が E の直和因子ならば，定理 3.3.1 (Schur の補題) から $Z(G)$ の F への作用は定数倍だから，F は G^0-加群として単純である．

2) 定理 3.3.1 (Schur の補題) から $W = \mathrm{Hom}_{G^0}(E, F) \neq 0$ は有限次元複素ベクトル空間で，G/G^0 の W 上の表現 τ が $\tau(\dot{g})A = [v \mapsto g \cdot A(g^{-1} \cdot v)]$ により定義される．$G/G^0 \simeq \mathbb{Z}$ だから，$\tau(\dot{g})A = \chi(g)A$ $(\forall g \in G)$ なる C^∞-指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ と $0 \neq A \in W$ がある．よって $g \cdot A(v) = \chi(g)A(g \cdot v)$ $(g \in G, v \in E)$ となり，$0 \neq A \in \mathrm{Hom}_G(E, \chi \otimes F)$ となるから $E \simeq \chi \otimes F$ となる．■

命題 5.2.8 G の supercuspidal 既約表現 (π, E) をとる．G の C^∞-加群 V に対して，G-加群の直和分解 $V = V_\pi \oplus V_\pi^\perp$ があって次の二条件を満たす；

1) V_π の単純 G-部分商加群は G^0 上 E と同型であり（即ち，G^0 上自明となる C^∞-指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ をとって $\chi \otimes E$ と同型である，補題 5.2.7 参照），V_π は半単純 G^0-加群である，
2) $V_\pi^\perp$ は G^0 上 E と同型な G-部分商加群をもたない．

[**証明**] 補題 5.2.7 より $\pi|_{G^0}$ は有限個の単純 G^0-加群 E_i の直和である．定理 5.2.5 より各 E_i はコンパクト G^0-加群となるから，命題 3.11.9 を繰り返し用いて，G^0-加群の直和分解 $V = V_1 \oplus V_2$ ができて次を満たす；

1) V_1 は半単純 G^0-加群で，その単純直和因子は E_i のいずれかと同型，
2) V_2 は E_i のいずれかと同型な G^0-部分商加群をもたない．

射影 $V = V_1 \oplus V_2 \to V_2$ を P とする．$G^0 \triangleleft G$ より，任意の $g \in G$ と G^0-部分加群 $M \subset V$ に対して $g \cdot M \subset V$ は G^0-部分加群となり，M が V_1 の単純直和因子で $f : M \simeq E_i$ が G^0-加群の同型写像とすると $x \mapsto gf(g^{-1}x)$ は G^0-加群の同型 $g \cdot M \simeq g \cdot E_i$ を与え，$g \cdot E_i \subset E$ は再び E_i のいずれかと同型となる．よって $P(g \cdot M) \neq 0$ ならば V_2 は E_i と同型な G^0-部分加群をもつことになるから，$P(g \cdot M) = 0$，即ち $g \cdot M \subset V_1$ である．よって $V_1 \subset V$ は G-部分加群となる．又 $gv \notin V_2$ なる $v \in V_2$ があったとすると，$0 \neq P(gv) - gv \in V_1$ より $0 \neq g^{-1}P(gv) - v \in V_1$ となる．即ち，G^0-加群の準同型写像

$$f : V_2 \ni u \mapsto g^{-1}P(gu) - u \in V$$

に対して $\mathrm{Im}(f) \cap V_1 \neq 0$，よって単純 G^0-加群 $M \subset \mathrm{Im}(f) \cap V_1$ がある．このとき $L = f^{-1}(M) \subset V_2$ は G^0-部分加群で $f(L) = M$ だから，V_2 の G^0-部分商加群で E_i と同型なものがあることになり矛盾する．よって $V_2 \subset V$ は G-部分加群となる．$U \subset W \subset V_1$ が G-部分加群で W/U が単純 G-加群とすると，$W = U \oplus M$ なる G^0 部分加群 $M \subset V_1$ があり，M は E_i らと同型な直和因子をもつ．よって W/U と E は G^0-加群として同型な単純直和因子をもつから，補題 5.2.7 より G^0 上自明となる C^∞-指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ があって，G-加群の同型 $W/U \simeq \chi \otimes E$ が成り立つ．■

5.3 有限性定理

この節では C^∞-G-加群の Neother 性，長さの有限性等を示す．まず

命題 5.3.1 $K \lneqq \Gamma$ を合同部分群として，C^∞-G=加群 E は G-加群として E^K で生成されるとする．このとき

1) E の単純 G-部分商加群 $M \neq 0$ に対して $M^K \neq 0$ である，
2) E の G-部分加群 M は G-加群として M^K で生成される．

[**証明**] 1) $V \subset W \subset E$ を G-部分加群として W/V は単純 G-加群であるとする．

$\pi = W/V$ が supercuspidal のとき．命題 5.2.8 の直和分解 $E = E_\pi \oplus E_\pi^\perp$ を考える．π は E の G-部分商加群だから $E_\pi \neq 0$ である．$P : E \to E_\pi$ を射影として，E_π は $P(E^K) = (E_\pi)^K$ により G-加群として生成されるから[2]，$(E_\pi)^K \neq 0$ である．$0 \neq v \in (E_\pi)^K$ により生成された G-部分加群を E' として E'/L が単純 G-加群となる G-部分加群 $L \subset E'$ をとれば，$v \in E'^K, v \notin L$ だから $(E'/L)^K \neq 0$．一方，E_π の性質から G-加群の同型 $E'/L \simeq W/V$ が成り立つ．よって $(W/V)^K \neq 0$ となる．

W/V が supercuspidal でないとき．$r_\beta(W/V) \neq 0$ なる n の分解 $\beta \neq (n)$ をとると，命題 3.9.4 より $r_\beta(W/V)$ は $E_{U_\beta,\mathbf{1}} = E/E(U_\beta)$ の G_β-部分商加群である．ここで $K \triangleleft \Gamma$ より $\Gamma \cdot E^K \subset E^K$ だから

$$E = \left\langle G \cdot E^K \right\rangle_{\mathbb{C}} = \left\langle P_\beta \Gamma \cdot E^K \right\rangle_{\mathbb{C}} = \left\langle P_\beta \cdot E^K \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

で $E_{U_\beta,\mathbf{1}} = E/E(U_\beta)$ 上では U_β の作用は自明だから，$K = K_\beta^- K_\beta^0 K_\beta^+$ ($K_\beta^0 = K \cap G_\beta$ etc.) より，$E_{U_\beta,\mathbf{1}}$ は G_β-加群として $\left(E_{U_\beta,\mathbf{1}}\right)^{K_\beta^0}$ により生成される．よって帰納法により $r_\beta(W/V)^{K_\beta^0} \neq 0$ となる．ここで W/V は単純 C^∞-G-加群だから許容 G-加群となり（定理 5.2.6），定理 5.2.3 より $(W/V)^K \neq 0$ となる．

2) $v \in M$ により生成される G-部分加群を $L \subset M$ として $\left\langle G \cdot L^K \right\rangle \lneqq L$ とすると，G-部分加群 $\left\langle G \cdot L^K \right\rangle \subset N \subset L$ で L/N が単純 G-加群となるも

[2] C^∞-G-加群の完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ に対して $0 \to L^K \to M^K \to N^K \to 0$ が完全列となる．命題 3.1.5 の証明を参照．

のがとれる．1) より $(L/N)^K \neq 0$ となるが，$(L/N)^K = (L^K + N)/N$ で $L^K \subset N$ だから $(L/N)^K = 0$ となって矛盾する．■

定理 5.3.2 C^∞-G-加群 E に対して次は同値である[3]；

1) E は G-加群として長さ有限（即ち，E は Artin かつ Noether G-加群），
2) E は有限生成かつ許容 G-加群.

[**証明**] 1) ⇒ 2) E は Noether G-加群だから有限生成 G-加群である．又，単純 C^∞-G-加群は許容 G-加群（定理 5.2.6）だから，命題 3.1.5 から E は許容 G-加群となる．

2) ⇒ 1) E は有限生成 G-加群だから，合同部分群 $K \subsetneqq \Gamma$ があって E は G-加群として E^K で生成される．そこで G-部分加群の列

$$E \supsetneqq V_1 \supsetneqq V_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_r \supsetneqq 0$$

に対して，命題 5.3.1 より $E^K \supsetneqq V_1^K \supsetneqq V_2^K \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_r^K \supsetneqq 0$ となる．よって $r \leq \dim_{\mathbb{C}} E^K < \infty$ となって，E は G-加群として長さ有限である．■

定理 5.3.3 (π, E) を G の既約 supercuspidal 表現として，許容 G-加群 V が E と同型な G-部分商をもつならば，E は V の G-部分加群と同型である.

[**証明**] (π, E) の中心指標を χ_π とする.

1) 任意の $g \in Z(G)$, $v \in V$ に対して $g \cdot v = \chi_\pi(g)v$ となるとき．既約 supercuspidal 表現 (π, E) に関して命題 5.2.8 の分解 $V = V_\pi \oplus V_\pi^\perp$ を考えれば，命題 A.6.1 に注意して，V_π が E と同型な G-部分商をもつ．V_π は半単純 G^0-加群だから，$Z(G) \cdot G^0$-加群として半単純，従って補題 3.1.7 から G-加群として半単純となる．よって E は V_π の G-部分加群と同型である.

2) $E^N \neq 0$ なる合同部分群 $N \subset \Gamma$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} V^N = 1$ となるとき．G-部分加群 $W \subset V$ と全射 G- 加群準同型写像 $f : W \to E$ がある．$f : W^N \to E^N$ は全射となるから $0 \neq W^N \subset V^N$，よって $\dim_{\mathbb{C}} W^N = 1$ となる．$0 \neq v \in W^N$ をとれば $0 \neq f(v) \in E$ だから

$$U = \langle g \cdot v \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}} \subset W$$

[3] この定理は一般の簡約可能代数群に対して成り立つ；[5, Th.6.3.10]

とおけば $f:U\to E$ は全射 G-加群準同型写像である．一方，U は既約 G-加群となる．実際，命題 5.3.1 より G-部分加群 $0\neq M\subset U$ は M^N で生成されるが，$0\neq M^N\subset U^N\subset W^N$ より $M^N=W^N\ni v$，よって $M=U$ となる．よって $f:U\xrightarrow{\sim}E$ となる．

3) $g_0\cdot v_0\neq\chi_\pi(g_0)v_0$ なる $g_0\in Z(G), v_0\in V$ があるとき．$E^N\neq 0$ かつ $v_0\in V^N$ なる合同部分群 $N\subset\Gamma$ をとる．$\dim_{\mathbb{C}}V^N=1$ のときは 2) より成り立つから，$\dim_{\mathbb{C}}V^N$ に関する帰納法により示す．G-加群の準同型写像

$$T:V\ni v\mapsto g_0\cdot v-\chi_\pi(g_0)v\in V$$

に対して，命題 A.6.1 より $\mathrm{Ker}(T)$ 又は $\mathrm{Im}(T)$ が E と同型な G-部分商をもつ．ここで $v_0\in V^N$ より $\mathrm{Im}(T)^N=T(V^N)\neq 0$ である．一方，$\mathrm{Ker}(T)^N=\mathrm{Ker}(T_{V^N})=0$ ならば，$\dim_{\mathbb{C}}V^N<\infty$ より

$$T|_{V^N}:V^N\xrightarrow{\sim}V^N$$

は複素線形同型写像となるが，G-部分加群 $W\subset V$ と全射 G-加群準同型写像 $f:W\to E$ があるから

$$\begin{array}{ccccc}
W^N & \xrightarrow{f} & E^N & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle T}\downarrow\wr & & \downarrow{\scriptstyle T=0} & & \\
W^N & \xrightarrow[f]{} & E^N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

となり矛盾する．よって $\mathrm{Ker}(T)^N\neq 0$ である．従って

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ker}(T)^N<\dim_{\mathbb{C}}V^N,\qquad \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Im}(T)^N<\dim_{\mathbb{C}}V^N$$

だから，帰納法の仮定から，$\mathrm{Ker}(T)$ 又は $\mathrm{Im}(T)$ が E と同型な G-部分加群をもつ．■

5.4 P_n の表現；関手 $\Phi^{\pm}, \Psi^{\pm}$

$G_n = GL_n(F)$ とし，$g \in G_{n-1}$ と $\begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G_n$ を同一視して $G_{n-1} \hookrightarrow G_n$ を閉部分群とみなす．

$$P_n = \left\{ \begin{bmatrix} g & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G_n \;\middle|\; g \in G_{n-1}, y \in F^{n-1} \right\},$$

$$M_n = \left\{ \begin{bmatrix} 1_{n-1} & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G_n \;\middle|\; y \in F^{n-1} \right\},$$

$$U_n = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} \in G_n \right\}$$

は G_n の閉部分群で，$P_n = G_{n-1} \ltimes M_n, U_n = U_{n-1} \ltimes M_n$ である．

$$U_n/[U_n, U_n] \ni \overline{g} \tilde{\mapsto} (g_{i,i+1})_{i=1,\cdots,n-1} \in F^{n-1}$$

だから，$a \in F^{n-1}$ に対して

$$\theta_a : U_n \ni g \mapsto \tau\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i g_{i,i+1}\right) \in \mathbb{C}^1$$

とおけば，$a \mapsto \theta_a$ は位相群の同型

$$F^{n-1} \tilde{\to} \widehat{U}_n = \{\theta : U_n \to \mathbb{C}^1 : \text{連続群準同型写像}\}$$

を与える．$\Theta = \theta_{(1,\cdots,1)} = [g \mapsto \tau(g_{12} + g_{23} + \cdots + g_{n-1,n})] \in \widehat{U}_n$ とおく．

$$p = \begin{bmatrix} g & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in P_n, \quad m = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_n$$

に対して $pmp^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & gy \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_n$ だから

$$\begin{aligned} N_{P_n,\Theta}(M_n) &= \left\{ p \in P_n \;\middle|\; \begin{array}{l} pM_np^{-1} = M_n, \\ \Theta(pmp^{-1}) = \Theta(m) \text{ for } \forall m \in M_n \end{array} \right\} \\ &= P_{n-1} \ltimes M_n \end{aligned}$$

となる．$N_{P_n,\mathbf{1}_{M_n}}(M_n) = P_n$ は明らか．そこで

定義 5.4.1　1) C^∞-P_n-加群 E に対して $\Phi^-(E) = E_{M_n,\Theta} = E/E(M_n,\Theta)$ は C^∞-P_{n-1}-加群である．$m \in M_n$ の $u \in E_{M_n,\Theta}$ への作用は $m \cdot u = \Theta(m)u$ である．

2) C^∞-P_{n-1}-加群 V に対して，$m \in M_n$ の作用を $m \cdot v = \Theta(m)v$ $(v \in V)$ により定めたものを $V \otimes \Theta$ とおくと，これは C^∞-$P_{n-1} \ltimes M_n$-加群となるから，$\Phi^+(V) = \mathrm{ind}_{P_{n-1}\ltimes M_n}^{P_n}(V \otimes \Theta)$ とおく．

定理 5.4.2 C^∞-P_n-加群 E について，$u \in E(M_n, \mathbf{1}_{M_n})$ に対して

$$f_u : P_n \ni p \mapsto \overline{p^{-1} \cdot u} \in E/E(M_n, \Theta)$$

とおくと，$u \mapsto f_u$ は P_n-加群の同型

$$E(M_n, \mathbf{1}_{M_n}) \tilde{\to} \mathrm{ind}_{P_{n-1}\ltimes M_n}^{P_n}(E_{M_n,\Theta}) = \Phi^+ \circ \Phi^-(E)$$

を与える．

[**証明**] 簡単のために

$$P = P_n, \qquad Q = P_{n-1} \subset P, \qquad M = M_n = F^{n-1} = X$$

とおく．E は C^∞-X-加群だから，$\mathcal{H}(X)E = E$ なる $\mathcal{H}(X)$-加群となり，$\mathcal{H}(X) = \mathcal{S}(X)$ は

$$\varphi \mapsto \check{\varphi} \qquad (\check{\varphi}(\alpha) = \int_X \varphi(y)\tau(\langle y, \alpha\rangle)d_X(y), \alpha \in nX^*)$$

により $\mathcal{S}(X^*)$ と $\mathbb{C}$-代数同型となるから，E は $\mathcal{S}(X^*)E = E$ なる $\mathcal{S}(X^*)$-加群である．そこで E に付随する X^* 上の l-sheaf を $\mathcal{L}$ とする（107 頁）．ここで $p \in P$ は $\alpha \in X^*$ に $\langle y, p \cdot \alpha\rangle = \langle p^{-1}yp, \alpha\rangle$ $(\forall y \in X)$ により作用する（$X^* = F^{n-1}$, $\langle y, \alpha\rangle = {}^t y\alpha$ とすると，$p = \begin{bmatrix} g & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in P$ に対して $p \cdot \alpha = {}^t g^{-1}\alpha$ となる）．そこで $p \in P$ に対して

$$i_p : X^* \ni \alpha \mapsto p \cdot \alpha \in X^*, \qquad \theta_p : E \ni u \mapsto p^{-1} \cdot u \in E$$

とおくと，群準同型写像

$$P \ni p \mapsto (i_p, \theta_p) \in \mathrm{Aut}(X^*, E) \tag{5.2}$$

を得る．実際，$i_{pp'} = i_p \circ i_{p'}, \theta_{pp'} = \theta_{p'} \circ \theta_p$ は明らか．$\varphi \in \mathcal{S}(X^*), u \in E, p \in P$ として，任意の $\gamma \in E^\vee$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \theta_p(\varphi \cdot u), \gamma\rangle &= \langle \varphi \cdot u, p \cdot \gamma\rangle = \langle \widehat{\varphi} \cdot u, p \cdot \gamma\rangle \\
&= \int_X \widehat{\varphi}(y)\langle y \cdot u, p \cdot \gamma\rangle d_X(y) = \int_X \widehat{\varphi}(y)\langle p^{-1}ypp^{-1} \cdot u, \gamma\rangle d_X(y) \\
&= \int_X \widehat{\varphi}(pyp^{-1})\langle yp^{-1} \cdot u, \gamma\rangle d_X(pyp^{-1}) \\
&= |\det p|_F \int_X \widehat{\varphi}(pyp^{-1})\langle yp^{-1} \cdot u, \gamma\rangle d_X(y).
\end{aligned}$$

ここで $p = \begin{bmatrix} g & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\widehat{\varphi}(pyp^{-1}) \\
&= \int_{X^*} \varphi(\alpha)\tau(-\langle pyp^{-1}, \alpha\rangle) d_{X^*}(\alpha) = \int_{X^*} \varphi(\alpha)\tau(-\langle y, p^{-1} \cdot \alpha\rangle) d_{X^*}(\alpha) \\
&= \int_{X^*} \varphi(\alpha)\tau(-\langle y, {}^t g\alpha\rangle) d_{X^*}(\alpha) = \int_{X^*} \varphi({}^t g^{-1}\alpha)\tau(-\langle y, \alpha\rangle) d_{X^*}({}^t g^{-1}\alpha) \\
&= |\det p|_F^{-1} \int_{X^*} \varphi(p \cdot \alpha)\tau(-\langle y, \alpha\rangle) d_{X^*}(\alpha) = |\det p|_F^{-1} \widehat{\varphi \circ i_p}(y)
\end{aligned}$$

となるから

$$\langle \theta_p(\varphi \cdot u), \gamma\rangle = \langle \widehat{\varphi \circ i_p} \cdot (p^{-1} \cdot u), \gamma\rangle = \langle \widehat{\varphi \circ i_p} \cdot \theta_p(u), \gamma\rangle$$

となり，$\theta_p(\varphi \cdot u) = (\varphi \circ i_p) \cdot \theta_p(u)$ を得る．そこで(5.2) に付随する群準同型写像を

$$P \ni p \mapsto (i_p, (\theta^\sharp_{p,V})_{V \subset X^*}) \in \mathrm{Aut}(X^*, \mathcal{L})$$

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\theta_p} & E \\
\wr\downarrow & & \downarrow\wr \\
\mathcal{L}_c(X^*) & \xrightarrow[\theta^\sharp_{p,X^*}]{} & \mathcal{L}_c(X^*)
\end{array}$$

とすると，$\mathcal{L}(X^*)$ は $p\cdot s=\theta^\sharp_{p^{-1},X^*}(s)$ $(p\in P, s\in\mathcal{L}(X^*))$ により P-加群となり（1.8 節），$\mathcal{L}_c(X^*)\xrightarrow{\sim} E$ は C^∞-P-加群である．更に $Y=X^*\setminus\{0\}\subset X^*$ は P-不変な開部分集合だから，$\mathcal{L}(Y)$ は $p\cdot s=\theta^\sharp_{p^{-1},Y}(s)$ $(p\in P, s\in\mathcal{L}(Y))$ により P-加群となる．ここで P-加群の同型

$$E(M,\mathbf{1}_M)\ni u\mapsto(\overline{u}\in E/E(M,\alpha))_{0\neq\alpha\in X^*}\in\mathcal{L}_c(Y) \tag{5.3}$$

が成り立つ．実際，X^* 上の層 $\mathcal{L}$ に付随するétale space を $\pi: L\to X^*$ として，開集合 $V\subset X^*$ に対して

$$\mathcal{L}(V)=\{s:V\to L:\text{連続}\mid\pi\circ s(\alpha)=\alpha\ \text{for}\ \forall\alpha\in V\}$$

とおく．$s\in\mathcal{L}_c(Y)$ とすると，$\mathrm{supp}(s)\subset X^*$ はコンパクトで $0\notin\mathrm{supp}(s)$ だから，$t\in\mathcal{L}_c(X^*)$ を

$$t(\alpha)=\begin{cases}s(\alpha) & :\alpha\neq 0,\\ 0 & :\alpha=0\end{cases}$$

により定義できる．一方，$\bigcap_\alpha E(M,\alpha)=\{0\}$ だから（命題 1.3.2 と 108 頁参照）

$$E(M,\mathbf{1}_M)\ni u\xrightarrow{\sim}(\overline{u}\in E/E(M,\alpha))_{0\neq\alpha\in X^*}\in\{t\in\mathcal{L}_c(X^*)\mid t(0)=0\}$$

となる．よって (5.3) が示された．さて $Y=X^*\setminus\{0\}$ は $\Theta|_M\in X^*$ の P-軌道で，その固定部分群は $Q\ltimes M$ だから，これにより $Y=X^*\setminus\{0\}=P/Q\ltimes M$ と同一視する．$Q\ltimes M$-加群として

$$\mathcal{L}_\Theta=E/E(M,\Theta)=E_{M,\Theta}=E_{M,\Theta}\otimes\Theta$$

だから，$\mathcal{L}'=\mathcal{L}|_Y$ とおくと，3.10 節の結果より，P-加群として

$$\mathcal{L}'_c(Y)=\mathrm{ind}^P_{Q\ltimes M}(E_{M,\Theta})$$

となる．$\mathcal{L}'_c(Y)=\mathcal{L}_c(Y)$ だから，求める同型を得る．■

定理 5.4.3 C^∞-P_{n-1}-加群 V に対して

$$E = \Phi^+(V) = \mathrm{ind}_{P_{n-1}\ltimes M_n}^{P_n}(V \otimes \Theta)$$

とおくと，P_{n-1}-加群の同型

$$\Phi^- \circ \Phi^+(V) = E/E(M_n, \Theta) \ni \overline{f} \mapsto f(1) \in V$$

が成り立つ．

[**証明**] 簡単のために

$$P = P_n, \qquad Q = P_{n-1}, \qquad M = M_n = F^{n-1} = X$$

として，定理 5.4.2 の証明の記号を用いる．3.10 節によって $\mathrm{ind}_{Q\ltimes M}^{P}(V \otimes \Theta)$ に付随する $Y = X^* \setminus \{0\}$ 上の l-sheaf を $\mathcal{L}$ とする．$\mathcal{L}$ を X^* 上に 0 により拡張したもの ([6, Th.2.9.2]) とすると，開集合 $U \subset X^*$ に対して

$$\mathcal{E}(U) = \{s \in \mathcal{L}(U \cap Y) \mid \mathrm{supp}(s) \subset U : \text{閉集合}\ \}$$

となって $\mathcal{E}_0 = \{0\}$．実際，$[s \in \mathcal{E}(U)] \in \mathcal{E}_0$ とすると，$s \in \mathcal{L}(U \cap Y)$ かつ $0 \notin \mathrm{supp}(s)$ だから，$0 \in W \subset U$ かつ $W \cap \mathrm{supp}(s) = \emptyset$ なる開集合 $W \subset X^*$ がとれて，$s|_W = 0$ となる．よって $\mathcal{E}$ は X^* 上の l-sheaf となり

$$\mathcal{E}_c(X^*) = \{s \in \mathcal{L}(Y) \mid \mathrm{supp}(s) : \text{compact}\} = \mathcal{L}_c(Y)$$

だから，$\mathcal{E}$ は $M = X$-加群 $\Phi^+(V)$ に付随して定まる (108 頁) X^* 上の l-sheaf である．よって

$$\Phi^+(V)_{M,\Theta} = \mathcal{E}_\Theta = \mathcal{L}_\Theta = V \otimes \Theta$$

となる．これを具体的に書けば，求める同型写像を得る．■

C^∞-P_n-加群 E と C^∞-P_{n-1}-加群 V をとる．

$$S \in \mathrm{Hom}_{P_{n-1}}(V, \Phi^-(E)) \qquad (\Phi^-(E) = E_{M_n,\Theta} = E/E(M_n, \Theta))$$

に対して $P_{n-1} \ltimes M_n$-加群の準同型写像 $S \otimes \mathbf{1} : V \otimes \Theta \to E_{M_n,\Theta}$ ができるから，誘導表現の準同型写像

$$\Phi^+(V) = \mathrm{ind}_{P_{n-1}\ltimes M_n}^{P_n}(V \otimes \Theta) \to \Phi^+ \circ \Phi^-(E) = \mathrm{ind}_{P_{n-1}\ltimes M_n}^{P_n}(E_{M_n,\Theta})$$

$(f \mapsto (S \otimes \mathbf{1}) \circ f)$ ができて，定理 5.4.2 の同型により P_{n-1}-加群準同型写像

$$\Phi^+(S) : \Phi^+(V) \to E(M_n, \mathbf{1}_{M_n})$$

が定まる．即ち $f \in \Phi^+(V) = \mathrm{ind}_{P_{n-1} \ltimes M_n}^{P_n}(V \otimes \Theta)$ に対して

$$\begin{aligned} &\Phi^+(S)f = u \in E(M_n, \mathbf{1}_{M_n}) \\ \Leftrightarrow &S \circ f(p) = \overline{p^{-1} \cdot u} \in E/E(M_n, \Theta) = E_{M_n,\Theta} \text{ for } \forall p \in P_n \end{aligned}$$

とおく．一方

$$T \in \mathrm{Hom}_{P_n}(\Phi^+(V), E) \qquad (\Phi^+(V) = \mathrm{ind}_{P_{n-1} \ltimes M_n}^{P_n}(V \otimes \Theta))$$

に対して，P_{n-1}-加群の準同型写像

$$\Phi^- \circ \Phi^+(V) = \Phi^+(V)/\Phi^+(V)(M_n, \Theta) \ni \overline{f} \mapsto \overline{Tf} \in E/E(M_n, \Theta) = \Phi^-(E)$$

ができるから，定理 5.4.3 の同型から，P_{n-1}-加群の準同型写像

$$\Phi^-(T) : V \to \Phi^-(E) = E_{M_n,\Theta}$$

が定まる．即ち，$v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} &\Phi^-(T)v = \overline{u} \in E/E(M_n, \Theta) \\ \Leftrightarrow &f \in \mathrm{ind}_{P_{n-1} \ltimes M_n}^{P_n}(V \otimes \Theta) \text{ があって } v = f(1) \text{ かつ } u = Tf \end{aligned}$$

である．このとき

定理 5.4.4 C^∞-P_n-加群 E と C^∞-P_{n-1}-加群 V に対して，加群の同型

$$\Phi^+ : \mathrm{Hom}_{P_{n-1}}(V, \Phi^-(E)) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{P_n}(\Phi^+(V), E),$$

が成り立ち，逆写像は

$$\Phi^- : \mathrm{Hom}_{P_n}(\Phi^+(V), E) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{P_{n-1}}(V, \Phi^-(E))$$

である．

[**証明**] $S \in \mathrm{Hom}_{P_{n-1}}(V, \Phi^-(E))$ に対して $T = \Phi^+(S) \in \mathrm{Hom}_{P_n}(\Phi^+(V), E)$ とおいて，$v \in V$ に対して $\Phi^-(T)v = \overline{u} \in E/E(M_n, \Theta)$ とおくと

$$v = f(1),\, u = Tf = \Phi^+(S)f \text{ with } f \in \mathrm{ind}_{P_{n-1}\ltimes M_n}^{P_n}(V \otimes \Theta),$$

従って

$$S \circ f(p) = \overline{p^{-1} \cdot u} \in E/E(M_n, \Theta) \text{ for } \forall p \in P_n$$

だから $\Phi^-(T)v = \overline{u} = S \circ f(1) = Sv$ となり，$\Phi^- \circ \Phi^+(S) = S$ となる．逆に $T \in \mathrm{Hom}_{P_n}(\Phi^+(V), E)$ に対して $S = \Phi^-(T) \in \mathrm{Hom}_{P_{n-1}}(V, \Phi^-(E))$ とおいて，$f \in \Phi^+(V) = \mathrm{ind}_{P_{n-1}\ltimes M_n}^{P_n}(V \otimes \Theta)$ に対して $\Phi^+(S)f = u \in E(M_n, \mathbf{1}_{M_n}) \subset E$ とおくと

$$S \circ f(p) = \overline{p^{-1} \cdot u} \in E/E(M_n, \Theta) \text{ for } \forall p \in P_n$$

だから，$v = f(1) \in V \otimes \Theta$ とおけば

$$\Phi^-(T)v = Sv = S \circ f(1) = \overline{u} \in E/E(M_n, \Theta),$$

だから $Tf = u = \Phi^+(S)f$ となり，$\Phi^+ \circ \Phi^-(T) = T$ となる．■

定義 5.4.5 $P_n = G_{n-1} \ltimes M_n$ に注意して

1) C^∞-G_{n-1}-加群 V に対して，$\Psi^+(V) = V \otimes \mathbf{1}_{M_n}$ は P_n-加群である，
2) C^∞-P_n-加群 E に対して，$\Psi^-(E) = E_{M_n, \mathbf{1}_{M_n}} = E/E(M_n, \mathbf{1}_{M_n})$ は G_{n-1}-加群である．

C^∞-G_{n-1}-加群 V と C^∞-P_n-加群 E に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{P_n}(E, \Psi^+(V)) \\
&\qquad = \{S \in \mathrm{Hom}_{G_{n-1}}(E, V) \mid S(m \cdot v) = S(v)\ \forall v \in V, m \in M_n\} \\
&\qquad = \{S \in \mathrm{Hom}_{G_{n-1}} \mid E(M_n, \mathbf{1}_{M_n}) \subset \mathrm{Ker}(S)\} \\
&\qquad \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{G_{n-1}}(E/E(M_n, \mathbf{1}_{M_n}), V) \\
&\qquad = \mathrm{Hom}_{G_{n-1}}(\Psi^-(E), V)
\end{aligned}$$

となる．逆写像は，自然写像 $j : E \to E/E(M_n, \mathbf{1}_{M_n})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{G_{n-1}}(\Psi^-(E), V) \ni T \tilde{\mapsto} T \circ j \in \mathrm{Hom}_{P_n}(E, \Psi^+(V))$$

である．明らかに

$$\Psi^- \circ \Psi^+(V) = V, \qquad \Psi^+ \circ \Psi^-(E) = E_{M_n, \mathbf{1}}$$

である．

命題 5.4.6 1) C^∞-G_{n-1}-加群 V に対して $\Phi^- \circ \Psi^+(V) = 0$,
2) C^∞-P_{n-1}-加群 V に対して $\Psi^- \circ \Phi^+(V) = 0$.

[**証明**] 1) $\Psi^+(V)$ 上で M_n の作用は自明だから

$$\begin{aligned}\Psi^+(V)(M_n, \Theta) &= \langle m \cdot v - \Theta(m)v \mid m \in M_n, v \in V\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle v - \Theta(m)v \mid m \in M_n, v \in V\rangle_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

で $\Theta(m) \neq 1$ なる $m \in M_n$ がとれるから $\Psi^+(V)(M_n, \Theta) = V$ となり

$$\Phi^- \circ \Psi^+(V) = \Psi^+(V)/\Psi^+(V)(M_n, \Theta) = 0.$$

2) 定理 5.4.3 の証明で，$M_n = X$-加群 $\Phi^+(V)$ に付随して定まる X^* 上の l-sheaf $\mathcal{E}$ を構成して $\mathcal{E}_0 = 0$ であった．一方，108 頁の一般論によれば

$$\mathcal{E}_0 = \Phi^+(V)_{M_n, \mathbf{1}_{M_n}} = \Psi^- \circ \Phi^+(V)$$

である．■

命題 5.4.7 C^∞-P_n-加群 E に対して

$$\Phi^+ : \mathrm{Hom}_{P_{n-1}}(\Phi^-(E), \Phi^-(E)) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{P_n}(\Phi^+ \circ \Phi^-(E), E),$$

$$\Psi^+ : \mathrm{Hom}_{G_{n-1}}(\Psi^-(E), \Psi^-(E)) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{P_n}(E, \Psi^+ \circ \Psi^-(E))$$

により $i = \Phi^+(1)$, $j = \Psi^+(1)$ とおくと

$$0 \to \Phi^+ \circ \Phi^-(E) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} \Psi^+ \circ \Psi^-(E) \to 0 : \mathrm{exact}$$

である．又，次は同値である；

1) M_n の E への作用は自明,
2) $\Phi^+ \circ \Phi^-(E) = 0$,
3) $E = E(M_n, \Theta) = \langle m \cdot v - \Theta(m) \cdot v \mid m \in M_n, v \in E \rangle_{\mathbb{C}}$.

[**証明**] $f \in \Phi^+ \circ \Phi^-(E)$ に対して $\Phi^+(1)f = u \in E$ は $f(p) = \overline{p^{-1} \cdot u}$ $(\forall p \in P_n)$ と同値だから，$i = \Phi^+(1)$ は定理 5.4.2 の同型写像 $f_u \mapsto u$ である．一方，$j = \Psi^+(1)$ は自然写像 $E \to E/E(M_n, \mathbf{1}_{M_n}) = \Psi^+ \circ \Psi^-(E)$ である．よって完全系列

$$0 \to E(M_n, \mathbf{1}_{M_n}) \to E \to E/E(M_n, \mathbf{1}_{M_n}) \to 0$$

から求める完全系列を得る．又

$$\begin{aligned} 1) \ &\Leftrightarrow\ \Phi^+ \circ \Phi^-(E) = E(M_n, \mathbf{1}_{M_n}) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \Phi^-(E) = 0 \qquad (\Phi^-(E) = E/E(M_n, \Theta)) \\ &\Leftrightarrow\ E = E(M_n, \Theta). \end{aligned}$$

■

V を C^∞-P_{n-1}-加群とする．P_{n-1}-部分加群 $W \subset V$ に対して $\Phi^+(W) \subset \Phi^+(V)$ は P_n-部分加群となり，定理 5.4.3 の同型により $\Phi^- \circ \Phi^+(V) = V$ と同一視すると $\Phi^- \circ \Phi^+(W) = W$ となる．一方，P_n-部分加群 $E \subset \Phi^+(V)$ に対して，命題 3.9.4 より P_{n-1}-加群として

$$\Phi^-(E) \hookrightarrow \Phi^- \circ \Phi^+(V) \tilde{\to} V$$

により $\Phi^-(E) \hookrightarrow V$ $(\overline{f} \mapsto f(1))$ と同一視すると

$$\Phi^+ \circ \Phi^-(E) = E \subset \Phi^+(V)$$

となる．実際，$\Psi^-(E) \hookrightarrow \Psi^- \circ \Phi^+(V) = 0$ だから，命題 5.4.7 より P_n-加群の同型 $\Phi^+ \circ \Phi^-(E) \tilde{\to} E$ が成り立つ．このとき $g \in E \subset \Phi^+(V)$ に対して

$$g \mapsto f_g = [p \mapsto \overline{p^{-1} \cdot g}] \mapsto [p \mapsto (p^{-1} \cdot g)(1) = g(p)] = g$$

となるから $\Phi^+ \circ \Phi^-(E) = E \subset \Phi^+(V)$ となる．特に次の命題が成り立つ；

命題 5.4.8 C^∞-P_{n-1}-加群 V に対して

$$\Phi^+(V): \text{単純 } P_n\text{-加群} \Leftrightarrow V: \text{単純 } P_{n-1}\text{-加群}.$$

命題 5.4.9 単純 C^∞-G_{n-k}-加群 V $(1 \leq k < n)$ に対して $(\Phi^+)^{k-1} \circ \Psi^+(V)$ は単純 P_n-加群である．逆に単純 C^∞-P_n-加群はこのようなものに限る．

[**証明**] C^∞-G_{n-k}-加群 V が単純ならば $\Psi^+(V)$ は単純 P_{n-k+1}-加群となるから，命題 5.4.8 から $(\Phi^+)^{k-1} \circ \Psi^+(V)$ は単純 P_n-加群となる．C^∞-P_n-加群 E が単純ならば，命題 5.4.7 の完全系列より P_n-加群の同型

$$\Phi^+ \circ \Phi^-(E) \xrightarrow{\sim} E, \text{ 又は } E \xrightarrow{\sim} \Psi^+ \circ \Psi^-(E)$$

が成り立つ．第一の場合には命題 5.4.8 より $\Phi^-(E)$ が単純 P_{n-1}-加群となり，第二の場合には明らかに $\Psi^-(E)$ が単純 G_{n-1}-加群となる．よって帰納法により上の通り．■

$E_{P_n} = \mathrm{Ind}_{U_n}^{P_n}(\Theta)$ を P_n の**基本表現** と呼，$E_{P_n}^0 = \mathrm{ind}_{U_n}^{P_n}(\Theta)$ を P_n の**コンパクト基本表現** と呼ぶ．

命題 5.4.10 1) $E_{P_n}^0 \simeq \left(\Phi^+\right)^{n-1}(\mathbf{1}_{P_1})$ $(P_1 = \{1\})$ となり，$E_{P_n}^0$ は単純 P_n-加群である．

2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{P_n}(E_{P_n}^0, E_{P_n}) = 1$.

[**証明**] 1) $n = 2$ のとき

$$\Phi^+(\mathbf{1}_{P_1}) = \mathrm{ind}_{M_2}^{P_2}(\theta) = \mathrm{ind}_{U_2}^{P_2}(\Theta) = E_{P_2}^0$$

である．$n > 2$ のとき

$$\begin{aligned}
&\Phi^+\left(\mathrm{ind}_{U_{n-1}}^{P_{n-1}}(\Theta)\right) = \mathrm{ind}_{P_{n-1}\ltimes M_n}^{P_n}\left(\mathrm{ind}_{U_{n-1}}^{P_{n-1}}(\Theta)\otimes\Theta\right)\\
&= \left\{ f : P_n \to \mathrm{ind}_{U_{n-1}}^{P_{n-1}}(\Theta) \;\middle|\; \begin{array}{l} f(gmp) = \Theta(m)^{-1}(p^{-1}\cdot f)(g) \\ \forall m \in M_n, p \in P_{n-1}, g \in P_n \end{array} \right\}\\
&= \left\{ f : P_n \times P_{n-1} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{ll} 1) & f(gmp,h) = \Theta(m)^{-1} f(g,ph) \\ & \forall m \in M_n, p \in P_{n-1}, \\ 2) & f(g,hu) = \Theta(u)^{-1} f(g,h) \\ & \forall u \in U_{n-1} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

（C^∞-関数であることとコンパクト台であることは省略する）だから，$f \mapsto [g \mapsto f(g,1)]$ により P_n-加群の準同型写像

$$\Phi^+\left(\mathrm{ind}_{U_{n-1}}^{P_{n-1}}(\Theta)\right) \to \mathrm{ind}_{U_n}^{P_n}(\Theta)$$

が定義され，$\varphi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{P_n}(\Theta)$ に対して $f_g = [h \mapsto \varphi(gh)] \in \mathrm{ind}_{U_{n-1}}^{P_{n-1}}(\Theta)$ $(g \in P_n)$ であり，$\varphi \mapsto [g \mapsto \varphi_g]$ により P_n- 加群の準同型写像

$$\mathrm{ind}_{U_n}^{P_n}(\Theta) \to \Phi^+\left(\mathrm{ind}_{U_{n-1}}^{P_{n-1}}(\Theta)\right)$$

が定義されて，これらは互いに逆写像となる．よって帰納法により $E_{P_n}^0 \simeq \left(\Phi^+\right)^{n-1}(\mathbf{1}_{P_1})$ となり，命題 5.4.8 よりこれは単純 P_n-加群である．

2) Frobanius 相互律より

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{P_n}(E_{P_n}^0, E_{P_n}) &= \mathrm{Hom}_{P_n}(E_{P_n}^0, \mathrm{Ind}_{U_n}^{P_n}(\Theta))\\ &\tilde{\to}\mathrm{Hom}_{U_n}(E_{P_n}^0, \Theta)\\ &\tilde{\to}\mathrm{Hom}_{U_n}((E_{P_n}^0)_{U_n,\Theta}, \Theta).\end{aligned}$$

一方，命題 3.9.1 より

$$(E_{P_n}^0)_{U_n,\Theta} = \left(\Phi^-\right)^{n-1}(E_{P_n}^0) = \left(\Phi^-\right)^{n-1}\circ\left(\Phi^+\right)^{n-1}(\mathbf{1}_{P_1}) = \mathbf{1}_{P_1}$$

だから上の通り．■

注意 5.4.11 $n=2$ の場合，$E_{P_2}^0 = \mathrm{ind}_{U_2}^{P_2}(\Theta)$ を

1) 任意の $u \in U_2$ に対して $f(up) = \Theta(u)f(p)$,
2) $\mathrm{supp}(f)$ は $U_2\backslash P_2$ でコンパクト

なる C^∞-関数 $f : P_2 \to \mathbb{C}$ の全体で，$g \in P_2$ の $f \in E_{P_2}^0$ への作用が $(g \cdot f)(p) = f(pg)$ なるものとすると，$f \in E_{P_2}^0$ と $p = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$) に対して $f(p) = \tau(y)\varphi(x)$ $(\varphi(x) = f(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}))$ となり，$f \mapsto \varphi$ は複素線

形同型 $E^0_{P_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(F^\times)$ を与える．このとき P_2 の作用を $\mathcal{S}(F^\times)$ 上で見ると，$g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in P_2$ に対して

$$f(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = f(\begin{bmatrix} xa & xb \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \tau(bx) f(\begin{bmatrix} ax & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$$

より $(g \cdot \varphi)(x) = \tau(bx) \cdot \varphi(ax)$ となる（定理 4.3.2 参照）．

C^∞-P_n-加群 E に対して

$$\Phi^{-k}(E) = \underbrace{\Phi^- \circ \cdots \circ \Phi^-}_{k\text{ 回}}(E)$$

は C^∞-P_{n-k}-加群となり，定理 5.4.2 より $\Phi^+ \circ \Phi^{-k}(E)$ は自然に $\Phi^{-(k-1)}(E)$ の P_{n-k+1}-部分加群となる．よって

$$E_k = \Phi^{+k} \circ \Phi^{-k}(E) = \underbrace{\Phi^+ \circ \cdots \circ \Phi^+}_{k\text{ 回}} \circ \Phi^{-k}(E)$$

とおくと，C^∞-P_n-部分加群の列

$$E = E_0 \supset E_1 \supset \cdots \supset E_{n-2} \supset E_{n-1}$$

ができる．$E^{\text{non-deg}} = E_{n-1}$ とおく．

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr] & \supset & \Phi^+ \circ \Phi^-(E) & \supset & \Phi^{+2} \circ \Phi^{-2}(E) \\
& \Phi^-(E) \arrow[ur] \arrow[dr] & \supset & \Phi^+ \circ \Phi^{-2}(E) \arrow[ur] & \\
& & \Phi^{-2}(E) \arrow[ur] \arrow[dr] & \supset & \Phi^+ \circ \Phi^{-3}(E) \\
& & & \Phi^{-3}(E) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$P_1 = \{1\}$ で，命題 3.9.1 より複素線形同型 $\Phi^{-(n-1)}(E) \xrightarrow{\sim} E_{U_n,\Theta}$ が成り立つから

$$E^{\text{non-deg}} = \bigoplus^{\dim E_{U_n,\Theta}} \Phi^{+(n-1)}(\mathbf{1}) = \bigoplus^{\dim E_{U_n,\Theta}} \operatorname{ind}_{U_n}^{P_n}(\Theta) = \bigoplus^{\dim E_{U_n,\Theta}} E^0_{P_n}$$

となる．Frobenius 相互律より

$$\mathrm{Hom}_{P_n}(E, \mathrm{Ind}_{U_n}^{P_n}(\theta)) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{U_n}(E, \Theta) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_{U_n,\Theta}, \mathbb{C})$$

だから，次は同値である；

1) $\mathrm{Hom}_{P_n}(E, \mathrm{Ind}_{U_n}^{P_n}(\Theta)) \neq 0$,
2) $E_{U_n,\Theta} \neq 0$（即ち，$\Phi^{-(n-1)}(E) \neq 0$），
3) $E^{\text{non-deg}} \neq 0$.

このとき E は**非退化**であるという．

$$\Phi^{-(n-1)}(E/E^{\text{non-deg}}) = \Phi^{-(n-1)}(E)/\Phi^{-(n-1)}(E^{\text{non-deg}}) = 0$$

だから，$E/E^{\text{non-deg}}$ は退化 P_n-加群となる．

命題 5.4.12 C^∞-P_n-加群 E について，任意の $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して $E_{U_n,\theta} = 0$ ならば $E = 0$ である．

[**証明**] $E \neq 0$ とする．$n = 2$ のとき，命題 5.4.7 より $\Phi^-(E) \neq 0$ 又は $\Psi^-(E) \neq 0$ であるが，$M_2 = U_2$ だから $E_{U_2,\theta} \neq 0$ なる $\theta \in \widehat{U}_2$ が存在する．$n > 2$ のとき，再び命題 5.4.7 より $V = \Phi^-(E) \neq 0$ 又は $V = \Psi^-(E) \neq 0$ だから，帰納法を用いて $V_{U_{n-1},\theta'} \neq 0$ なる $\theta' \in \widehat{U}_{n-1}$ が存在する．θ' を $\theta \in \widehat{U}_n$ に延長するに，$V = \Phi^-(E)$ のときは $\theta|_{M_n} = \Theta$ とし，$V = \Psi^-(E)$ のときは $\theta|_{M_n} = \mathbf{1}$ とすれば，命題 3.9.1 より $E_{U_n,\theta} \neq 0$ を得る．■

U_n の指標 θ_a $(a = (a_1, \cdots, a_{n-1}) \in F^{n-1})$ に対して，$a_i \neq 0$ $(\forall i)$ のとき非退化指標と呼び，$a_i = 0$ for some i のとき退化指標と呼ぶ.

命題 5.4.13 C^∞-P_n-加群 E に対して次は同値である；

1) $E = E^{\text{non-deg}}$，即ち，E は P_n のコンパクト基本表現 $\mathrm{ind}_{U_n}^{P_n}(\Theta)$ の直和,
2) n の任意の分割 $\beta \neq (n)$ に対して $E_{U_\beta,\mathbf{1}} = 0$,
3) 任意の退化指標 $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して $E_{U_n,\theta} = 0$.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) $E = \mathrm{ind}_{U_n}(\Theta)$ としてよい．又 $\beta = (k, n-k)$ $(0 < k < n)$ としてよい．$k = n-1$ のときは $U_\beta = M_n$ だから，命題 5.4.6 より

$$E_{U_\beta,\mathbf{1}} = E_{M_n,\mathbf{1}} = \Psi^-(E) = 0.$$

$0<k<n-1$ のとき，E_{U_β} を $g\cdot u=\begin{bmatrix}1_k & 0\\ 0 & g\end{bmatrix}\cdot u$ $(g\in P_{n-k},\ u\in E_{U_\beta})$ により P_{n-k}-加群としたものを $E'=E_{U_\beta}$ と書く．$E_{M_n,\mathbf{1}}=\Psi^-(E)=0$ だから，$n-1$ の分割 $\beta'=(k,n-1-k)$ に対して

$$\Psi^-(E')=\left(E_{U_\beta,\mathbf{1}}\right)_{M_{n-k},\mathbf{1}}=\left(E_{M_n,\mathbf{1}}\right)_{U_{\beta'},\mathbf{1}}=0.$$

又 $\Phi^-(E')=\left(E_{U_\beta,\mathbf{1}}\right)_{M_{n-k},\Theta}=0$．よって命題 5.4.7 より $E'=0$，即ち $E_{U_\beta,\mathbf{1}}=0$ となる．

2) $\Rightarrow$ 3) $\theta_a|_{U_\beta}=\mathbf{1}$ となる n の分割 $\beta\neq(n)$ があるから，命題 3.9.1 により $E_{U_\beta,\mathbf{1}}=0$ から $E_{U_n,\theta_a}=0$ を得る．

3) $\Rightarrow$ 1) $V=E/E^{\text{non-deg}}$ とおくと $V_{U_n,\Theta}=0$，即ち $V=V(U_n,\Theta)$ である．任意の対角行列 $d\in P_n$ に対して

$$\begin{aligned}d^{-1}\cdot V(U_n,\Theta)&=\left\langle d^{-1}gv-\Theta(g)d^{-1}v \mid g\in U_n, v\in V\right\rangle_{\mathbb{C}}\\&=V(U_n,\Theta^d)\qquad(\Theta^d(g)=\Theta(dgd^{-1}))\end{aligned}$$

だから，任意の非退化指標 $\theta\in\widehat{U}_n$ に対して $V_{U_n,\theta}=0$ となる．よって仮定と合わせると，任意の $\theta\in\widehat{U}_n$ に対して $V_{U_n,\theta}=0$ となるから，命題 5.4.12 より $V=0$ を得る．■

C^∞-P_n-加群 E に対して，$\Phi^{-(k-1)}(E)$ は C^∞-P_{n-k+1}-加群となるから，G_{n-k}-加群

$$E^{(k)}=\Psi^-\circ\Phi^{-(k-1)}(E)\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

を E の k **次導来加群** (k-th derivative) と呼ぶ．但し，$P_1=G_0=\{1\}$ で $\Phi^{-(n-1)}(E)=E_{U_n,\Theta}$ だから，$E^{(n)}=E_{U_n,\Theta}$ は $G_0=\{1\}$ の自明な作用をもつ複素ベクトル空間である．命題 5.4.7 の完全列で E に $\Phi^{-(k-1)}(E)$ $(1\leq k<n)$ を代入すれば

$$0\to\Phi^+\circ\Phi^{-k}(E)\to\Phi^{-(k-1)}(E)\to\Psi^+(E^{(k)})\to 0:\text{exact}$$

を得るから，全体に $\Phi^{(k-1)}$ を作用させて完全列

$$0\to\Phi^{+k}\circ\Phi^{-k}(E)\to\Phi^{+(k-1)}\circ\Phi^{-(k-1)}(E)\to\Phi^{+(k-1)}\circ\Psi^+(E^{(k)})\to 0,$$

即ち

$$0 \to E_k \to E_{k-1} \to \Phi^{+(k-1)}(E^{(k)} \otimes \mathbf{1}_{M_{n-k+1}}) \to 0 : \text{exact}$$

或いは P_n-加群の同型 $E_{k-1}/E_k \tilde{\to} \Phi^{+(k-1)}(E^{(k)} \otimes \mathbf{1}_{M_{n-k+1}})$ を得る．よって

$$E_k = E_{k-1} \Leftrightarrow E^{(k)} = 0$$

である．

5.5　Whittaker モデル

$s_n \in \Gamma_n = GL_n(O_F)$ を $(s_n)_{ij} = (-1)^i \cdot \delta_{i,n+1-j}$ により定義する．即ち

$$s_n = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= (-1)^n \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

とおくと $s_n^{-1} = {}^t s_n = (-1)^{n+1} \cdot s_n$ である．$g \in G_n$ に対して

$${}^s g = s_n {}^t g^{-1} s_n^{-1} \in G_n, \qquad g^s = s_n {}^t g^{-1} s_n = (-1)^{n+1} \cdot {}^s g \in G_n$$

とおくと，$g \mapsto {}^s g$ は G_n の位相群としての自己同型写像である．特に $u \in U_n$ に対して

$$\begin{aligned}(s_n {}^t u s_n^{-1})_{ij} &= \sum_{k,l} (s_n)_{ik} u_{lk} (s_n)_{jl} = \sum_{k,l} (-1)^{i+j} \delta_{i,n+1-k} \delta_{j,n+1-l} u_{lk} \\ &= (-1)^{i+j} u_{n+1-j,n+1-i}\end{aligned}$$

だから ${}^s U_n = U_n$ であり，$({}^s u)_{i,i+1} = u_{n-i,n-i+1}$ $(1 \leq i < n)$ だから $\Theta({}^s u) = \Theta(u)$ となる．

定理 5.5.1 G_n の既約許容表現 π に対して $\pi'(g) = \pi({}^t g^{-1})$ $(g \in G)$ とおくと，π の反傾表現 $\check{\pi}$ は π' と同値である．

[**証明**] π の表現空間を E として，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \pi'(\varphi)u, \alpha \rangle &= \int_G \varphi(x) \langle \pi({}^t x^{-1})u, \alpha \rangle d_G(x) \\ &= \int_G \langle \varphi({}^t x^{-1}) \langle \pi(x)u, \alpha \rangle d_G(x) \\ &= \langle \pi(\varphi')u, \alpha \rangle \qquad (u \in E, \alpha \in E^\vee)\end{aligned}$$

より $(\varphi'(x) = \varphi({}^t x^{-1}))$，$\mathrm{tr}\pi'(\varphi) = \mathrm{tr}\pi(\varphi')$ となる．一方

$$\begin{aligned}\langle u, \check{\pi}(\varphi)\alpha \rangle &= \int_G \varphi(x) \langle \pi(x^{-1})u, \alpha \rangle d_G(x) \\ &= \langle \pi(\varphi^-)u, \alpha \rangle \qquad (u \in E, \alpha \in E^\vee)\end{aligned}$$

より $(\varphi^-(x) = \varphi(x^{-1}))$，$\mathrm{tr}\check{\pi}(\varphi) = \mathrm{tr}\pi(\varphi^-)$ となる．ここで

$$\mathrm{tr}\pi(\varphi') = \mathrm{tr}\left(\pi(s_n) \circ \pi({}^t\varphi^-) \circ \pi(s_n)^{-1}\right) = \mathrm{tr}\pi({}^t\varphi^-)$$

$({}^t\varphi(x) = \varphi({}^t x))$ だから

$$\mathrm{tr}\pi({}^t\varphi) = \mathrm{tr}\pi(\varphi) \qquad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(G)) \tag{5.4}$$

を示せば，系 3.12.2 より求める結果を得る．そのために定理 3.13.4 を用いる．即ち，G_n は G_n 自身に $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$ により構成的に作用し，$\sigma(x) = {}^t x$ $(x \in G)$ とおくと

1) 任意の $g \in G$ に対して $g' = {}^t g^{-1}$ とおけば $\theta(g) \circ \sigma = \sigma \circ \theta(g')$ となり，
2) $x \in G$ に対して $t \cdot 1_n - x$ と $t \cdot 1_n - {}^t x$ の単因子が一致するので ${}^t x = gxg^{-1}$ なる $g \in G$ が存在するから，σ は G_n-軌道（G_n-共役類）を動かさない，
3) $\sigma^2 = 1$

となり，定理 3.13.4 の条件が満たされる．$\mathrm{tr}\pi = \chi_\pi$ は G_n-共役不変だから，定理 3.13.4 より σ- 不変となる．■

命題 5.5.2 任意の G_n-不変な複素双線形形式

$$B : \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta \times \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta \to \mathbb{C}$$

に対して $B(\varphi,\psi) = B(\psi^s, {}^s\varphi)$ $(\varphi,\psi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta)$ である．ここで $\varphi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta$ に対して ${}^s\varphi(x) = \varphi({}^sx), \varphi^s(x) = \varphi(x^s)$ とおく．

[証明] $\mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta \otimes \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta = \mathrm{ind}_{U_n\times U_n}^{G_n\times G_n}\theta$ $(\theta = \Theta\otimes\Theta$ 即ち $\theta(u_1,u_2) = \Theta(u_1u_2))$ だから，$\mathrm{ind}_{U_n\times U_n}^{G_n\times G_n}\theta$ に付随して $X = (G_n \times G_n)/(U_n \times U_n)$ 上の l-sheaf $\mathcal{L}$ と群準同型写像

$$G \ni g \mapsto (\theta_g, \theta_{g,V}^\sharp) \in \mathrm{Aut}(X,\mathcal{L})$$

を

$$\theta_g(\dot{x},\dot{y}) = (g\cdot\dot{x}, g\cdot\dot{y}), \qquad (\theta_{g,X}^\sharp\varphi)(x,y) = \varphi(gx,gy)$$

$(\varphi \in \mathcal{L}_c(X) = \mathrm{ind}_{U_n\times U_n}^{G_n\times G_n}\theta)$ により定めると，$B \in \mathcal{L}_c^*(X)$ が G_n-不変であるとしてよい．任意の $x = \dot{g} \in X$ $(g \in G_n \times G_n)$ に対して

$$\mathcal{L}_x \ni [\varphi] \mapsto \varphi(g) \in \mathbb{C}$$

$(\varphi \in \mathrm{ind}_{U_n\times U_n}^{G_n\times G_n}\theta = \mathcal{L}_c(X))$ だから，$\mathcal{L}_x$ は $G_{n,x} = \{g \in G_n \mid g\cdot x = x\}$ の自明な一次元表現である．ここで位相同型写像

$$\tau : G_n \times G_n \ni (x,y) \mapsto ({}^sy, x^s) \in G_n \times G_n$$

に対して $\tau(U_n \times U_n) = U_n \times U_n$ だから，$\sigma = (\sigma, \sigma_V^\sharp) \in \mathrm{Aut}(X,\mathcal{L})$ を

$$\begin{array}{ccc} G_n \times G_n & \xrightarrow{\ \tau\ } & G_n \times G_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\ \sigma\ ]{} & X \end{array}$$

及び $\sigma_X^\sharp\varphi = \varphi\circ\tau$ for $\varphi \in \mathrm{ind}_{U_n\times U_n}^{G_n\times G_n}\theta = \mathcal{L}_c(X)$ により定義すると

$$gx^s = gs\,{}^tx^{-1}s = ss^{-1}gs\,{}^tx^{-1}s = s\,{}^t(xs^{-1}\,{}^tg^{-1}s)^{-1}s = (x\,{}^sg)^s$$

より，$g \in G_n$ に対して $g' = {}^sg \in G_n$ とおくと

$$\theta_g\circ\sigma(\dot{x},\dot{y}) = (g\dot{y}^s, g\,{}^s\dot{x}) = (({}^sg\dot{y})^s, {}^s({}^sg\dot{x})) = \sigma\circ\theta_{g'}(\dot{x},\dot{y}),$$

$$\begin{aligned}(\sigma_X^\sharp \circ \theta_{g,X}^\sharp \varphi)(x,y) &= \varphi(g\,{}^s y, gx^s) = \varphi({}^s({}^s gx), ({}^s g, x)^s) \\ &= (\sigma_X^\sharp \varphi)({}^s gx, {}^s gy) = (\theta_{g',X}^\sharp \circ \sigma_X^\sharp \varphi)(x,y)\end{aligned}$$

となる．又

$${}^s x^s = (s\,{}^t x^{-1} s^{-1})^s = ssxs^{-1}s = (-1)^{n+1}x$$

より $\sigma^4 = 1$ である．さて Bruhat 分解

$$G_n = \bigcup_{w \in W, d \in T} U_n w d U_n \qquad (w = [w] \in W = S_n)$$

より $X = G_n/U_n \times G_n/U_n$ 上の G_n-軌道は $x_{w,d} = (\overline{wd}, \dot{1}) \in X$ $(w \in W, d \in T)$ により代表される．ここで

$$\sigma \cdot x_{w,d} = ((-1)^{n+1} \cdot \dot{1}, \overline{{}^s(wd)}) = {}^s(wd) \cdot (\overline{{}^s(wd)^{-1}}(-1)^{n+1}, \dot{1})$$

より，G_n-軌道 $\Omega_{w,d} = G \cdot x_{w,d}$ が σ-不変であるためには ${}^s(wd)^{-1}(-1)^{n+1} = wd$，即ち

$$(-1)^{n+1}\,{}^s w\,{}^s d = d^{-1} w^{-1} = {}^t(wd^{-1}) \tag{5.5}$$

で十分である．一方，

$$\begin{aligned}H &= \{g \in G_n \mid g \cdot x_{w,d} = x_{w,d}\} \\ &= \{g \in U_n \mid gwd \in wdU_n\} = U_n \cap wU_n w^{-1}\end{aligned}$$

となり，$\mathcal{L}_{x_{w,d}} = \Theta^{wd} \cdot \Theta$ である．ここで $\Theta(h) = \tau\left(\sum_{i=1}^{n-1} h_{i,i+1}\right)$ $(h \in H \subset U_n)$ であり

$$\Theta^{wd}(h) = \Theta(d^{-1}w^{-1}hwd) = \tau\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^{-1} d_{i+1} h_{w(i),w(i+1)}\right)$$

である．よって G-不変な分布 $0 \neq T \in \mathcal{L}_c^*(\Omega_{w,d})$ があれば，定理 3.10.3 より $\Theta^{wd}(h) \cdot \Theta(h) = 1$ for $\forall h \in H$ が必要で，これは $w(i) < w(i+1)$ ならば $w(i+1) = w(i) + 1$ かつ $d_{i+1} = -d_i$ であることを意味する．即ち n の

分割 $\beta = (n_1, n_2, \cdots, n_r)$ があって，β に付随した $\{1, 2, \cdots, n\}$ の分割を $I_\beta = I_1 \sqcup \cdots I_r$ としたとき

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ I_r & I_{r-1} & \cdots & I_2 & I_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 1_{n_1} \\ & & 1_{n_2} & \\ & \iddots & & \\ 1_{n_r} & & & \end{bmatrix}$$

かつ

$$d = \begin{bmatrix} D_{n_r} & & & & \\ & D_{n_{r-1}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & D_{n_2} & \\ & & & & D_{n_1} \end{bmatrix}, \quad D_m = \begin{bmatrix} -a & & & & \\ & a & & & \\ & & -a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (-1)^m a \end{bmatrix}$$

となる．このとき

$$J_n = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (-1)^n \end{bmatrix}$$

とおいて

$$
\begin{aligned}
{}^s w &= J_n \begin{bmatrix} & & & 1_{n_r} \\ & & \iddots & \\ & 1_{n_2} & & \\ 1_{n_1} & & & \end{bmatrix} J_n \\
&= \begin{bmatrix} & & & & J_{n_r} \\ & & & (-1)^{n_r} J_{n_r} & \\ & & \iddots & & \\ & (-1)^{n_r+\cdots+n_3} J_{n_2} & & & \\ (-1)^{n_r+\cdots+n_2} J_{n_1} & & & & \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} J_{n_1} & & & & \\ & (-1)^{n_1} J_{n_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (-1)^{n_1+\cdots+n_{r-2}} J_{n_{r-2}} & \\ & & & & (-1)^{n_1+\cdots+n_{r-1}} J_{n_r} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} & & & (-1)^{n-n_r} 1_{n_r} \\ & & \iddots & \\ & (-1)^{n-n_2} 1_{n_2} & & \\ (-1)^{n-n_1} 1_{n_1} & & & \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

であり

$$
{}^s d = (-1) \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{n_1} D_{n_1}^{-1} & & & \\ & (-1)^{n_2} D_{n_2}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{n_r} D_{n_r}^{-1} \end{bmatrix}
$$

となるから

$$(-1)^{n+1}\,{}^s w\,{}^s d = \begin{bmatrix} & & & D_{n_r}^{-1} \\ & & \iddots & \\ & D_{n_2}^{-1} & & \\ D_{n_1}^{-1} & & & \end{bmatrix} = {}^t(wd^{-1})$$

となって，G_n-不変分布 $0 \neq T \in \mathcal{L}_c^*(\Omega_{w,d})$ があれば $\sigma \cdot \Omega_{w,d} = \Omega_{w,d}$ であることがわかる．更に $\sigma = (\sigma, \sigma_V^\sharp)$ の定義の仕方から，注意 3.13.5 のメカニズムが働くことがわかる．よって $T \in \mathcal{L}_c^*(\Omega_{w,d})$ が G-不変ならば T は σ-不変となる．よって定理 3.13.3 より $\sigma \cdot B = B$，即ち $B \circ \sigma_X^{\sharp-1} = B$，即ち $B(\psi^s, {}^s\varphi) = B(\varphi, \psi)$ $(\varphi, \psi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta)$ となる．■

この命題から次の定理を得る；

定理 5.5.3 E が単純 C^∞-G_n-加群ならば，任意の非退化指標 $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} E_{U_n,\theta} \leq 1$ である．

[**証明**] $\theta = \Theta^{-1}$ として一般性を失わない．G_n, U_n は共にユニモジュラー群だから，定理 3.8.2 と系 3.5.3 より

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{G_n}(\mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta, E^\vee) &\tilde{\to} \mathrm{Hom}_{U_n}(\Theta, E^\vee) \\ &\tilde{\to} \mathrm{Hom}_{U_n}(E, \Theta^{-1}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_{U_n,\Theta^{-1}}, \mathbb{C})\end{aligned}$$

だから，$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G_n}(\mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta, E^\vee) \leq 1$ を示せばよい．Schur の補題から，$T \in \mathrm{Hom}_{G_n}(\mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta, E^\vee)$ は G_n-部分加群 $\mathrm{Ker}\,T \subset \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta$ により定数倍を除いて定まる．ここで G_n の E への作用を $(g, v) \mapsto {}^s g \cdot x$ により定義した G_n-加群を E' とおくと，定理 5.5.1 より G_n-加群の同型 $E' \tilde{\to} E^\vee$ が成り立つ．一方 $g \in U_n$ と $w \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in W = S_n$ に対して

$$(w^{-1}\,{}^t g^{-1} w)_{ij} = ({}^t g^{-1})_{w(i).w(i+1)} = ({}^t g^{-1})_{n+1-i,n-i} = -u_{n-i,n-i+1}$$

だから $({}^s g)_{i,i+1} = g_{n-i,n-i+1}$ となり $\Theta({}^s g) = \Theta(g)$ である．よって複素ベクトル空間としては $E'_{U_n,\Theta^{-1}} = E_{U_n,\Theta^{-1}}$ となる．よって

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G_n}(\mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta, E^\vee) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G_n}(\mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta, E)$$

となる．そこで $0 \neq S \in \mathrm{Hom}_{G_n}(\mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta, E)$ を一つ固定して，任意の $0 \neq T \in \mathrm{Hom}_{G_n}(\mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta, E^\vee)$ に対して

$$B_T(\varphi,\psi) = \langle T\varphi, S\psi\rangle \qquad (\varphi,\psi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta)$$

とおくと，任意の $g \in G$ に対して

$$B_T(g\cdot\varphi, g\cdot\psi) = \langle g\cdot T\varphi, g\cdot S\psi\rangle = \langle T\varphi, S, \psi\rangle = B_T(\varphi,\psi),$$

となり，$B_T : \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta \times \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta \to \mathbb{C}$ は G_n-不変な複素双線形形式である．よって命題 5.5.2 より $B_T(\varphi,\psi) = B_T(\psi^s, {}^s\varphi)$ となる．ここで $S \neq 0, T \neq 0$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(T) &= \{\varphi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta \mid B_T(\varphi,\psi) = 0\,\mathrm{for}\,\forall\psi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta\}\\ &= \{\varphi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta \mid B_T(\psi, {}^s\varphi) = 0\,\mathrm{for}\,\forall\psi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta\}\\ &= \{\varphi \in \mathrm{ind}_{U_n}^{G_n}\Theta \mid {}^s\varphi \in \mathrm{Ker}(S)\}\end{aligned}$$

となり，T は定数倍を除いて一意的である．■

単純 C^∞-G_n-加群 E に対して，$\mathrm{Hom}_{G_n}(E, \mathrm{Ind}_{U_n}^{G_n}\theta) \neq 0$ なる非退化指標 $\theta \in \widehat{U}_n$ があるとき，E は**非退化**（又は **generic**）であるという．このとき任意の非退化指標 $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Ind}_{U_n}^{G_n}\theta) = \dim_{\mathbb{C}} E_{U_n,\theta} = 1$$

である．特に $\mathrm{Ind}_{U_n}^{G_n}\theta$ は E と同型な G_n-加群を一意的に含むから，それを E の **Whittaker モデル**と呼ぶ．

定理 5.5.4 G_n の既約 supercuspidal 表現 E は非退化であり，P_n-加群として同型 $E \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{U_n}^{P_n}\Theta$ が成り立つ．特に任意の退化指標 $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して $E_{U_n,\theta} = 0$ となる．

[**証明**] E は supercuspidal だから，n の任意の分割 $\beta \neq (n)$ に対して $E_{U_\beta,\mathbf{1}} = 0$ である（定理 5.2.5）．よって命題 5.4.13 より，任意の退化指標 $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して $E_{U_n,\theta} = 0$ となる．よって命題 5.4.12 より，$E_{U_n,\theta} \neq 0$ なる非退化指

標 $\theta \in \widehat{U}_n$ がある．即ち E は非退化である．特に $E_{U_n,\Theta} \neq 0$ だから，E は P_n-加群として非退化である．よって命題 5.4.13 から

$$E = E^{\text{non-deg}} = \mathrm{ind}_{U_n}^{P_n} \Theta$$

となる．■

定理 5.5.5 n の分割 β に対して G_β の既約 supercuspidal 表現 (ρ, V) をとって $E = \mathrm{Ind}_{P_\beta}^{G_n}(V \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$ とおくと，任意の $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} E_{U_n,\theta} \leq n!$ である．

[**証明**] G_n の誘導表現 E に付随する $X = G_n/P_\beta$ 上の l-sheaf を $\mathcal{L}$ とする．Bruhat 分解 $G_n = \bigsqcup_{w \in W} U_n w B_n$ と $W_\beta \subset P_\beta$ より

$$G_n = \bigcup_{w \in W^{(\beta)}} U_n w P_\beta$$

である（180 頁参照）．特に X 上の U_n-軌道の個数は $n!$ 以下である．よって命題 1.1.6 より，X 上の U_n-軌道 $\Omega_i \subset X$ を Ω_i が $\bigsqcup_{j \geq i} \Omega_j$ の開集合となるように番号付けることができる．$E = \mathcal{L}_c(X)$ だから，命題 1.5.2 と命題 3.9.4 を繰り返し用いて

$$\dim_{\mathbb{C}} E_{U_n,\theta} = \sum_i \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_c(\Omega_i)_{U_n,\theta}$$

となる．よって $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_c(\Omega_i)_{U_n,\theta} \leq 1$ を示せばよい．U_n-軌道 $\Omega_w = U_n \dot{w} \subset X$ ($\dot{w} = wP_\beta, w \in W^{(\beta)}$) をとると，$\dot{w} \in X$ の固定部分群は $H_w = U_n \cap wP_\beta w^{-1}$ で，$\mathcal{L}_{\dot{w}}$ への H_w の作用は $\rho_w(h) = \rho(w^{-1}hw)$ によるから，U_n-加群 $\mathcal{L}_c(\Omega_w)$ は $\mathrm{ind}_{H_w}^{U_n} \rho_w$ に同型である．U_n, H_w は共にユニモジュラーだから，定理 3.8.2 より複素線形同型

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}_c(\Omega_w)_{U_n,\theta}, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{U_n}(\mathcal{L}_c(\Omega_w), \theta) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{H_w}(\rho_w, \theta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{H^w}(\rho, \theta^w) \end{aligned}$$

となる．ここで $H^w = w^{-1}U_n w \cap P_\beta$, $\theta^w(h) = \theta(whw^{-1})$ とおく．$w \in W^{(\beta)}$ より $U_n \cap G_\beta \subset w^{-1}U_n w$ だから $U_n \cap G_\beta \subset H^w$ となり

$$\mathrm{Hom}_{H^w}(\rho, \theta^w) \subset \mathrm{Hom}_{U_n \cap G_\beta}(\rho, \theta^w) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{U_n \cap G_\beta, \theta^w}, \mathbb{C})$$

となる．ここで $\beta = (n_1, \cdots, n_r)$ とすると $U_n \cap G_\beta = \prod_{i=1}^{r} U_{n_i}$ となり $\theta|_{U_n \cap G_\beta} = \prod_{i=1}^{r} \theta_i$ となる．ここで $\theta_i \in \widehat{U}_{n_i}$ である．(ρ, V) は G_β の既約 supercuspidal 表現だから G_{n_i} の既約 supercuspidal 表現 (ρ_i, V_i) があって $\rho = \bigotimes_{i=1}^{r} \rho_i$ となって，$V_{U_n \cap G_\beta, \theta^w} = \bigotimes_{i=1}^{r} V_{i, U_{n_i}, \theta_i}$ となる．よって定理 5.5.4 と定理 5.5.3 より $\dim_{\mathbb{C}} V_{U_n \cap G_{beta}, \theta^w} \leq 1$ となり，$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_c(\Omega_w)_{U_n, \theta} \leq 1$ を得る．■

系 5.5.6 G_n の既約 C^∞-加群 E と任意の $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} E_{U_n, \theta} \leq n!$ である．

[**証明**] n の適当な分割 β と G_β の既約 supercuspidal 表現 V があって E は $\mathrm{Ind}_{P_\beta}^{G_n}(V \otimes \mathbf{1}_{U_n})$ の G_n-部分加群となるから，命題 3.9.4 と定理 5.5.5 より $\dim_{\mathbb{C}} E_{U_n, \theta} \leq n!$ を得る．■

命題 5.5.7 C^∞-G_n-加群 E に対して次は同値である；

1) E は G_n-加群として長さ有限,
2) E は P_n-加群として長さ有限,
3) 任意の $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} E_{U_n, \theta} < \infty$.

[**証明**] 2) $\Rightarrow$ 1) は明らか．1) $\Rightarrow$ 3) は命題 3.9.4 と系 5.5.6 より明らかだから，3) $\Rightarrow$ 2) を示す．P_n-共役により P_n を $\widehat{U}_n$ に作用させると，P_n-軌道は

$$\Omega = \{\theta_{(a_1, \cdots, a_{n-1})} \mid a_i = 0, 1\}$$

で代表される．そこで

$$d(E) = \sum_{\theta \in \Omega} \dim_{\mathbb{C}} E_{U_n, \theta} < \infty$$

とおくと，命題 5.4.12 より $E \neq 0$ ならば $d(E) \geq 1$ である．従って P_n-部分加群の列

$$0 = E_0 \subsetneqq E_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq E_k = E$$

に対して，命題 3.9.4 より

$$d(E) = \sum_{i=1}^{k} d(E_i/E_{i-1}) \geq k$$

となり，E は P_n-加群として長さ有限である．■

命題 5.5.8 C^∞-P_n-加群 E に対して次は同値である；

1) E は P_n-加群として長さ有限,
2) 任意の $\theta \in \widehat{U}_n$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} E_{U_n,\theta} < \infty$.

[**証明**] 2) $\Rightarrow$ 1) は命題 5.5.7 の 3) $\Rightarrow$ 2) の証明でよいから，1) $\Rightarrow$ 2) を示す．命題 3.9.4 より E は既約 P_n-加群であるとしてよい．又，命題 5.5.7 の証明にあるように $\theta \in \Omega$ としておいてよい．命題 3.9.1 より $E_{U_n,\theta} = (E_{M_n,\theta})_{U_{n-1},\theta}$ で，$\theta|_{M_n} = 1$ 又は $\theta|_{M_n} = \Theta$ である．$\theta|_{M_n} = 1$ ならば $E_{M_n,\theta} = \Psi^-(E)$ は G_{n-1}-加群となり，$P_n = G_{n-1} \ltimes M_n$ より $\Psi^-(E) = E_{M_n,\mathbf{1}}$ は G_{n-1}-加群として長さ有限となるから，命題 5.5.7 より $\dim_{\mathbb{C}} \left(\Psi^-(E)\right)_{U_{n-1},\theta} < \infty$ となる．$\theta|_{M_n} = \Theta$ ならば $E_{M_n,\theta} = \Phi^-(E)$ は P_{n-1}-加群となり，定理 5.4.2 と定理 5.4.3 より，$\Phi^-(E)$ は P_{n-1}-加群として長さ有限となる．よって帰納法を用いれば $\dim_{\mathbb{C}} \left(\Phi^-(E)\right)_{U_{n-1},\theta} < \infty$ となる．■

命題 5.5.9 (π, E) を G の既約 supercuspidal 表現とする．コンパクト開部分群 $N \subset G$ と任意の $u, v \in E, \alpha \in (E^\vee)^N, \beta \in E^\vee$ に対して

$$\int_{\Omega_n} \langle \pi(g^{-1})u, \alpha \rangle \langle \pi(g)v, \beta \rangle d_G(g) = c(N) \cdot d_\pi^{-1} \langle u, \beta \rangle \langle v, \alpha \rangle$$

である．ここで $\Omega_n = \{g \in G \mid 0 \leq \mathrm{ord}_F(\det g) < n\}$ は G の開集合であり，$0 < c(N) \in \mathbb{R}$ は N のみに依存する定数，$0 < d_\pi \in \mathbb{R}$ は π の形式的次数である．

[**証明**] まず

$$\varphi \in \mathcal{S}(F^\times)\,\text{s.t.}\,\varphi(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \le \mathrm{ord}_F(t) < n, \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

とおき，$\chi^n = 1$ なる連続群準同型写像 $\chi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ の全体を $\mathcal{X}$ とおくと

$$\int_{F^\times} \varphi(t)\chi(t)d^\times t = \begin{cases} 0 & : 1 \ne \forall\chi \in \mathcal{X}, \\ n & : \chi = 1 \end{cases}$$

である．実際，$\chi \in \mathcal{X}$ として，$\chi|_{O_F^\times} \ne 1$ のとき，$\chi(\varepsilon) \ne 1$ なる $\varepsilon \in O_F^\times$ をとって

$$\int_{F^\times} \varphi(t)\chi(t)d^\times t = \int_{F^\times} \varphi(t\varepsilon)\chi(t\varepsilon)d^\times t = \chi(\varepsilon)\int_{F^\times} \varphi(t)\chi(t)d^\times t$$

より $\displaystyle\int_{F^\times} \varphi(t)\chi(t)d^\times t = 0$ となる．$\chi|_{O_F^\times} = 1$ のとき，$\chi(\varpi) = \zeta$ は 1 の n 乗根で，$\displaystyle\int_{O_F^\times} d^\times t = 1$ より

$$\int_{F^\times} \varphi(t)\chi(t)d^\times t = \sum_{e \in \mathbb{Z}} \varphi(\varpi^e)\chi(\varpi^e) = \sum_{e=0}^{n-1} \zeta^e = \begin{cases} n & : \zeta = 1, \\ 0 & : \zeta \ne 1. \end{cases}$$

そこで $E = E^N \oplus \mathrm{Ker}(\varepsilon_N)$ より $v = v' + v''$ $(v' \in E^N,\ v'' \in \mathrm{Ker}(\varepsilon_N))$ とおいて

$$\begin{aligned} &\int_G \langle \pi(g^{-1})u, \alpha\rangle\langle \pi(g)v'', \beta\rangle d_G(g) \\ &= \int_N d_N(k) \int_G d_G(g)\langle \pi(gk)^{-1}u, \alpha\rangle\langle \pi(gk)v'', \beta\rangle \\ &= \int_G \langle \pi(g)^{-1}u, \alpha\rangle\langle \pi(g) \circ \varepsilon_N v'', \beta\rangle d_G(g) = 0 \end{aligned}$$

であり

$$\langle v'', \alpha\rangle = \langle v'', \varepsilon_N\alpha\rangle = \langle \varepsilon_N v'', \alpha\rangle = 0$$

だから，$v \in E^N$ としてよい．$G_1 = SL_n(F)$ として

$$\begin{aligned}
&\int_G \langle \pi(g)^{-1}u, \alpha\rangle\langle \pi(g)v, \beta\rangle d_G(g) \\
=&\int_{G/G_1} d_{G/G_1}(\dot{g}) \int_{G_1} d_{G_1}(h)\langle \pi(gh)^{-1}u, \alpha\rangle\langle \pi(gh)v, \beta\rangle \\
=&\int_{F^\times} \varphi(x) f(x) d^\times x
\end{aligned}$$

ここで

$$f(\det g) = \int_{G_1} \langle \pi(gh)^{-1}u, \alpha\rangle\langle \pi(gh)v, \beta\rangle d_{G_1}(h) \qquad (g \in G)$$

である．さて

$$F^* = \{\det g \mid g \in N \cdot Z(G)\} = \{\det k \mid k \in N\}\left(F^\times\right)^n$$

は $F^\times$ の開部分群で $(F^\times : F^*) < \infty$ である．一方 $f(xt) = f(x)$ for $\forall t \in F^*$ だから

$$f(x) = \sum_{\chi \in \mathcal{X} \text{ s.t. } \chi|_{F^*}=1} c_\chi \cdot \chi(x) \qquad (x \in F^\times)$$

である．よって

$$\int_{F^\times} \varphi(x)\chi(x) d^\times x = \sum_{\chi \in \mathcal{X} \text{ s.t. } \chi|_{F^*}=1} c_\chi \int_{F^\times} \varphi(x)\chi(x) d^\times x = n \cdot c_1$$

となる．一方

$$\begin{aligned}
&\int_{G/Z(G)} \langle \pi(g)^{-1}u, \alpha\rangle\langle \pi(g)v, \beta\rangle d_{G/Z(G)}(\dot{g}) = d_\pi^{-1}\langle u, \beta\rangle\langle v, \alpha\rangle \\
=&\int_{G/G_1Z(G)N} d_G(\dot{g}) \int_{G_1/G_1 \cap Z(G)N} d_{G_1}(\dot{h}) \int_{N/N \cap Z(G)} d_N(\dot{k}) \\
&\qquad \langle \pi(ghk)^{-1}u, \alpha\rangle\langle \pi(ghk)v, \beta\rangle \\
=&\mathrm{vol}_{G_1}(G_1 \cap Z(G)N) \cdot \mathrm{vol}_N(N/N \cap NZ(G)) \\
&\quad \times \int_{G/G_1Z(G)N} d_G(\dot{g}) \int_{G_1} \langle \pi(gh)^{-1}u, \alpha\rangle\langle \pi(gh)v, \beta\rangle \\
=&c(N) \cdot \sum_{\dot{x} \in F^\times/F^*} f(x) = c(N) \cdot c_1.
\end{aligned}$$

よって

$$\int_G \langle \pi(g)^{-1}u, \alpha\rangle\langle \pi(g)v, \beta\rangle\varphi(\det g)d_G(g) = n\cdot c(N)^{-1}\cdot d_\pi^{-1}\langle u, \beta\rangle\langle v, \alpha\rangle$$

となる．■

5.6　帯球関数と佐武同型

$G = GL_n(F), K = GL_n(O_F)$ として，$B = T \ltimes U$ を考える（180 頁参照）．$d_T(t) = \prod_{i=1}^n d^\times t$ $(d^\times t = |t|_F^{-1}dt, \int_{O_F^\times} d^\times t = 1)$ は T 上の Haar 測度であり，$d_U(h) = \prod_{1\le i<j\le n} dh_{ij}$ は U 上の Haar 測度である．ここで加法群 F 上の Haar 測度 dh_{ij} は $\int_{O_F} dh_{ij} = 1$ となるように正規化しておく．即ち $\int_{U\cap K} d_U(h) = 1$ となるように正規化する．$d_B(th) = d_T(t)d_B(h)$ により B 上の左 Haar 測度を定めると，B のモジュラー関数は

$$\Delta_B(b) = \prod_{1\le i<j\le n} |b_i^{-1}b_j|_F = \prod_{i=1}^n |b_i|_F^{2i-(n+1)} = |\det b|_F^{-(n+1)}\prod_{i=1}^n |b_i|_F^{2i}$$

$\left(b = \begin{bmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix} \in B\right)$ となる．$\int_K d_K(k) = 1$ なる K 上の Haar 測度 $d_K(k)$ をとり，G 上の Haar 測度 $d_G(g)$ を

$$\int_G \varphi(g)d_G(g) = \int_K d_K(k)\int_B d_B(b)\varphi(kb)\Delta_B(b)^{-1} \qquad (\varphi \in C_c(G))$$

により定める．

5.6.1　まず G のクラス-**1**-表現について述べる．

命題 5.6.1.1 $\mathcal{H}_K(G)$ は可換である．

[証明] $d_G(g) = \text{const.} \times |\det g|_F^{-n} \prod_{i,j} dg_{ij}$ だから $d_G({}^t g) = d_G(g)$. $G = GL_n(F)$ の Cartan 分解に注意すれば，任意の $g \in G$ に対して ${}^t(KgK) = KgK$ だから，任意の $\varphi \in \mathcal{H}_K(G)$ に対して $\varphi({}^t x) = \varphi(x)$ である．よって任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_K(G)$ に対して

$$\begin{aligned}(\varphi * \psi)(x) &= \int_G \varphi(xy^{-1})\psi(y)d_G(y) = \int_G \varphi({}^t y^{-1}\,{}^t x)\psi({}^t y)d_G(y) \\ &= \int_G \psi(y)\varphi(y^{-1}\,{}^t x)d_G(y) = (\psi * \varphi)({}^t x) = (\psi * \varphi)(x)\end{aligned}$$

となる．■

既約な C^∞-G-加群 E に対して，命題 3.3.3 より $\dim_{\mathbb{C}} E^K \leq 1$ である．そこで $E^K \neq 0$ のとき（即ち $\dim_{\mathbb{C}} E^K = 1$ のとき）E を既約な**クラス-1-G-加群**と呼ぶ．このとき $(E^\vee)^K = (E^K)^*$ だから $\dim_{\mathbb{C}}(E^\vee)^K = 1$ となるが，$\langle u, \alpha \rangle = 1$ なる $u \in E^K$ と $\alpha \in (E^\vee)^K$ がとれる．
[証明] 命題 3.4.1 より

$$E^K \times E^\vee/(E^K)^\perp \ni (u, \dot{\alpha}) \mapsto \langle u, \alpha \rangle \in \mathbb{C}$$

は非退化複素双線形形式だから $\dim_{\mathbb{C}} E^\vee/(E^K)^\perp = 1$，よって $\alpha \in E^\vee \backslash (E^K)^\perp$ をとれば，$\langle u, \alpha \rangle \neq 0$ なる $u \in E^K$ がとれる．■

そこで行列係数

$$\omega(g) = \omega_E(g) = \varphi_{u,\alpha}(g) = \langle g \cdot u, \alpha \rangle \qquad (g \in G)$$

をとると，$\omega = \omega_E$ は K に関する G 上の帯球関数となる．即ち

1) 任意の $k \in K$ に対して $\omega(kgk^{-1}) = \omega(g)$,
2) $\varphi \in \mathcal{H}_K(G)$ に対して

$$\widehat{\omega}(\varphi) = \int_G \varphi(x)\omega(x)d_G(x)$$

とおくと，$\widehat{\omega} : \mathcal{H}_K(G) \to \mathbb{C}$ は 0 でない $\mathbb{C}$-代数準同型写像となる．

[**証明**] $u \in E^K, \alpha \in (E^\vee)^K$ より 1) は明らか．任意の $\varphi \in \mathcal{H}_K(G)$ に対して $\varphi \cdot u \in E^K$ だから $\varphi \cdot u = \lambda(\varphi)u$ なる $\lambda(\varphi) \in \mathbb{C}$ がとれて，$\varphi \mapsto \lambda(\varphi)$ は $\mathcal{H}_K(G)$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-代数の準同型写像となり，更に $\lambda(\varepsilon_K) = 1$ である．一方 $\varphi \in \mathcal{H}_K(G)$ に対して

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}(\varphi) &= \int_G \varphi(x)\langle x \cdot u, \alpha\rangle d_G(x) = \langle \varphi \cdot u, \alpha\rangle \\ &= \lambda(\varphi)\langle u, \alpha\rangle = \lambda(\varphi).\end{aligned}$$

■

更に，既約クラス-**1**-G-加群 E' に対して，次は同値である；

1) E と E' は G-加群として同型,
2) $\omega_E = \omega_{E'}$,
3) $\widehat{\omega}_E = \widehat{\omega}_{E'}$.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) は明らか．$\widehat{\omega}_E = \widehat{\omega}_{E'}$ とすると，E^K と E'^K は $\mathcal{H}_K(G)$-加群として同型となるから，命題 3.2.3 より E と E' は G-加群として同型となる．■

逆に 0 でない $\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\lambda : \mathcal{H}_K(G) \to \mathbb{C}$ に対して，$\varphi \cdot z = \lambda(\varphi) \cdot z$ $(\varphi \in \mathcal{H}_K(G), z \in \mathbb{C})$ により $\mathbb{C}$ を $\mathcal{H}_K(G)$-加群とみれば，定理 3.2.4 より $\mathcal{H}_K(G)$-加群の同型 $E^K \tilde{\to} \mathbb{C}$ が成り立つような既約 C^∞-G-加群 E が存在する．このとき

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_E(\varphi) &= \int_G \varphi(x)\langle x \cdot u, \alpha\rangle d_G(x) = \langle \varphi \cdot u, \alpha\rangle \\ &= \lambda(\varphi)\langle u, \alpha\rangle = \lambda(\varphi) \qquad (\varphi \in \mathcal{H}_K(G))\end{aligned}$$

となる．

既約なクラス-**1**-G-加群が次のように構成される．まず，連続群準同型写像 $\lambda : T \to \mathbb{C}^\times$ にたいして，$\phi \in \mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2} \cdot (\lambda \otimes \mathbf{1}_U))$ とすると，$G = KB$ かつ

$$\phi(kb) = \Delta_B(b)^{1/2}\lambda(b)^{-1}\phi(1) \qquad (k \in K, b \in B)$$

だから

1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2} \cdot (\lambda \otimes \mathbf{1}_U))^K \leq 1$,
2) $\mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2} \cdot (\lambda \otimes \mathbf{1}_U))^K \neq 0$ なる必要十分条件は $\lambda|_{T\cap K} = 1$ なることである．このとき $\phi_\lambda(kb) = \Delta_B(b)^{1/2}\lambda(b)^{-1}$ $(k \in G, b \in B)$ とおくと

$$\mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2} \cdot (\lambda \otimes \mathbf{1}_U))^K = \langle \phi_\lambda \rangle_{\mathbb{C}}.$$

である．そこで以下 $\lambda|_{T\cap K} = 1$ とする．このとき非退化複素双線形形式

$$\langle\,,\rangle : \mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2}(\lambda \otimes \mathbf{1}_U) \times \mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2}(\lambda^{-1} \otimes \mathbf{1}_U) \to \mathbb{C}$$

が

$$\langle \phi, \phi^\vee \rangle = \int_{G/B} \phi(x)\phi^\vee(x)\rho(x)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x}) = \int_K \phi(k)\phi^\vee(k) d_K(k)$$

により定義される．ここで μ_ρ は H に関する G 上の ρ- 関数 $\rho(kb) = \Delta_B(b)$ $(k \in K, b \in B)$ に付随する G/B 上の Radon 測度である；

$$\int_G \varphi(x)\rho(x) d_G(x) = \int_{G/B} \left(\int_B \varphi(xb) d_B(b) \right) d_{\mu_[\rho}(\dot{x}) \qquad (\varphi \in C_c(G)).$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_K d_K(k) \int_B d_B(b)\varphi(kb)\rho(kb)\Delta_B(b)^{-1} \\ &= \int_K \left(\int_B \varphi(kb) d_B(b) \right) d_K(k) \end{aligned}$$

だから $\displaystyle\int_{G/B} \psi(x) d\mu_\rho(x) = \int_K \psi(\dot{k}) d_K(k)$ $(\psi \in C_c(G/B))$ である．さて

$$E_\lambda = \langle g \cdot \phi_\lambda \mid g \in G \rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2} \cdot (\lambda \otimes \mathbf{1}_U))$$

は既約 G-加群で $E^K = \langle \phi_\lambda \rangle_{\mathbb{C}}$ である．
[**証明**] G-部分加群 $0 \neq M \subsetneqq E_\lambda$ に対して，命題 5.3.1 より $M^K \neq 0$ だから $\phi_\lambda \in M^K$ であり，M は G-加群として M^K で生成されるから $M = E_\lambda$ となる．■

更に G-加群の同型

$$\mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2} \cdot (\lambda^{-1} \otimes \mathbf{1}_U))/E_\lambda^\perp \tilde{\to} E_\lambda^\vee \qquad (\overline{\phi^\vee} \mapsto \langle *, \phi^\vee \rangle)$$

が成り立ち，$\langle \phi_\lambda, \phi_{\lambda^{-1}} \rangle = \int_K \phi_\lambda(k)\phi_{\lambda^{-1}}(k)d_K(k) = 1$ より

$$\phi_{\lambda^{-1}} \notin E_\lambda^\perp = \{\alpha \in \mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2} \cdot (\lambda^{-1} \otimes \mathbf{1}_U)) \mid \langle E_\lambda, \phi \rangle = 0\}$$

であり，上で見たとおり $\dim_{\mathbb{C}}(E_\lambda^\vee)^K = 1$ である．よって

$$(E_\lambda^\vee)^K = \mathbb{C}\langle *, \phi_{\lambda^{-1}} \rangle$$

となる．よって E_λ に付随する帯球関数は

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(g) &= \omega_{E_\lambda}(g) = \langle g \cdot \phi_\lambda, \phi_{\lambda^{-1}} \rangle \\ &= \int_{G/B} \phi_\lambda(g^{-1}x)\phi_\lambda(x)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x}) = \int_K \phi_\lambda(g^{-1}k)d_K(k) \qquad (g \in G)\end{aligned}$$

となり，$\langle g \cdot \phi_\lambda, \phi^{\lambda^{-1}} \rangle = \langle \phi_\lambda, g^{-1} \cdot \phi_{\lambda^{-1}} \rangle$ より $\omega_{\lambda^{-1}}(g) = \omega_\lambda(g^{-1})$ である．

5.6.2　　さて $\mathbb{G} = GL_n$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された線形代数群とみて，対角行列全体のなす部分群 $\mathbb{T} \subset \mathbb{G}$ に関するルート・データ $(X(\mathbb{T}), \Phi; X^\vee(\mathbb{T}), \Phi^\vee)$ を考える（例 B.2）．群準同型写像 $\mathrm{ord}_T : T \to X^\vee(\mathbb{T})$ が

$$\langle \alpha, \mathrm{ord}_T(t) \rangle = \mathrm{ord}_F(\alpha(t)) \qquad (\alpha \in X(\mathbb{T}))$$

により定まる．例 B.2 の記号を用いれば

$$\mathrm{ord}_T(t) = u_{(\mathrm{ord}_F(t_i))_{1 \le i \le n}} \qquad (t \in T = \mathbb{T}(F))$$

である．このとき

$$1 \to T \cap K \to T \xrightarrow{\mathrm{ord}_T} X^\vee \to 0 : \mathrm{exact}$$

だから，$\lambda|_{T \cap K} = 1$ なる連続群準同型写像 $\lambda : T \to \mathbb{C}^\times$ は $\xi \mapsto \mathrm{ord}_T \circ \xi$ により，群準同型写像 $\xi : X^\vee(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}^\times$ と一対一に対応する．一方，群準同型写像 $\xi : X^\vee(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}^\times$ は，$X^\vee(\mathbb{T})$ の群環 $\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-代数準同型写像と対応しているから，複素トーラス ${}^L\mathbb{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})])$ に対して ${}^L\mathbb{T}(\mathbb{C})$ の元と一対一に対応している．${}^L\mathbb{T}$ は双対ルート・データ

$(X^\vee(\mathbb{T}), \Phi^\vee; X(\mathbb{T}), \Phi)$ に付随して $\mathbb{C}$ 上定義された簡約可能な連結線形代数群 ${}^L\mathbb{G}$ があって，${}^L\mathbb{T}$ は ${}^L\mathbb{G}$ の極大トーラスとなる（定理 B.7）．例 B.2 から ${}^L\mathbb{G} = GL_n$ として ${}^L\mathbb{T} \subset GL_n$ は対角行列のなす部分群とすれば，$\mathbb{C}$-代数準同型写像

$$\xi : \mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})] \to \mathbb{C}$$

は $\begin{bmatrix} \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_n \end{bmatrix} \in {}^L\mathbb{T}(\mathbb{C})$ $(\xi_i = \xi(u_{e_i}) \in \mathbb{C})$ に対応するから，連続群準同型写像

$$\lambda : T \ni t \mapsto \prod_{i=1}^n \xi_i^{\mathrm{ord}_F(t_i)} \in \mathbb{C}^\times$$

に対応する．このとき $\omega_\lambda = \omega_\xi$ と書くことにする．さて $\varphi \in \mathcal{H}_K(G)$ に対して

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}_\lambda(\varphi) &= \int_G \varphi(g)\omega_\lambda(g)d_G(g) = \int_G d_G(g)\int_K d_K(k)\varphi(g)\phi_\lambda(g^{-1}k) \\
&= \int_G \varphi(g)\phi_\lambda(g^{-1})d_G(g) = \int_G \varphi(g^{-1})\phi_\lambda(g)d_G(g) \\
&= \int_K d_K(k)\int_B d_B(b)\varphi(b^{-1}k^{-1})\phi_\lambda(kb)\Delta_B(b)^{-1} \\
&= \int_B \varphi(b^{-1})\lambda(b)^{-1}\Delta_B(b)^{-1/2}d_B(b) = \int_B \varphi(b)\lambda(b)\Delta_B(b)^{-1/2}d_B(b) \\
&= \int_T d_T(t)\int_U d_U(h)\varphi(th)\lambda(t)\Delta_B(t)^{-1/2}
\end{aligned}$$

となり

$$\widetilde{\varphi}(t) = \Delta_B(t)^{-1/2}\int_U \varphi(th)d_U(h) \qquad (t \in T)$$

は $T \cap K$-不変だから，$X^\vee(\mathbb{T})$ 上の関数 $\varphi^\vee$ があって $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi^\vee(\mathrm{ord}_T(t))$ と書ける．よって $\lambda(t) = \xi(\mathrm{ord}_T(t))$ より

$$\widehat{\omega}_\lambda(\varphi) = \int_T \widetilde{\varphi}(t)\lambda(t)d_T(t) = \xi\left(\sum_{u \in X^\vee(\mathbb{T})} \varphi^\vee(u)\cdot u\right) \tag{5.6}$$

$(\sum_{u\in X^\vee(\mathbb{T})}\varphi^\vee(u)\cdot u\in\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})])$ となる．ここで U の Lie 環

$$\mathfrak{u}=\left\{\begin{bmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & o\end{bmatrix}\in\mathfrak{gl}_n(F)\right\}$$

から U への写像 $X\mapsto\exp X$ は全単射となり，U 上の Haar 測度は $d_U(h)=d_{\mathfrak{u}}(X)$ $(h=\exp X)$ により与えられる．従って $t\in T$ に対して

$$h'=t^{-1}hth^{-1}=\exp(t^{-1}Xt-X+\cdots)$$

となることから

$$\Delta(t)=\prod_{1\le i<j\le n}|t_it_j^{-1}-1|_F\qquad(t\in T)$$

とおくと

$$\frac{d_U(h')}{d_U(h)}=\Delta(t^{-1})=\Delta(t)\Delta_B(t)$$

となる．放物的部分群 $\mathbb{B}\subset\mathbb{G}$ $(B=\mathbb{B}(F))$ により定まる正のルートを Φ^+ と書けば

$$\Delta_B(t)=\prod_{\alpha\in\Phi^+}|\alpha(t)|_F^{-1},\qquad\Delta(t)=\prod_{\alpha\in\Phi^+}|\alpha(t)-1|_F$$

である．そこで

$$D(t)=\prod_{\alpha\in\Phi}|\alpha(t)-1|_F^{1/2}=\Delta(t)\cdot\Delta_B(t)^{-1/2}\qquad(t\in T)$$

とおくと

命題 5.6.2.1 $\varphi\in\mathcal{H}_K(G)$ に対して，$D(t)\neq 0$ $(t\in T)$ ならば

$$\widetilde{\varphi}(t)=D(t)\int_{G/T}\varphi(xtx^{-1})d_{G/T}(\dot{x})$$

$(d_{G/T}(\dot{x})$ は G/T 上の G-不変測度$)$ である．

[**証明**] G-不変測度 $d_{G/T}(\dot{x})$ を

$$\int_G \psi(x)d_G(x) = \int_{G/T}\left(\int_T \psi(xt)d_T(t)\right)d_{G/T}(\dot{x}) \qquad (\psi \in C_c(G))$$

となるように定めれば

$$\begin{aligned}\int_G \psi(x)d_G(x) &= \int_K d_K(k)\int_B d_B(b)\psi(bk)\Delta_B(b)^{-1}\\ &= \int_K d_K(k)\int_U d_U(h)\int_T d_T(t)\psi(kut)\end{aligned}$$

だから

$$\int_{G/T}\psi(\dot{x})d_{G/T}(\dot{x}) = \int_K d_K(k)\int_U d_U(h)\psi(k\cdot\dot{h})$$

$(\psi \in C_c(G/T))$ である．よって $D(t) \neq 0$ なる $t \in T$ に対しては

$$\begin{aligned}\int_{G/T}\varphi(xtx^{-1})d_{G/T}(\dot{x}) &= \int_U \varphi(hth^{-1})d_U(h)\\ =\Delta(t)^{-1}\Delta_B(t)^{-1}&\int_U \varphi(th')d_U(h') \quad (h' = t^{-1}hth^{-1})\end{aligned}$$

となり，$D(t) \neq 0$ より

$$\int_U \varphi(th')d_U(h)\int_U \varphi(th)d_U(h)$$

となる．■

上の命題で，$D(t) \neq 0$ なる $t \in T$ の G における中心化群が T であることに注意する．ところで $\mathbb{G}$ の Weyl 群 $W_{\mathbb{T}} = N(\mathbb{T})(\mathbb{C})/Z(\mathbb{T})(\mathbb{C})$ は $GL_n(\mathbb{Q})$ の元で代表され，$w = \dot{n} \in W_{\mathbb{T}}$ は $\alpha \in X(\mathbb{T})$ に $\alpha^w(t) = \alpha(ntn^{-1})$ により作用し，$u \in X^\vee(\mathbb{T})$ には $u^w(s) = u(n^{-1}sn)$ により作用する（即ち $\langle\alpha^w, u^w\rangle = \langle\alpha, u\rangle$）．よって $W_{\mathbb{T}}$ は群環 $\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]$ に作用するから，その固定部分環を $\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_{\mathbb{T}}}$ とおく．ところで $w = \dot{n} \in W_{\mathbb{T}}$ $(n \in N(\mathbb{T})(\mathbb{Q}))$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\alpha, \mathrm{ord}_T(t)^w\rangle &= \langle\alpha^{w^{-1}}, \mathrm{ord}_T(t)\rangle\\ &= \mathrm{ord}_F\alpha^{w^{-1}}(t) = \mathrm{ord}_F\alpha(n^{-1}tn)\\ &= \langle\alpha, \mathrm{ord}_T(n^{-1}tn)\rangle \qquad (t \in T)\end{aligned}$$

だから，命題 5.6.2.1 より $\varphi^\vee(u)$ $(u \in X^\vee(\mathbb{T}))$ は $W_\mathbb{T}$ の作用で不変となる．更に，任意の $\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\xi : \mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})] \to \mathbb{C}$ に対して

$$\varphi \mapsto \xi\left(\sum_{u \in X^\vee(\mathbb{T})} \varphi^\vee(u) \cdot u\right) = \widehat{\omega}_\lambda(\varphi)$$

が $\mathbb{C}$-代数準同型写像となるから，可換環の一般論[4]から

$$\varphi \mapsto \sum_{u \in X^\vee(\mathbb{T})} \varphi^\vee(u) \cdot u \tag{5.7}$$

は $\mathcal{H}_K(G)$ から $\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_\mathbb{T}}$ への $\mathbb{C}$-代数準同型写像となる．ここで次の**佐武の同型定理**が基本的である；

定理 5.6.2.2 5.7 は $\mathcal{H}_K(G)$ から $\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_\mathbb{T}}$ への $\mathbb{C}$-代数の同型写像を与える．

実際 (5.7) が複素線形同型写像であることを示せば十分である．そのために幾つか準備をしておく．まず

$$\mathbb{Z}^n_{\geq} = \{(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{Z}^n \mid r_1 \geq \cdots \geq r_n\}$$

として，Cartan 分解

$$G = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Z}^n_{\geq}} K\varpi^r K \qquad (\varpi^r = \begin{bmatrix} \varpi^{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi^{r_n} \end{bmatrix})$$

から，$g \in G$ に対して $g \in K\varpi^r K$ $(r \in \mathbb{Z}^n_{\geq})$ のとき $\mathbf{r}(g) = r$ と書くことにする．言い換えれば $V = F^n$ の O_F-格子 $L = O_F^n$ の O_F-基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ であって

$$\{\varpi^{r_1}u_1, \cdots, \varpi^{r_n}u_n\} \qquad (r_1 \geq \cdots \geq r_n)$$

[4] $A = \mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]$ は有限生成 $\mathbb{C}$-代数だから，極大イデアル $\mathfrak{m} \subset A$ に対して $A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$ である．一方 A は整域だから，全ての極大イデアルの共通部分は 0 となる．よって $0 \neq a \in A$ ならば $a \notin \mathfrak{m}$ なる極大イデアル $\mathfrak{m} \subset A$ があって，自然な $\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\xi : A \to A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$ に対して $\xi(a) \neq 0$ となる．

が O_F-格子 $gL \subset V$ の O_F-基底となるとき，$\mathbf{r}(g) = r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq}$ と書く．従って $(gL : L) = (\varpi^{r_1})$ である（5.6.4 節参照）．ここで $\mathbb{Z}^n$ の各座標の大小関係から辞書式順序を入れておく．すると

命題 5.6.2.3 任意の $m \in \mathbb{Z}^n$ と $h \in U$ に対して $\mathbf{r}(\varpi^m h) \geq m$ である．

[**証明**] $n = 1$ のときは明らかだから，n に関する帰納法を用いる．

$$g = \varpi^m h = \begin{bmatrix} \varpi^{m_1} & & \text{\Large $*$} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \varpi^{m_n} \end{bmatrix}$$

とおいて $\mathbf{r}(g) = r \in \mathbb{Z}^n_{\geq}$ とする．$V = F^n$ の O_F-格子 $L = O_F^n$ に自然な O_F-基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に対して $ge_1 = \varpi^{m_1} e_1$ だから

$$(gL : e_1) = (L : g^{-1} e_1) = (L : \varpi^{-m_1} e_1) = (\varpi^{m_1})$$

である．一方，$e_1 \in L$ だから

$$(\varpi^{m_1}) = (gL : L) \subset (gL : e_1) = (\varpi^{m_1})$$

だから $r_1 \geq m_1$ である．$r_1 > m_1$ ならば $\mathbf{r}(g) \geq m$ となる．$r_1 = m_1$ のとき

$$(gL : L) = (\varpi^{r_1}), \qquad (gL : e_1) = (\varpi^{r_1}), \qquad (L : e_1) = (1)$$

となるから，命題 5.6.4.2 より $\{u_2, \cdots, u_n\} \subset L$ と $\{a_2, \cdots, a_n\} \subset F^\times$ があって，$\{e_1, u_2, \cdots, u_n\}$ は L の O_F-基底となり

$$(\varpi^{r_1}) \subset (a_2) \subset \cdots \subset (a_n)$$

かつ $\{\varpi^{r_1} e_1, a_2 u_2, \cdots, a_n u_n\}$ は gL の O_F-基底となるように出来る．このとき $(a_i) = (\varpi^{r_i})$ $(1 < i \leq n)$ である．そこで $k = (e_1, u_2, \cdots, u_n) \in K$ とおけば $k\varpi^r = gl$ $(l \in K)$ と書ける．ここで

$$k = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & k' \end{bmatrix}, \qquad l = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & l' \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & h' \end{bmatrix}$$

$(k', l' \in K_{n-1}, h' \in U_{n-1})$ とおけば，$k'\varpi^{r'} = \varpi^{m'}h'l'$ となる．但し

$$r' = (r_2, \cdots, r_n), \qquad m' = (m_2, \cdots, m_n)$$

である．よって帰納法の仮定から $r' = \mathbf{r}(\varpi^{m'}) \geq m'$ となるから，$r \geq m$ を得る．■

以上の準備の下で，定理 5.6.2.2 は次のように示される；

[証明] $l \in \mathbb{Z}^n_{\geq}$ に対して $K\varpi^l K$ の G における特性関数を $\varphi_l \in \mathcal{H}_K(G)$ とおくと $\{\varphi_l \mid l \in \mathbb{Z}^n_{\geq}\}$ が $\mathcal{H}_K(G)$ の $\mathbb{C}$-基底となる．一方，例 B.2 の記号を用いて $X_i = u_{e_i} \in X^\vee(\mathbb{T})$ とおくと，$X^\vee(\mathbb{T})$ は $\{X_1, \cdots, X_n\}$ を基底とする自由可換群だから

$$\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})] = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$$

となり，$W_\mathbb{T}$ は $\{X_1, \cdots, X_n\}$ の任意の置換を生ずる．従って $l \in \mathbb{Z}^n_{\geq}$ に対して

$$F_l = (W_\mathbb{T} : W_{\mathbb{T},m})^{-1} \sum_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)}^{l_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{l_n}$$

とおくと（$W_{\mathbb{T},m}$ は m の固定部分群）$\{F_l \mid l \in \mathbb{Z}^n_{\geq}\}$ が $\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_\mathbb{T}}$ の $\mathbb{C}$-基底を与える．そこで，これらの基底に関する (5.7) の表現行列を考えると，$l \in \mathbb{Z}^n_{\geq}$ に対して

$$\varphi_l \mapsto \sum_{u \in X^\vee(\mathbb{T})} \varphi_l^\vee(u) \cdot u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n_{\geq}} \widetilde{\varphi}_l(\varpi^m) \cdot F_l$$

となるから，$l, m \in \mathbb{Z}^n_{\geq}$ に対して $\widetilde{\varphi}_l(\varpi^m)$ を求めればよい．まず定義から

$$\widetilde{\varphi}_l(\varpi^m) = \Delta_B(\varpi^m)^{-1/2} \cdot \mathrm{vol}_U(U \cap \varpi^{-m}K\varpi^l K)$$

である．ここで $\mathrm{vol}_U(U \cap K) = 1$ と正規化してあるから，$\mathrm{vol}_U(U \cap \varpi^{-m}K\varpi^m) = \Delta_U(\varpi^m)$ である．又

$$\sharp\left((U \cap \varpi^{-m}K\varpi^m)\backslash(U \cap \varpi^{-m}K\varpi^l K)\right) = \sharp\left(K\backslash(K\varpi^m U \cap K\varpi^l K)\right)$$

だから

$$\widetilde{\varphi}_l(\varpi^m) = \Delta_B(\varpi^m)^{1/2} \cdot \sharp\left(K\backslash(K\varpi^m U \cap K\varpi^l K)\right) \tag{5.8}$$

となる．従って命題 5.6.2.3 より，$\widetilde{\varphi}_l(\varpi^m) \neq 0$ となるには $l \geq m$ かつ $\displaystyle\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n m_i$ が必要であり，$l = m$ ならば

$$U \cap \varpi^{-l} K \varpi^l K = \varpi^{-l}(U \cap K \varpi^l K \varpi^{-l})\varpi^l = \varpi^{-l}(U \cap K)\varpi^l$$

となるから

$$\widetilde{\varphi}_l(\varpi^l) = \Delta_B(\varpi^l)^{1/2}$$

である．即ち，表現行列 $(\widetilde{\varphi}_l(\varpi^m))_{l,m \in \mathbb{Z}^n_{\geq}}$ は対角行列かつ対角成分は 0 でない．よって複素線形写像(5.7) は全単射である．■

特に $m \in \mathbb{Z}^n_{\geq}$ に対して $m \leq l = e_1 + \cdots + e_k$ かつ $\displaystyle\sum_{i=1}^n m_i = k$ となるのは $m = e_1 + \cdots + e_k$ の場合にかぎるから

$$\widetilde{\varphi}_{e_1+\cdots+e_k}(\varpi^m) = \begin{cases} 0 & : m \neq e_1 + \cdots + e_k, \\ \Delta_B(\varpi^{e_1+\cdots+e_k})^{1/2} = q^{k(n-k)/2} & : m = e_1 + \cdots + e_k \end{cases}$$

となる．よって

$$\sum_{u \in X^\vee(\mathbb{T})} \varphi^\vee_{e_1+\cdots+e_k}(u) \cdot u = q^{k(n-k)/2} \cdot F_k \tag{5.9}$$

となる．ここで

$$F_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} X_{i_1} \cdots X_{i_k}$$

は k 次基本対称式である．よって

$$\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_{\mathbb{T}}} = \mathbb{C}[F_1, \cdots, F_{n-1}, F_n^{\pm 1}]$$

だから

$$\varphi_k = \varphi_{e_1+\cdots+e_k} = K \begin{bmatrix} \varpi \cdot 1_k & 0 \\ 0 & 1_{n-k} \end{bmatrix} K \text{ の特性関数} \in \mathcal{H}_K(G)$$

とおくと

$$\mathcal{H}_K(G) = \mathbb{C}[\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}, \varphi_n^{\pm 1}]$$

となる．

5.6.3　佐武の同型定理から言えることを幾つか示しておく．まず $W_{\mathbb{T}}$ を $\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]$ の有限自己同型群とみれば，可換環論の一般論から次が従う

定理 5.6.3.1　1) K に関する G 上の帯球関数は $\omega_\lambda = \omega_\xi$ ($\xi \in {}^L\mathbb{T}(\mathbb{C})$) で尽くされる．

2) $\xi, \xi' \in {}^L\mathbb{T}(\mathbb{C})$ に対して，$\omega_\xi = \omega_{\xi'}$ となる必要十分条件は ξ, ξ' が同じ $W_{\mathbb{T}}$-軌道に属することである．

[**証明**] 1) ω を K に関する G 上の帯球関数とする．$\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\widehat{\omega} : \mathcal{H}_K(G) \to \mathbb{C}$ は，佐武同型を通して $\mathbb{C}$-代数準同型写像

$$\xi : \mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_{\mathbb{T}}} \to \mathbb{C}$$

を導くが，$\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]/\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_{\mathbb{T}}}$ は整拡大だから，$\mathbb{C}$-代数準同型写像

$$\xi : \mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})] \to \mathbb{C}$$

に延長される（[4, Chap.5,§2, no.1, Cor.4]）．よって任意の $\varphi \in \mathcal{H}_K(G)$ に対して

$$\widehat{\omega}(\varphi) = \xi\left(\sum_{u \in X^\vee(\mathbb{T})} \varphi^\vee(u) \cdot u\right) = \widehat{\omega}_\xi(\varphi)$$

となるから $\omega = \omega_\xi$ を得る．

2) $\omega_\xi = \omega_{\xi'}$ は ξ と ξ' が $\mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_{\mathbb{T}}}$ 上で一致することと同値であるが，これは ξ と ξ' が同じ $W_{\mathbb{T}}$-軌道に属することと同値である（[4, Chap.5,§2, no.2, Cor.]）．■

上の定理を G の既約クラス-**1**-表現に関して言い換えると，次の系を得る；

系 5.6.3.2　1) G の既約なクラス-**1**-表現は，$T \cap K$ 上自明なる連続群準同型写像 $\lambda : T \to \mathbb{C}^\times$ に対する E_λ で尽くされる．

2) $T \cap K$ 上自明なる連続群準同型写像 $\lambda, \mu : T \to \mathbb{C}^\times$ に対して，E_λ と E_μ が G-加群として同型である必要十分条件は λ と μ が同じ $W_{\mathbb{T}}$-軌道に属することである．

$\xi \in {}^L\mathbb{T}(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ と $\omega_\xi \in \Omega(G, K)$ の関係は次の通りである；

命題 5.6.3.3 $\xi \in {}^L\mathbb{T}(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\det(t \cdot 1_n - \xi) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{-k(n-k)/2} \widehat{\omega}_\xi(\varphi_k) \cdot t^{n-k}.$$

[**証明**] $\xi \in {}^L\mathbb{T}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$-代数準同型写像 $\xi : \mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})] \to \mathbb{C}$ とみれば

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi(X_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \xi(X_n) \end{bmatrix}$$

だから

$$\det(t \cdot 1_n - \xi) = \prod_{i=1}^{n} (t - \xi(X_i)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \xi(F_k) \cdot t^{n-k}$$

である．一方 (5.6) と(5.9) より $\widehat{\omega}_\xi(\varphi_k) = q^{k(n-k)/2} \cdot F_k$ だから，求める等式を得る．■

$0 \leq e \in \mathbb{Z}$ に対して $\{g \in M_n(O_F) \mid \mathrm{ord}_F(\det g) = e\}$ の G における特性関数を $\tau_e \in \mathcal{H}_K(G)$ とおく．$m \in \mathbb{Z}^n_{\geq}$ に対して

$$\begin{aligned} \tau_e^\vee(u_m) = \widetilde{\tau}_e(\varpi^m) &= \Delta_B(\varpi^m)^{-1/2} \int_U \tau_e(\varphi^m h) d_U(h) \\ &= \begin{cases} q^{e(n-1)/2} & : m_i \geq 0, m_1 + \cdots + m_n = e, \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

である．

[**証明**] $m_i \geq 0$ かつ $m_1 + \cdots + m_n = e$ のとき

$$\begin{aligned} \int_U \tau_e(\varpi^m h) d_U(h) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\varpi^{-m_i} O_F} dh_{ij} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\varpi^{-m_i}|_F \int_{O_F} dh_{ij} = \prod_{i=1}^{n} q^{(n-i)m_i} = q^{ne} \prod_{i=1}^{n} q^{-m_i} \end{aligned}$$

だから $\Delta_U(\varpi^m) = q^{(n+1)e} \prod_{i=1}^{n} q^{-2im_i}$ より上の通り．■

よって $\tau_e \in \mathcal{H}_K(G)$ は佐武同型により

$$q^{e(n-1)/2} \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1+\cdots+m_n=e}} X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n} \in \mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_\mathbb{T}}$$

に対応する．よって変数 Y の形式的冪級数 $\sum_{e\geq 0} \tau_e \cdot Y^e \in \mathcal{H}_K(G)[[Y]]$ は佐武同型を通して

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - q^{(n-1)/2} X_i \cdot Y\right)^{-1} = \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k q^{k(n-1)/2} F_k \cdot Y\right)^{-1} \in \mathbb{C}[X^\vee(\mathbb{T})]^{W_\mathbb{T}}$$

に対応する．よって(5.9) より

$$\sum_{e\geq 0} \tau_e \cdot Y^e = \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k q^{k(k-1)/2} \varphi_k \cdot Y\right)^{-1}$$

を得る．よって $\tau_0 = 1$ であり，$e > 0$ に対しては

$$\tau_e = \sum_{1\leq k \leq \mathrm{Min}\{n,e\}} (-1)^{k-1} q^{k(k-1)/2} \varphi_k \cdot \tau_k$$

となるから，これを用いて $\tau_e \in \mathcal{H}_K(G)$ を $\mathcal{H}_K(G)$ の生成元 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の多項式として表すことが出来る．又

$$\mathcal{H}_K(G) = \mathbb{C}[\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}, \varphi_n^{\pm 1}]$$

である．

5.6.4 　A を単項イデアル整域として，F を A の分数体とする．有限次元 F- ベクトル空間 V に対して，$L \subset V$ が次の二条件を満たすとき A-格子であるという；

1) L は V の有限生成 A-部分加群,
2) L は V の F 上の基底を含む.

命題 5.6.4.1 A-格子 $L \subset V$ と部分集合 $\{0\} \neq S \subset V$ に対して

$$(L:S) = \{a \in F \mid a \cdot S \subset L\}$$

は A に関する分数イデアルである（即ち $(L:S) = (a) = aA$ なる $a \in F$ が存在する）.

[**証明**] $0 \neq v \in S$ をとると，L の A-基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ と $0 \neq a_1 \in F$ があって，$\{a_1 u_1\}$ が $\langle v \rangle_A = Av$ の A-基底となるようにできる．このとき $v = \varepsilon a_1 u_1$ $(\varepsilon \in A^\times)$ となるから

$$(L:S) \subset (L:v) = \{a \in F \mid a\varepsilon a_1 \in A\} = (a_1^{-1})$$

だから，$a_1 \cdot (L:S) \subset A$ はイデアルとなる．■

A-格子 $L \subset V$ と部分集合 $\{0\} \neq S \subset V$ に対して

$$(aL:bS) = ab^{-1}(L:S) \qquad (a, b \in F^\times)$$

である．又 A-格子 $L, M \subset V$ に対して，L の A-基底 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ と $\{a_1, \cdots, a_n\} \subset F^\times$ であって

1) $(a_1) \subset (a_2) \subset \cdots \subset (a_n)$,
2) $\{a_1 u_1, a_2 u_2, \cdots, a_n u_n\}$ は M の A-基底

となるものがとれる．このとき $(M:L) = (a_1)$ である．

命題 5.6.4.2 A-格子 $L, M \subset V$ に対して $(M:L) = (a)$ とすると，$(M:u) = (a), (L:u) = (1)$ なる $0 \neq u \in V$ に対して，$\{u_1, \cdots, u_n\} \subset L$ と $\{a_2, \cdots, a_n\} \subset F^\times$ を

1) $\{u, u_2, \cdots, u_n\}$ は L の A-基底,
2) $(a) \subset (a_2) \subset \cdots \subset (a_n)$,
3) $\{au, a_2 u_2, \cdots, a_n u_n\}$ は M の A-基底

となるように取れる．

[**証明**] $(L:u)=(1)$ だから u を一員とする L の A-基底が存在する．よって $L/\langle u\rangle_A$ は自由 A-加群である．$(a^{-1}M:u)=(1)$ だから，同様に $a^{-1}M/\langle u\rangle_A$ は自由 A-加群であり，$L/\langle u\rangle_A\subset a^{-1}M/\langle u\rangle_A$ は A-部分加群となる．よって $a^{-1}M/\langle u\rangle_A$ の A-基底 $\{\overline{v}_2,\cdots,\overline{v}_n\}$ $(v_i\in a^{-1}M)$ と $\{b_2,\cdots,b_n\}\subset A$ $(b_i\neq 0)$ で，$(b_2)\subset(b_3)\subset\cdots\subset(b_n)$ かつ $\{b_2\overline{v}_2,\cdots,b_n\overline{v}_n\}$ が $L/\langle u\rangle_A$ の A-基底となるものがとれる．ここで $u_i=b_iv_i\in L$ とおくと，$\{u,u_2,\cdots,u_n\}$ は L の A-基底であり，$\{au,ab_2^{-1}u_2,\cdots,ab_n^{-1}u_n\}$ は M の A-基底となり，更に

$$(a)\subset(ab_2^{-1})\subset(ab_3^{-1})\subset\cdots\subset(ab_n^{-1})$$

となる．■

5.7 supercuspidal 表現の構成 (the case of depth zero)

以下，(ρ,W) を有限群 $GL_n(O_F/\mathfrak{p}^r)$ $(r>0)$ の既約複素表現で supercuspidal（即ち，任意の n の分割 $\beta\neq(n)$ に対して W の $U_\beta(O_F/\mathfrak{p}^r)$-不変ベクトルは 0 に限る）であると仮定する．自然な全射

$$GL_n(O_F)\to GL_n(O_F/\mathfrak{p}^r)$$

により (ρ,W) を $GL_n(O_F)$ の有限次元既約 C^∞-表現と同一視する．χ を $Z(G)=F^\times$ の指標で $\rho(\dot{t})=\chi(t)\cdot\mathbf{1}$ $(\forall t\in F^\times)$ なるものとして，$G=G_n$ の開部分群 $H=F^\times\cdot GL_n(O_F)$ の C^∞-表現 $\sigma=\chi\cdot\rho$ から誘導された G の C^∞-表現 $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ を考える．まず

命題 5.7.1 $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ は G の許容表現である．

[**証明**] $K_m=1_n+M_n(\mathfrak{p}^m)\subset GL_n(O_F)$ $(m>0)$ として，$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\right)^{K_m}$ が有限次元であることを示す．$K_m\backslash G/H$ の代表として

$$\dot{k}\in K_m\backslash GL_n(O_F),\quad a=\begin{bmatrix}\varpi^{m_1}&&\\&\ddots&\\&&\varpi^{m_n}\end{bmatrix}\quad m_1\geq\cdots\geq m_n\geq 0$$

なる $g = k \cdot a$ がとれる．ここで

$$t(a) = \mathrm{Max}\{m_i - m_{i+1} \mid 1 \leq i < n\} = m_i - m_{i+1} \geq m$$

とすると，n の分割 $\beta = (i, n-i)$ に対して

$$U_\beta(O_F) \subset H \cap g^{-1} K_m g = H \cap a^{-1} K_m a$$

となる．よって

$$W^{H \cap g^{-1} K_m g} \subset W^{U_\beta(O_F)} = W^{U_\beta(O_F/\mathfrak{p}^r)} = 0$$

となる．よって

$$\left(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\right)^{K_m} \tilde{\to} \bigoplus_{g \in K_m \backslash G/H : t(a) < m} W^{H \cap g^{-1} K_m g}$$

となり，$t(a) < m$ なる g は有限個だから，$\dim_{\mathbb{C}} \left(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\right)^{K_m} < \infty$ となる．
■

$W^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, \mathbb{C})$ は $(h \cdot \alpha)(w) = \alpha(h^{-1} \cdot w)$ により H-加群となり，コンパクト開部分群 $L \subset H$ に対して複素線形同型

$$(W^*)^L = (W^\vee)^L \ni \alpha \tilde{\mapsto} \alpha|_{W^L} \in \left(W^L\right)^*$$

が成り立つ．

$$C^\infty(G/H, W^*) = \left\{\phi \in C^\infty(G, V^*) \mid \phi(xh) = h^{-1} \cdot \phi(x) \text{ for } \forall h \in H\right\}$$

は $(g \cdot \phi)(x) = \phi(g^{-1}x)$ により G-加群となり，コンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して複素線形同型

$$C^\infty(G/H, W^*)^K \ni \phi \tilde{\mapsto} (\phi(g))_{g \in K \backslash G/H} \in \prod_{g \in K \backslash G/H} (W^*)^{K_g}$$

$(K_g = H \cap g^{-1} K g)$ が成り立つから，複素線形同型

$$C^\infty(G/H, W^*)^K \ni \phi \tilde{\mapsto} (\phi(g)|_{W^{K_g}})_{g \in K \backslash G/H} \in \prod_{g \in K \backslash G/H} \left(W^{K_g}\right)^*$$

が成り立つ．$E = \mathrm{ind}_H^G(\sigma) = \bigcup_{K \subset G:\text{コンパクト開部分群}} E^K$ で，コンパクト開部分群 $K \subset G$ に対して複素線形同型

$$E^K \ni f \tilde{\mapsto} (f(g))_{g \in K\backslash G/H} \in \bigoplus_{g \in K\backslash G/H} W^{K_g}$$

が成り立つから，複素線形同型

$$C^\infty(G/H, W^*)^K \ni \phi \tilde{\mapsto} [f \mapsto \sum_{g \in K\backslash G/H} \langle f(g), \phi(g) \rangle] \in \left(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)^K\right)^*$$

が成り立つ．即ち複素線形同型

$$C^\infty(G/H, W^*) \tilde{\to} \left(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\right)^* \tag{5.10}$$

が成り立つ．これを利用して次を示す；

命題 5.7.2 $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ は G の supercuspidal 表現である．

[**証明**] $E = \mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ とおく．n の分割 $\beta \neq (n)$ をとり

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_{U_\beta,\mathbf{1}}, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{U_\beta}(E, \mathbf{1}_{U_\beta}) = (E^*)^{U_\beta} = 0$$

を示す．(5.10) より $C^\infty(G/H, W^*)^{U_\beta} = 0$ を示せばよい．$\phi \in C^\infty(G/H, W^*)^{U_\beta}$ とする．岩澤分解 $G = P_\beta \cdot GL_n(O_F)$ より $U_\beta\backslash G/H$ の代表を G_β からとれる．任意の $g \in G_\beta$ に対して

$$U_\beta(O_F) = U_\beta \cap H = g^{-1}U_\beta g \cap H$$

だから，任意の $h \in U_\beta(O_F)$ に対して

$$h^{-1} \cdot \phi(g) = \phi(gh) = \phi(ghg^{-1}g) = \phi(g)$$

となり，$\phi(g) \in W^{U_\beta(O_F)} = W^{U_\beta(O_F/\mathfrak{p}^r)} = 0$ となる．よって $\phi = 0$ である．
■

$g \in G$ に対して

$$V_g = \left\{f : HgH \to W : C^\infty\text{-関数} \mid f(xh) = h^{-1} \cdot f(x) \text{ for } \forall h \in H\right\}$$

は $(h \cdot f)(x) = f(h^{-1}x)$ により H-加群となり，H-加群の同型

$$\mathrm{ind}_H^G(\sigma) \ni f \mapsto \tilde{\ } (f|_{HgH})_{g \in H\backslash G/H} \in \bigoplus_{g \in H\backslash G/H} V_g$$

が成り立つ．一方，$\sigma^g(h) = \sigma(g^{-1}hg)$ $(h \in H \cap gHg^{-1})$ とおくと，全単射

$$H/H \cap gHg^{-1} \ni \dot{h} \tilde{\mapsto} hgH \in HgH/H$$

に注意すると，H-加群の同型

$$V_g \ni f \tilde{\mapsto} f^g = [h \mapsto f(hg)] \in \mathrm{ind}_{H \cap gHg^{-1}}^H(\sigma^g)$$

が成り立つ ($f^g(h \cdot gh'g^{-1}) = f(hgh') = h'^{-1} \cdot f(hg)$)．よって H-加群の同型

$$\big(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\big)|_H \tilde{\to} \bigoplus_{g \in H\backslash G/H} \mathrm{ind}_{H \cap gHg^{-1}}^H(\sigma^g) \tag{5.11}$$

が成り立つ．これを用いて次の定理を得る；

定理 5.7.3 (ρ, W) が $GL_n(O_F/\mathfrak{p})$ の既約 supercuspidal 表現ならば

1) $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ は G の既約 supercuspidal 表現である，
2) $\big(\mathrm{ind}_H^G(\sigma)\big)|_H$ は σ を重複度 1 で含む．

[**証明**] 2) (5.11) と Frobenius 相互律より

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_H(\sigma, \mathrm{ind}_H^G(\sigma)) &\tilde{\to} \bigoplus_{g \in H\backslash G/H} \mathrm{Hom}_H(\sigma, \mathrm{ind}_{H \cap gHg^{-1}}^H(\sigma^g)) \\ &\tilde{\to} \bigoplus_{g \in H\backslash G/H} \mathrm{Hom}_{H \cap gHg^{-1}}(\sigma, \sigma^g)\end{aligned}$$

だから

$$g \notin H \;\Rightarrow\; \mathrm{Hom}_{H \cap g^{-1}Hg}(\sigma, \sigma^{g^{-1}}) = 0$$

を示せば，$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_H(\sigma, \mathrm{ind}_H^G(\sigma)) = 1$ を得る．$g \notin H$ とすると，Cartan 分解より

$$g = \begin{bmatrix} \varpi^{m_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \varpi^{m_i} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad m_1 \geq \cdots \geq m_i > 0 \quad (1 \leq i < n)$$

と取れる．ここで $\mathrm{Hom}_{H \cap g^{-1}Hg}(\sigma, \sigma^{g^{-1}}) \neq 0$ とすると，n の分割 $\beta = (i, n-i)$ に対して

$$U_\beta(O_F) = U_\beta(O_F) \cap g^{-1}U_\beta(O_F)g \subset H \cap g^{-1}Hg$$

だから $\mathrm{Hom}_{U_\beta(O_F)}(\sigma, \sigma^{g^{-1}}) \neq 0$ となるが，$gU_\beta(O_F)g^{-1} \subset 1_n + M_n(\mathfrak{p})$ で，$\sigma = \chi \cdot \rho$ で ρ は $GL_n(O_F/\mathfrak{p})$ から来ているから，$U_\beta(O_F)$ 上では $\sigma^{g^{-1}} = \mathbf{1}$ となる．よって

$$\mathrm{Hom}_{U_\beta(O_F)}(\sigma, \mathbf{1}) \neq 0$$

となって，(ρ, W) が $GL_n(O_F/\mathfrak{p})$ の supercuspidal 表現であることに反する．

1) $E = \mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ は G の許容表現で，$GL_n(O_F)$ は G のコンパクト開部分群だから，E は H-加群として半単純である．さて E が既約でないとして，G-部分加群 $0 \subsetneqq V \subsetneqq E$ をとると，Frobenius 相互律から

$$0 \neq \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{ind}_H^G(\sigma)) \subset \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_H(V, \sigma)$$

となり，V は H-加群として σ を含む．一方，G-加群 $V' = E/V$ に対して

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G(\sigma), V') &\tilde{\to} \mathrm{Hom}_G(V'^\vee, \mathrm{Ind}_H^G(\sigma^\vee)) \\ &\tilde{\to} \mathrm{Hom}_H(V'^\vee|_H, \sigma^\vee) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_H(\sigma^{\vee\vee}, (V'^\vee|_H)^\vee) \end{aligned}$$

となるが，$\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ であり，H は G の開部分群で V' は G の許容表現だから $(V'^\vee|_H)^\vee = V'^{\vee\vee} = V'$ となるから，$\mathrm{Hom}_H(\sigma, V') \neq 0$ となって V' も σ を含む．よって $E = \mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ は σ を少なくとも 2 重に含むが，これは 2) に反する．■

5.8 GL_n 上のゼータ積分

5.8.1 $G = G_n = GL_n(F)$ の許容表現 (π, E) に対して

$$\mathcal{C}(\pi) = \langle \varphi_{u,\alpha} \mid u \in E, \alpha \in E^\vee \rangle_{\mathbb{C}} \subset C^\infty(G)$$

$(\varphi_{u,\alpha}(x) = \langle \pi(x)u, \alpha \rangle)$ とおき

$$G(m) = \{g \in G \mid \mathrm{ord}_F(\det g) = m\} = \bigsqcup_{\substack{e_1 \leq \cdots \leq e_n \\ e_1 + \cdots + e_n = m}} K \begin{bmatrix} \varpi^{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varpi^{e_n} \end{bmatrix} K$$

$(K = GL_n(O_F))$ とおくと，$\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して

1) $Z_m(\Phi, \varphi) = \displaystyle\int_{G(m)} \Phi(x)\varphi(x) d_G(x)$ は任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して絶対収束する，
2) 十分小さい $m \in \mathbb{Z}$ に対して $Z_m(\Phi, \varphi) = 0$

となるから

$$Z(\Phi, \varphi, T) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Z_m(\Phi, \varphi) T^m \in \mathbb{C}((T))$$

とおく．ここで $\mathbb{C}((T))$ は変数 T の形式的 Laurent 級数の体である（160 頁参照）．$g \in G$ に対して $(g \cdot \Phi)(x) = \Phi(g^{-1}x)$ とおくと

$$\begin{aligned} Z_m(g \cdot \Phi, \varphi) &= \int_{G(m - \mathrm{ord}_F(\det g))} \Phi(x), \varphi(gx) d_G(x) \\ &= Z_{m - \mathrm{ord}_F(\det g)}(\Phi, g^{-1} \cdot \varphi) \end{aligned}$$

となるから

$$Z(g \cdot \Phi, \varphi, T) = T^{\mathrm{ord}_F(\det g)} Z(\Phi, g^{-1} \cdot \varphi, T)$$

となる．よって

$$\mathcal{Z}(\pi) = \langle Z(\Phi, \varphi, T) \mid \Phi \in \mathcal{S}(M_n(F)), \varphi \in \mathcal{C}(\pi) \rangle_{\mathbb{C}}$$

は $\mathbb{C}((T))$ の $\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$-部分加群となる．

$\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ に対して

$$\Phi^{\vee}(y) = \int_{M_n(F)} \Phi(x)\tau(\mathrm{tr}(xy)dx \qquad (y \in M_n(F))$$

とおく．ここで dx は $M_n(F)$ 上の Haar 測度で，$\Phi^{\vee\vee}(x) = \Phi(-x)$ となるように正規化しておく．又 $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して $\varphi^{\vee}(x) = \varphi(x^{-1})$ $(x \in G)$ とおくと

$$\begin{aligned}\varphi^{\vee}_{u,\alpha}(x) &= \langle \pi(x^{-1})u, \alpha\rangle \\ &= \langle u, \pi^{vee}(x)\alpha\rangle = \varphi_{\alpha,u}(x) \qquad (u \in E, \alpha \in E^{\vee})\end{aligned}$$

だから $\varphi^{\vee} \in \mathcal{C}(\pi^{\vee})$ となる．ここで次の二つの主張を考える；

定理 A　1) $\mathcal{Z}(\pi) \subset P(T)^{-1}\mathbb{C}[T^{\pm1}]$, $\mathcal{Z}(\pi^{\vee}) \subset Q(T)^{-1}\mathbb{C}[T^{\pm1}]$ かつ $P(0) \neq 0$, $Q(0) \neq 0$ なる多項式 $P(T), Q(T) \in \mathbb{C}[T]$ が存在する．

2) 任意の $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して

$$Z(\Phi^{\vee}, \varphi^{\vee}, (q^n T)^{-1}) = \gamma(T) \cdot Z(\Phi, \varphi, T)$$

となる $\gamma(T) \in \mathbb{C}((T))$ が存在する．

定理 B 定数 $R \in \mathbb{R}$ があって，$\mathrm{Re}(s) \geq R$ ならば任意の $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して

$$\begin{aligned}Z(\Phi, \varphi, s) &= \int_G \Phi(x)\varphi(x)|\det x|_F^s d_G(x), \\ Z(\Phi^{\vee}, \varphi^{\vee}, s) &= \int_G \Phi^{\vee}(g)\varphi^{\vee}(g)|\det g|_F^s d_G(g)\end{aligned}$$

は絶対収束する．

注意 5.8.1.1 自明な延長を考えることにより

$$\mathcal{S}(G) = \{\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F)) \mid \mathrm{supp}(\Phi) \subset G\}$$

と同一視すると，任意の $\Phi \in \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して

$$Z(\Phi, \varphi, s) = \int_G \Phi(x)\varphi(x)|\det x|_F^s d_G(x)$$

は任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して絶対収束する．このとき

$$Z(\Phi, \varphi, q^{-s}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Z_m(\Phi, \varphi) q^{-ms}$$

は有限和で $Z(\Phi, \varphi, s) = Z(\Phi, \varphi, q^{-s})$ $(s \in \mathbb{C})$ となる．特に任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して，$Z(\Phi, \varphi, s) \neq 0$ なる $\Phi \in \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ が存在する．即ち $Z(\Phi, \varphi, T) \neq 0$ なる $\Phi \in \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ が存在する．

注意 5.8.1.2 $\lambda \in \mathbb{C}$ をとって $\pi^\lambda(g) = |\det g|_F^\lambda \cdot \pi(g)$ とおくと，$u \in E, \alpha \in E^\vee$ に対して

$$\varphi_{u,\alpha}^\lambda(g) = \langle \pi^\lambda(g) u, \alpha \rangle = |\det g|_F^\lambda \varphi_{u,\alpha}(g) \qquad (g \in G)$$

だから，$\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して $\varphi^\lambda(g) = |\det g|_F^\lambda \varphi(g)$ とおくと，$\varphi \mapsto \varphi^\lambda$ は複素線形同型 $\mathcal{C}(\pi) \tilde{\to} \mathcal{C}(\pi^\lambda)$ を与える．更に $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ に対して

$$Z_m(\Phi, \varphi^\lambda) = \int_{\mathrm{ord}_F(\det g)=m} \Phi(g) |\det g|_F^\lambda \varphi(g) d_G(g) = q^{-m\lambda} Z_m(\Phi, \varphi)$$

だから

$$Z(\Phi, \varphi^\lambda, T) = Z(\Phi, \varphi, q^{-\lambda} T)$$

となる．又

$$\left(\varphi^\lambda\right)^\vee(g) = \varphi^\lambda(g^{-1}) = \left(\varphi^\vee\right)^{-\lambda}(g)$$

だから，定理 A の 2) に関して

$$\begin{aligned}
&Z(\Phi^\vee, \left(\varphi^\lambda\right)^\vee, (q^n T)^{-1}) = Z(\Phi^\vee, \left(\varphi^\vee\right)^{-\lambda}, (q^n T)^{-1}) \\
=&Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee, q^\lambda (q^n T)^{-1}) = Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee, (q^n \cdot q^{-\lambda} T)^{-1}) \\
=&\gamma(q^{-\lambda} T) Z(\Phi, \varphi, q^{-\lambda} T) = \gamma(q^{-\lambda} T) Z(\Phi, \varphi^\lambda, T)
\end{aligned}$$

となるから，$\gamma_{\pi^\lambda}(T) = \gamma_\pi(q^{-\lambda} T)$ となる．

定理 A と定理 B が成り立つと仮定すると，次の二つの定理が示される．まず

定理 5.8.1.3 $\mathcal{Z}(\pi) = P(\pi,T)^{-1}\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ かつ $P(\pi,0)=1$ なる多項式 $P(\pi,T)\in\mathbb{C}[T]$ が存在する．よって $L(\pi,T)=P(\pi,q^{-(n-1)/2}T)^{-1}$ とおくと

$$\Xi(\Phi,\varphi,T) = \frac{Z(\Phi,\varphi,q^{-(n-1)/2}T)}{L(\pi,T)} \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}] \qquad (\Phi\in\mathcal{S}(M_n(F)),\varphi\in\mathcal{C}(\pi))$$

かつ $\displaystyle\sum_i \Xi(\Phi_i,\varphi_i,T)=1$ なる $\Phi_i\in\mathcal{S}(M_n(F)),\varphi_i\in\mathcal{C}(\pi)$ がとれる．

[**証明**] 定理 A の 1) より $\mathcal{Z}(\pi)\subset\mathbb{C}(T)$ は $\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ に関して分数イデアルで $\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ は単項イデアル整域だから

$$\mathcal{Z}(\pi) = \frac{R(T)}{P(T)}\cdot\mathbb{C}[T^{\pm 1}] \qquad (P(T),R(T)\in\mathbb{C}[T])$$

とできて，更に $\mathrm{GCD}\{P(T),R(T)\}=1$ かつ $P(0)=R(0)=1$ としてよい．$\deg R(T)>0$ とすると $R(q^{-s})=0$ なる $s\in\mathbb{C}$ がとれる．このとき $P(q^{-s})\neq 0$ で，任意の $\Phi\in\mathcal{S}(G)\subset\mathcal{S}(M_n(F))$（注意 5.8.1.1 参照）と $\varphi\in\mathcal{C}(\pi)$ に対して

$$Z(\Phi,\varphi,s) = Z(\Phi,\varphi,q^{-s}) = 0$$

となり矛盾する．■

次に

定理 5.8.1.4 $\pi(-1)=\lambda\mathbf{1}_E$ $(\lambda=\pm 1)$ ならば

1) $\varepsilon(\pi,\tau,T)=c{\cdot}T^d\in\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ が定まって，任意の $\Phi\in\mathcal{S}(M_n(F)),\varphi\in\mathcal{C}(\pi)$ に対して
$$\Xi(\Phi^\vee,\varphi^\vee,(qT)^{-1}) = \varepsilon(\pi,\tau,T)\cdot\Xi(\Phi,\varphi,T)$$
が成り立つ．
2) $\varepsilon(\pi,\tau,T)\cdot\varepsilon(\pi^\vee,\tau,(qT)^{-1})=\lambda$.

[**証明**] 任意の $\Phi\in\mathcal{S}(M_n(F)),\varphi\in\mathcal{C}(\pi)$ に対して

$$\Xi(\Phi,\varphi,T) = \frac{Z(\Phi,\varphi,q^{-(n-1)/2}T)}{L(\pi,T)},$$
$$\Xi(\Phi^\vee,\varphi^\vee,(qT)^{-1}) = \frac{Z(\Phi^\vee,\varphi^\vee,(q^n\cdot q^{-(n-1)/2}T)^{-1})}{L(\pi^\vee,(qT)^{-1})}$$

だから，定理 A の 2) より

$$\begin{aligned}\varepsilon(T) &= \frac{\Xi(\Phi^\vee, \varphi^\vee, (qT)^{-1})}{\Xi(\Phi, \varphi, T)} \\ &= \frac{Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee, (q^n \cdot q^{-(n-1)/2}T)^{-1})}{Z(\Phi, \varphi, q^{-(n-1)/2}T)} \cdot \frac{L(\pi, T)}{L(\pi^\vee, (qT)^{-1})} \\ &= \gamma(q^{-(n-1)/2}T) \cdot \frac{L(\pi, T)}{L(\pi^\vee, (qT)^{-1})} \in \mathbb{C}(T)\end{aligned}$$

は Φ, φ に依らない．

$$\Xi(\Phi^\vee, \varphi^\vee, (qT)^{-1}) = \varepsilon(T) \cdot \Xi(\Phi, \varphi, T)$$

で，定理 5.8.1.3 より $\sum_i \Xi(\Phi_i, \varphi_i, T) = 1$ なる $\Phi_i \in \mathcal{S}(M_n(F)), \varphi_i \in \mathcal{C}(\pi)$ がとれるから $\varepsilon(T) \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ である．定理 A の 2) で T に $(q^n T)^{-1}$ を代入して

$$Z(\Phi, \varphi, (q^n T)^{-1}) = \gamma(q^{-n}T^{-1})^{-1} Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee, T),$$

従って $\Phi'(x) = \Phi(-x)$ とおけば $\Phi^{\vee\vee} = \Phi'$ だから，任意の $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\psi \in \mathcal{C}(\pi^\vee)$ に対して

$$\begin{aligned}Z(\Phi^\vee, \psi^\vee, (q^n T)^{-1}) &= \gamma(q^{-n}T^{-1})^{-1} Z(\Phi', \varphi, T) \\ &= \lambda \cdot \gamma(q^{-n}T^{-1})^{-1} Z(\Phi, \psi, T)\end{aligned}$$

となる．そこで $\gamma^\vee(T) = \lambda \cdot \gamma(q^{-n}T^{-1})^{-1}$ とおいて

$$\begin{aligned}\varepsilon^\vee(T) &= \gamma^\vee(q^{-(n-1)/2}T) \cdot \frac{L(\pi^\vee, T)}{L(\pi, (qT)^{-1})} \\ &= \lambda \cdot \gamma(q^{-(n+1)/2}T^{-1})^{-1} \frac{L(\pi^\vee, T)}{L(\pi, (qT)^{-1})} \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]\end{aligned}$$

とおくと，$\varepsilon(T) \cdot \varepsilon^\vee((qT)^{-1}) = \lambda$ となり，$\varepsilon(T) = c \cdot T^d$ となる．■

5.8.2 n の分割 $\beta = (l, m)$ $(l + m = n, l > 0, m > 0)$ をとり，G_l, G_m の許容表現 $(\sigma, V), (\pi, W)$ に対して定理 A と定理 B が成り立つと仮定する．

$$P_\beta = G_\beta \ltimes U_\beta = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in G_l, d \in G_m, b \in M_{l,m}(F) \right\}$$

で，G_l, G_m 上の Haar 測度 $d_{G_l}(a), d_{G_m}(d)$ をとって G_β 上の Haar 測度を

$$d_{G_\beta}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = d_{G_l}(a) d_{G_m}(d)$$

により定める．$M_{l,m}(F), M_{m,l}(F)$ 上の Haar 測度 $d_{M_{l,m}(F)}(x), d_{M_{m,l}(F)}(y)$ を

$$\varphi^\vee(y) = \int_{M_{l,m}(F)} \varphi(x)\tau(\mathrm{tr}(xy)) d_{M_{l,m}(F)}(x)$$

$(\varphi \in \mathcal{S}(M_{l,m}(F), y \in M_{m,l}(F))$ に対して

$$\int_{M_{m,l}(F)} \varphi^\vee(y)\tau\left(\mathrm{tr}(xy)\right) d_{M_{m,l}(F)}(y) = \varphi(-x)$$

となるように正規化しておいて，U_β 上の Haar 測度を

$$d_{U_\beta}\begin{pmatrix} 1_l & b \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} = d_{M_{l,m}(F)}(b)$$

により定める．このとき $P_\beta = G_\beta \ltimes U_\beta$ 上の左 Haar 測度が

$$\begin{aligned} d_{P_\beta}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} &= d_{P_\beta}(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \\ &= |\det a|_F^{-m} d_{G_l}(a) d_{G_m}(d) d_{M_{l,m}(F)}(b) \end{aligned}$$

により定まる．

$$\begin{aligned} d_{U_\beta}(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}) &= d_{U_\beta}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}bd \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= |\det a|_F^{-m} |\det d|_F^l d_{U_\beta}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $\Delta_{P_\beta}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = |\det a|_F^{-m} |\det d|_F^l$ だから，$G = KP_\beta$ $(K = GL_n(O_F))$ より，P_β に関する ρ-関数 $\rho : G \to \mathbb{R}_{>0}$ が $\rho(kp) = \Delta_{P_\beta}(p)$ $(k \in K, p \in P_\beta)$ により定まる．

補題 5.8.2.1 $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ に対して

$$\Psi_\Phi(x,y) = \int_{M_{l,m}(F)} \Phi\begin{pmatrix} x & u \\ 0 & y \end{pmatrix} d_{M_{l,m}(F)}(u) \qquad (x \in M_l(F), y \in M_m(F))$$

とおくと $\Psi_\Phi \in \mathcal{S}(M_l(F) \times M_m(F)) = \mathcal{S}(M_l(F)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(M_m(F))$ で

$$\Psi_{\Phi^\vee} = (\Psi_\Phi)^\vee.$$

[**証明**] $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{21} & X_2 \end{bmatrix} \in M_n(F)$ $(X_{12} \in M_{l,m}(F), X_{21} \in M_{m,l}(F))$ とおいて

$$\begin{aligned}
&\Psi_{\Phi^\vee}(x,y) \\
=&\int_{M_{l,m}(F)} d_{M_{l,m}(F)}(u) \int_{M_n(F)} d_{M_n(F)}(X)\Phi(X)\tau(\mathrm{tr}\begin{bmatrix} x & u \\ 0 & y \end{bmatrix} X) \\
=&\int_{M_{l,m}(F)} d_{M_{l,m}(F)}(u) \int_{M_l(F)} d_{M_l(F)}(X_1) \int_{M_{l,m}(F)} d_{M_{l,m}(F)}(X_{12}) \\
&\qquad \int_{M_m(F)} d_{M_m(F)}(X_2) \int_{M_{m,l}(F)} d_{M_{m,l}(F)}(X_{21}) \\
&\qquad\qquad \Phi\begin{pmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{21} & X_2 \end{pmatrix} \tau\left(\mathrm{tr}(xX_1) + \mathrm{tr}(uX_{21}) + \mathrm{tr}(yX_2)\right) \\
=&\int_{M_l(F)} d_{M_l(F)}(X_1) \int_{M_{l,m}(F)} d_{M_{l,m}(F)}(X_{12}) \int_{M_m(F)} d_{M_m(F)}(X_2) \\
&\qquad \Phi\begin{pmatrix} X_1 & X_{12} \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \tau\left(\mathrm{tr}(xX_1) + \mathrm{tr}(yX_2)\right) \\
=&(\Psi_\Phi)^\vee(x,y)
\end{aligned}$$

となる．■

系 3.6.3 より誘導表現 $\Pi = \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\sigma \otimes \pi \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$ は G の許容表現となり，その反傾表現は $\mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\Delta_{P_\beta}^{-1} \cdot (\sigma^\vee \otimes \pi^\vee \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$ と同型である（定理 3.7.2）．即ち，$\phi \in \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\sigma \otimes \pi \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$ と $\phi^\vee \in \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\Delta_{P_\beta}^{-1} \cdot (\sigma^\vee \otimes \pi^\vee \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$ に対して

$$\langle \phi, \phi^\vee \rangle = \int_{G/P_\beta} \langle \phi(x), \phi^\vee(x) \rangle \rho(x)^{-1} d\mu_\rho(\dot{x})$$

とおくと，$\phi^\vee \mapsto \langle *, \phi^\vee \rangle$ により G-加群の同型

$$\mathrm{Ind}_{P_\beta}^G((\Delta_{P_\beta}^{-1} \cdot (\sigma^\vee \otimes \pi^\vee \otimes \mathbf{1}_{U_\beta}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\sigma \otimes \pi \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})^\vee$$

が与えられる．ここで

$$\begin{aligned}
&\int_G \varphi(x)\rho(x) d_G(x) = \int_{G/P_\beta} \left(\int_{P_\beta} \varphi(xp) d_{P_\beta}(p) \right) d\mu_\rho(\dot{x}) \\
&= \int_K \int_{P_\beta} \varphi(kp)\rho(kp)\Delta_{P_\beta}(p)^{-1} d_{P_\beta}(p) d_K(k) \\
&= \int_K \left(\int_{P_\beta} \varphi(kp) d_{P_\beta}(p) \right) d_K(k)
\end{aligned}$$

だから

$$\langle \phi, \phi^\vee \rangle = \int_K \langle \phi(k), \phi^\vee(k) \rangle d_K(k)$$

である．

定理 5.8.2.2 $\Pi = \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\sigma \otimes \pi \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$ に対して定理 A と定理 B が成り立つ．

[**証明**] $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ をとり

$$\phi \in \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\sigma \otimes \pi \otimes \mathbf{1}_{U_\beta}), \qquad \phi^\vee \in \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\Delta_{P_\beta}^{-1} \cdot (\sigma^\vee \otimes \pi^\vee \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$$

をとって

$$\varphi_{\phi,\phi^\vee}(g) = \langle \phi, \Pi(g^{-1})\phi^\vee \rangle = \int_K \langle \phi(k), \phi^\vee(gk) \rangle d_K(k) \qquad (g \in G)$$

だから，まず形式的な積分の計算で

$$Z(\Phi,\varphi_{\phi,\phi^\vee},s)=\int_G \Phi(g)\varphi_{\phi,\phi^\vee}(g)|\det g|_F^s d_G(g)$$

$$=\int_G d_G(g)\int_K d_K(k)\Phi(g)\langle\phi(g),\phi^\vee(gk)\rangle|\det g|_F^s$$

$$=\int_G d_G(g)\int_K d_K(k)\Phi(gk^{-1})\langle\phi(k),\phi^\vee(g)\rangle|\det g|_F^s$$

$$=\int_K d_K(k')\int_{P_\beta} d_{P_\beta}(p)\int_K d_K(k)\Delta_{P_\beta}(p)^{-1}\Phi(k'pk^{-1})\langle\phi(k),\phi^\vee(k'p)\rangle|\det p|_F^s$$

$$=\int_K d_K(k')\int_{P_\beta} d_{P_\beta}(p)\int_K d_K(k)$$
$$\Phi(k'pk^{-1})\langle\phi(k),(\sigma^\vee\otimes\pi^\vee\otimes\mathbf{1}_{U_\beta})(p)^{-1}\phi^\vee(k')\rangle|\det p|_F^s$$

$$=\int_K d_K(k')\int_{G_l} d_{G_l}(a)\int_{G_m} d_{G_m}(d)\int_{M_{l,m}(F)} d_{M_{l,m}(F)}(b)\int_K d_K(k)$$
$$|\det a|_F^{-m}\Phi\left(k'\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}k^{-1}\right)\langle(\sigma(a)\otimes\pi(d))\phi(k),\phi^\vee(k')\rangle|\det a|_F^s|\det d|_F^s$$

となる．ここで

$$\langle(\sigma(a)\otimes\pi(d))\phi(k),\phi^\vee(k')\rangle=\sum_i\lambda_i(k,k')\varphi_i(a)\varphi_i'(d)$$

$(\varphi_i\in\mathcal{C}(\sigma),\varphi_i'\in\mathcal{C}(\pi))$ とおける．又

$$\int_{M_{l,m}(F)}\Phi\left(k'\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}k^{-1}\right)d_{M_{l,m}(F)}(b)=\sum_j\mu_J(k',k)\Phi_j(a)\Phi_j'(d)$$

$(\Phi_j\in\mathcal{S}(M_l(F)),\Phi_j'\in\mathcal{S}(M_m(F)))$ とおけるから

$$Z(\Phi,\varphi_{\phi,\phi^\vee},s)$$
$$=\sum_i\sum_j\int_K d_K(k')\int_{G_l} d_{G_l}(a)\int_{G_m} d_{G_m}(d)\int_K d_K(k)$$
$$\lambda_i(k,k')\mu_j(k',k)\Phi_j(a)\Phi_j'(d)\varphi_i(a)\varphi_i'(d)|\det a|_F^{s-m}|\det d|_F^s$$
$$=\sum_{i,j}c_{ij}Z(\Phi_j,\varphi_i,s-m)\cdot Z(\Phi_j',\varphi_i',s)$$

$$c_{ij}=\int_{K\times K}\lambda_i(k,k')\mu_j(k',k)d_{K\times K}(k,k')$$

となって，定理 A の 1) と定理 B が成り立つことが判る．特に

$$Z(\Phi,\varphi_{\phi,\phi^\vee},T)=\sum_{i,j}c_{ij}Z(\Phi_j,\varphi_i,q^mT)\cdot Z(\Phi'_j,\varphi'_i,T)$$

である．同様に

$$\varphi^\vee_{\phi,\phi^\vee}(g)=\varphi_{\phi,\phi^\vee}(g^{-1})=\langle\Pi(g^{-1})\phi,\phi^\vee\rangle=\int_K\langle\phi(gk'),\phi^\vee(k')\rangle d_K(k')$$

だから

$$\begin{aligned}Z(\Phi^\vee,\varphi^\vee_{\phi,\phi^\vee},s)&=\int_G d_G(g)\int_K d_K(k')\Phi^\vee(g)\langle\phi(gk',\phi^\vee(k')\rangle|\det g|_F^s\\&=\int_G d_G(g)\int_K d_K(k')\Phi^\vee(gk'^{-1})\langle\phi(g),\phi^\vee(k')\rangle|\det g|_F^s\\&=\int_K d_K(k)\int_{P_\beta}d_{P_\beta}(p)\int_K d_K(k')\\&\qquad\Delta_{P_\beta}(p)^{-1}\Phi^\vee(kpk'^{-1})\langle\phi(kp),\phi^\vee(k')\rangle|\det p|_F^s\end{aligned}$$

である．ここで $p=\begin{bmatrix}a&b\\0&d\end{bmatrix}\in P_\beta$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\phi(kp),\phi^\vee(k')\rangle&=\langle(\sigma(a^{-1})\otimes\pi(d^{-1}))\phi(k),\phi^\vee(k')\rangle\\&=\sum_i\lambda_i(k,k')\varphi_i(a^{-1})\varphi'_i(d^{-1})=\sum_i\lambda_i(k,k')\varphi_i^\vee(a)\varphi_i'^\vee(d).\end{aligned}$$

又 $Y\in M_n(F)$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi^\vee(kYk'^{-1})&=\int_{M_n(F)}\Phi(X)\tau(\mathrm{tr}(kYk'^{-1}X))d_{M_n(F)}(X)\\&=\int_{M_n(F)}\Phi(k'Xk^{-1})\tau(\mathrm{tr}(YX))d_{M_n(F)}(X)=(k'\cdot\Phi\cdot k)^\vee(Y)\end{aligned}$$

$(k' \cdot \Phi \cdot k(X) = \Phi(k' X k^{-1}))$ だから

$$\begin{aligned}
&\int_{M_{l,m}(F)} \Phi^\vee(k \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} k'^{-1}) d_{M_{l,m}(F)}(b) \\
=&\int_{M_{l,m}(F)} (k' \cdot \Phi \cdot k)^\vee \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} d_{M_{l,m}(F)}(b) = \Psi_{(k' \cdot \Phi \cdot k)^\vee}(a, b) \\
=&\left(\Psi_{k' \cdot \Phi \cdot k}\right)^\vee (a, b)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
\Psi_{k' \cdot \Phi \cdot k}(x, y) &= \int_{M_{l,m}(F)} \Phi(k' \begin{bmatrix} x & u \\ 0 & y \end{bmatrix} k^{-1}) d_{M_{l,m}(F)}(u) \\
&= \sum_j \mu_j(k', k) \Phi_j(x) \Phi'_j(y)
\end{aligned}$$

より

$$\int_{M_{l,m}(F)} \Phi^\vee(k \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} k'^{-1}) d_{M_{l,m}(F)}(b) = \sum_j \mu_j(k', k) \Phi_j^\vee(a) \Phi_j'^\vee(b)$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
&Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee_{\phi,\phi^\vee}, s) \\
=&\int_K d_K(k) \int_{G_l} d_{G_l}(a) \int_{G_m} d_{G_m}(d) \int_{M_{l,m}(F)} d_{M_{l,m}(F)}(b) \int_K d_K(k') \\
&\quad |\det a|_F^{-m} \left(|\det a|_F^{-m} |\det d|_F^{l}\right)^{-1} \Phi^\vee(k \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} k'^{-1}) \\
&\quad \times \langle \phi(k \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}), \phi^\vee(k') \rangle |\det a|_F^s |\det d|_F^s \\
=&\sum_{i,j} \int_K d_K(k) \int_H d_K(k') \int_{G_l} d_{G_l}(a) \int_{G_m} d_{G_m}(d) \\
&\quad \lambda_i(k, k') \mu_j(k', k) \Phi_j^\vee(a) \Phi_j'^\vee(d) \varphi_i^\vee(a) \varphi_i'^\vee(d) |\det a|_F^s |\det d|_F^{s-l} \\
=&\sum_{i,j} c_{ij} Z(\Phi_j^\vee, \varphi_i^\vee, s) Z(\Phi_j'^\vee, \varphi_i'^\vee, s-l)
\end{aligned}$$

となるから

$$Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee_{\phi,\phi^\vee}, T) = \sum_{i,j} c_{ij} Z(\Phi^\vee_j, \varphi^\vee_i, T) Z(\Phi'^\vee_j, \varphi'^\vee_i, q^l T)$$

となる．よって

$$\begin{aligned} &Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee_{\phi,\phi^\vee}, (q^n T)^{-1}) \\ =&\sum_{i,j} c_{ij} Z(\Phi^\vee_j, \varphi^\vee_i, (q^l q^m T)^{-1}) Z(\Phi'^\vee_j, \varphi'^\vee_i, (q^m T)^{-1}) \\ =&\sum_{i,j} c_{ij} \gamma_\sigma(q^m T) Z(\Phi_j, \varphi_i, q^m T) \gamma_\pi(T) Z(\Phi'_j, \varphi'_i, T) \\ =&\gamma_\sigma(q^m T)\gamma_\pi(T) Z(\Phi, \varphi_{\phi,\phi^\vee}, T) \end{aligned}$$

となって，定理 A の 2) が成り立つことが判る．■

更に精密な結果を得るために，次の命題を示す；

命題 5.8.2.3 $\Pi = \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\sigma \otimes \pi \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$ として，任意の

$$\Phi' \in \mathcal{S}(M_l(F)), \quad \Phi'' \in \mathcal{S}(M_m(F)), \quad \varphi' \in \mathcal{C}(\sigma), \quad \varphi'' \in \mathcal{C}(\pi)$$

に対して

$$Z(\Phi, \varphi, T) = Z(\Phi', \varphi', q^m T) \cdot Z(\Phi'', \varphi'', T)$$

となる $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\Pi)$ がとれる．

[証明] $\varphi' = \varphi_{v,\alpha}$ $(v \in V, \alpha \in V^\vee)$, $\varphi'' = \varphi_{w,\beta}$ $(w \in W, \beta \in W^\vee)$ としてよい．$0 < e \in \mathbb{Z}$ を十分大きくとって

$$\sigma(k)v = v, \quad \sigma^\vee(k)\alpha = \alpha \quad \text{for } \forall k \in 1_l = M_l(\mathfrak{p}^e),$$

$$\pi(k)w = w, \quad \pi^\vee(k)\beta = \beta \quad \text{for } \forall k \in 1_m + M_m(\mathfrak{p}^e)$$

とする．更に

$$\Phi'(x + M_l(\mathfrak{p}^e) = \Phi'(x), \qquad \Phi''(y + M_m(\mathfrak{p}^e)) = \Phi''(y)$$

としてよい．$K = GL_n(O_F)$ の開部分群 $N = 1_n + M_n(\mathfrak{p}^e)$ に対して

$$\phi(g) = \begin{cases} (\sigma(a) \otimes \pi(d))^{-1}(v \otimes w) & \text{if } g = k \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in NP_\beta, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\phi^\vee(g) = \begin{cases} \Delta_{P_\beta}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot (\sigma^\vee(a) \otimes \pi^\vee(d))^{-1}(\alpha \otimes \beta) & \text{if } g = k \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in NP_\beta, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと

$$\phi \in \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\sigma \otimes \pi \otimes \mathbf{1}_{U_\beta}), \qquad \phi^\vee \in \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\Delta_{P_\beta}^{-1} \cdot (\sigma^\vee \otimes \pi^\vee \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})$$

で

$$\begin{aligned} \varphi_{\phi,\phi^\vee}(g) &= \langle \Pi(g)\phi, \phi^\vee \rangle = \langle \phi, \Pi^\vee(g^{-1})\phi^\vee \rangle \\ &= \int_K \langle \phi(k), \phi^\vee(gk) \rangle d_K(k) = \int_N \langle \phi(k), \phi^\vee(gk) \rangle d_K(k) \end{aligned}$$

となるから，$\Phi_1 \in \mathcal{S}(M_{l,m}(F))$ と $\Phi_2 \in \mathcal{S}(M_{m,l}(F))$ をとって

$$\Phi\begin{pmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{21} & x_2 \end{pmatrix} = \Phi'(x_1)\Phi''(x_2)\Phi_1(x_{12})\Phi_2(x_{21})$$

により $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ を定義し

$$\Phi_1(x + M_{l,m}(\mathfrak{p}^e)) = \Phi_1(x), \quad \Phi_2(y + M_{m,l}(\mathfrak{p}^e)) = \Phi_2(y), \quad \Phi_2(0) = 1$$

としておくと

$$
\begin{aligned}
&Z(\Phi,\varphi_{\phi,\phi^\vee},s)\\
=&\int_N d_K(k')\int_{G_l} d_{G_l}(a)\int_{G_m} d_{G_m}(d)\int_{M_{l,m}(F)} d_{M_{l,m}(F)}(b)\int_N d_K(k)\\
&\qquad |\det a|_F^{-m}\Phi(k'\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}k^{-1})\langle(\sigma(a)\otimes\pi(d))\phi(k),\phi^\vee(k')\rangle|\det a|_F^s|\det d|_F^s\\
=&\int_N d_K(k')\int_{G_l} d_{G_l}(a)\int_{G_m} d_{G_m}(d)\int_{M_{l,m}(F)} d_{M_{l,m}(F)}(b)\int_N d_K(k)\\
&\qquad \Phi'(a)\Phi''(d)\Phi_1(b)\langle\sigma(a)v,\alpha\rangle\langle\pi(d)w,\beta\rangle|\det a|_F^{s-m}|\det d|_F^s\\
=&\mathrm{vol}_K(N)^2\cdot\int_{M_{l,m}(F)}\Phi_1(b)d_{M_{l,m}(F)}(b)\times Z(\Phi',\varphi_{v,\alpha},s-m)Z(\Phi'',\varphi_{w,\beta},s)
\end{aligned}
$$

となる．■

定理 5.8.2.4 誘導表現

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Pi}&=\mathrm{Ind}_{P_\beta}^G\left(\Delta_{P_\beta}^{-1/2}\cdot(\sigma\otimes\pi\otimes\mathbf{1}_{U_\beta}\right)\\
&=\mathrm{Ind}_{P_\beta}^G\left((|\det|_F^{m/2}\cdot\sigma)\otimes(|\det|_F^{-l/2}\cdot\pi)\otimes\mathbf{1}_{U_\beta})\right)
\end{aligned}
$$

に対して

$$
L(\widetilde{\Pi},T)=L(\sigma,T)\cdot L(\pi,T),\qquad \varepsilon(\widetilde{\Pi},\tau,T)=\varepsilon(\sigma,\tau,T)\cdot\varepsilon(\pi,\tau,T).
$$

[**証明**] 注意 5.8.1.2 から，定理 5.8.2.2 の証明にあるように，任意の $\Phi\in\mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi\in\mathcal{C}(\widetilde{\Pi})$ に対して

$$
Z(\Phi,\varphi,T)=\sum_{i,j}c_{ij}Z(\Phi_j,\varphi_i,q^{m/2}T)\cdot Z(\Phi'_j,\varphi'_i,q^{l/2}T)
$$

なる $\Phi_j\in\mathcal{S}(M_l(F)),\varphi_i\in\mathcal{C}(\sigma),\Phi'_j\in\mathcal{S}(M_m(F)),\varphi'_i\in\mathcal{C}(\pi)$ 及び $c_{ij}\in\mathbb{C}$ がとれる．よって

$$
P(\widetilde{\Pi},T)^{-1}\mathbb{C}[T^{\pm1}]\subset P(\sigma,q^{m/2}T)^{-1}P(\pi,q^{l/2}T)^{-1}\mathbb{C}[T^{\pm1}],
$$

即ち，$P(\sigma, q^{m/2}T)P(\pi, q^{l/2}T) = P(\widetilde{\Pi}, T)f(T)$ なる $f(T) \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ がとれる．一方

$$\sum_i \Xi(\Phi'_i, \varphi'_i, T) = 1, \quad \sum_j \Xi(\Phi''_j, \varphi''_j, T) = 1$$

なる $\Phi'_i \in \mathcal{S}(M_l(F)), \varphi_i^{|prime} \in \mathcal{C}(\sigma), \Phi'_j \in \mathcal{S}(M_m(F)), \varphi'_j \in \mathcal{C}(\pi)$ がとれて，命題 5.8.2.3 より

$$Z(\Phi_{ij}, \varphi_{ij}, T) = Z(\Phi'_i, \varphi'_i, q^{m/2}T)Z(\Phi''_j, \varphi''_j, q^{l/2}T)$$

なる $\Phi_{ij} \in \mathcal{S}(M_n(F)), \varphi \in \mathcal{C}(\widetilde{\Pi})$ がとれるから

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} Z(\Phi_{ij}, \varphi_{ij}, q^{-(n-1)/2}T) \\
=&\sum_i Z(\Phi'_i, \varphi'_i, q^{-(l-1)/2}T) \times \sum_j Z(\Phi''_j, \varphi_j^{prime\prime}, q^{-(m-1)/2}T) \\
=&L(\sigma, T) \cdot L(\pi, T)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[T^{\pm 1}] \ni \sum_{i,j} \Xi(\Phi_{ij}, \varphi_{ij}, T) &= \frac{L(\sigma, T)L(\pi, T)}{L(\widetilde{\Pi}, T} \\
&= \frac{P(\widetilde{\Pi}, q^{-(n-1)/2}T)}{P(\sigma, q^{-(l-1)/2}T)P(\pi, q^{-(m-1)/2}T)}
\end{aligned}$$

となり，$P(\widetilde{\Pi}, T) = P(\sigma, q^{m/2}T)P(\pi, q^{l/2}T)g(T)$ なる $g(T) \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ がとれる．よって $f(T)g(T) = 1$ より $f(T) = cT^d$ となるが

$$P(\widetilde{\Pi}, 0) = P(\sigma, 0) = P(\pi, 0) = 1$$

だから $f(T) = 1$ となり，$L(\widetilde{\Pi}, T) = L(\sigma, T)L(\pi, T)$ を得る．定理 5.8.2.2 の証明にあるように，$\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F)), \varphi \in \mathcal{C}(\widetilde{\Pi})$ に対して

$$\begin{aligned}
Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee, (q^nT)^{-1}) &= \gamma_{|\det|_F^{m/2}\cdot\sigma}(q^mT)\gamma_{|\det|_F^{-l/2}\cdot\pi}(T)Z(\Phi, \varphi, T) \\
&= \gamma_\sigma(q^{m/2}T)\gamma_\pi(q^{l/2}T)Z(\Phi, \varphi, T)
\end{aligned}$$

となる（注意 5.8.1.2 参照）．よって

$$\gamma_{\widetilde{\Pi}}(T) = \gamma_\sigma(q^{m/2}T)\gamma_\pi(q^{l/2}T)$$

となるから，定理 5.8.1.4 の証明にあるように

$$\begin{aligned}\varepsilon(\widetilde{\Pi},\tau,T) =&\gamma_{\widetilde{\Pi}}(q^{-(n-1)/2}T)\frac{L(\widetilde{\Pi},T)}{L(\widetilde{\Pi}^\vee,(qT)^{-1})}\\ =&\gamma_\sigma(q^{-(l-1)/2}T)\gamma_\pi(q^{-(m-1)/2}T)\frac{L(\sigma,T)L(\pi,T)}{L(\sigma^\vee,(qT)^{-1})L(\pi^\vee,(qT)^{-1})}\\ =&\varepsilon(\sigma,\tau,T)\cdot\varepsilon(\pi,\tau,T)\end{aligned}$$

を得る．ここで $\widetilde{\Pi}^\vee = \mathrm{Ind}_{P_\beta}^G(\delta_{P_\beta}^{-1}\cdot(\sigma^\vee\otimes\pi^\vee\otimes\mathbf{1}_{U_\beta})$ であることに注意する．
■

5.8.3　　G の許容表現 (π,E) に対して定理 A と定理 B が成り立つと仮定して，σ は π の部分商であるとする．即ち G-部分加群 $V\subset W\subset E$ があって，σ は W/V 上の許容表現である．このとき $W^\perp\subset V^\perp\subset E^\vee$ で，命題 3.4.1 より

$$\langle\,,\rangle : W/V\times V^\perp/W^\perp\to\mathbb{C}\qquad((\dot{u},\dot{\alpha})\mapsto\langle u,\alpha\rangle)$$

は非退化複素双線形形式となるから，$(\sigma,W/V)$ の反傾表現は G-加群 $V^\perp/W^\perp$ と同型である．特に

$$\mathcal{C}(\sigma) = \langle\varphi_{u,\alpha}\mid u\in W,\alpha\in V^\perp\rangle_{\mathbb{C}}$$

となる．よって σ に対しても定理 A と定理 B が成り立つ．特に $\mathcal{Z}(\sigma)\subset\mathcal{Z}(\pi)$ となるから，定理 5.8.1.3 の証明から

$$P(\pi,T) = P(\sigma,T)\cdot P(T),\qquad P(\pi^\vee,T) = P(\sigma^\vee,T)\cdot Q(T)$$

なる $P(T),Q(T)\in\mathbb{C}[T]$ がある（このとき $P(0)=Q(0)=1$）．よって

$$L(\sigma,T) = P(q^{-(n-1)/2}T)\cdot L(\pi,T),\quad L(\sigma^\vee,T) = Q(q^{-(n-1)/2}T)\cdot L(\pi^\vee,T)$$

である．又 $\gamma_\sigma(T)=\gamma_\pi(T)$ である．ここで

命題 5.8.3.1 $\deg P(T) = \deg Q(T) = l$ で，$P(T), Q(T)$ の最高次の係数を a_l, b_l とすると $a_l b_l = q^{ln}$ となり

$$\varepsilon(\sigma, \tau, T) = a_l T^l \cdot \varepsilon(\pi, \tau, T).$$

[**証明**] まず

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma, \tau, T) &= \gamma_\sigma(q^{(n-1)/2}T) \cdot \frac{L(\sigma, T)}{L(\sigma^\vee, (qT)^{-1})} \\
&= \gamma_\pi(q^{-(n-1)/2}T) \cdot \frac{P(q^{-(n-1)/2}T)L(\pi, T)}{Q(q^{-(n+1)/2}T^{-1})L(\pi^\vee, (qT)^{-1})} \\
&= \varepsilon(\pi, \tau, T) \cdot \frac{P(q^{-(n-1)/2}T)}{Q(q^{-(n+1)/2}T^{-1})}.
\end{aligned}$$

$\varepsilon(\sigma, \tau, T), \varepsilon(\pi, \tau, T)$ は $\mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ の単項式だから $P(T) = cT^l \cdot Q(q^{-n}T^{-1}$ $(0 \neq c \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{Z})$ となる．$P(T), Q(T) \in \mathbb{C}[T]$ かつ $P(0) = Q(0) = 1$ だから，$l = \deg Q(T) = \deg P(T)$ であり，$P(T), Q(T)$ の最高次の係数を a_l, b_l とすると $c = a_l$ かつ $a_l b_l = q^{ln}$ となる．■

5.8.4 (π, E) を G の既約 supercuspidal 表現とする．適当な $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $|\det|_F^\lambda \cdot \pi$ を考えれば，π の中心指標 χ_π に対して $|\chi_\pi(z)| = 1$ for $\forall z \in Z(G)$ と仮定してよい．

命題 5.8.4.1 任意の $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して

1) $Z(\Phi, \varphi, s) = \displaystyle\int_G \Phi(g)\varphi(g)|\det g|_F^s d_G(g)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で絶対収束する．
2) (4.7) の $L(\chi_\pi, T)$ に対して $Z(\Phi, \varphi, T) \in L(\chi_\pi, T^n) \cdot \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$.

[**証明**] $\varphi = \varphi_{u,\alpha}$ $(u \in E, \alpha \in E^\vee)$ として，$u \in E^N, \alpha \in (E^\vee)^N$ なるコンパクト開部分群 $N \subset G$ をとり，π は G の supercuspidal 表現だから $\mathrm{supp}(\varphi_{u,\alpha}) \subset \Omega \cdot Z(G)$ なるコンパクト集合 $\Omega \subset G$ をとって

$$\Omega \subset \bigsqcup_{i=1}^r g_i N$$

とおく．更に任意の $n \in N$ に対して $\Phi(xn) = \Phi(x)$ であるとしてよい．実際，$0 < e \in \mathbb{Z}$ に対して $\Phi = \chi_{a+\varpi^e M_n(O_F)}$ ならば $N = 1_n + \varpi^e M_n(O_F)$ とおけばよい．このとき

$$\begin{aligned}
&\int_G |\Phi(g)\varphi_{u,\alpha}(g)||\det g|_F^{\mathrm{Re}(s)} d_G(g) \\
=&\int_{\Omega\cdot Z(G)} |\Phi(g)\varphi_{u,\alpha}(g)||\det g|_F^{\mathrm{Re}(s)} d_G(g) \\
=&\sum_{i=1}^r \int_{Z(G)g_iN} |\Phi(g)\varphi_{u,\alpha}(g)||\det g|_F^{\mathrm{Re}(s)} d_G(g) \\
=&\sum_{i=1}^r \int_{Z(G)g_iN/Z(G)} |\varphi_{u,\alpha}(g_i)||\det g_i|_F^{\mathrm{Re}(s)} \\
&\qquad\qquad \left(\int_{F^\times} |\Phi(tg_i)|\chi_\pi(t)||t|_F^{n\mathrm{Re}(s)} d^\times t\right) d_{G/Z(G)}(\dot{g})
\end{aligned}$$

で，$|\chi_\pi(t)| = 1$ だから，$\mathrm{Re}(s) > 0$ ならば

$$\int_{F^\times} |\Phi(tg_i)||\chi_\pi(t)||t|_F^{n\mathrm{Re}(s)} d^\times t < \infty.$$

よって 1) が示された．$\mathrm{Re}(s) > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_G \Phi(g)\varphi_{u,\alpha}(g)|\det g|_F^s d_G(g) \\
=&\mathrm{vol}\,(NZ(G)/Z(G)) \cdot \sum_{i=1}^r \varphi_{u,\alpha}(g_i)|\det g_i|_F^s \times \int_{F^\times} \Phi(tg_i)\chi_\pi(t)|t|_F^{ns} d^\times(t)
\end{aligned}$$

だから $Z(\Phi, \varphi_{u,\alpha}, T) \in L(\chi_{pi}, T^n) \cdot \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ となる．■

$M_n(F) \setminus G$ では 0 であるとして $\mathcal{S}(G) \hookrightarrow \mathcal{S}(M_n(F))$ と同一視することができる．ここで問題となるのは，$\Phi \in \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(M_n(F))$ の Fourier 変換 $\Phi^\vee \in \mathcal{S}(M_n(F))$ が必ずしも $\mathcal{S}(G)$ の元とはならないことである[5]．そこで $\mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(M_n(F))$ の部分空間 $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0(G)$ を，任意の $g, g' \in G$ と n の分

[5] 例えば $\Phi \in \mathcal{S}(F^\times)$ を $O_F^\times$ の特性関数とすると $\Phi^\vee(y) = G_\tau(1, y)$ となり，特に $\Phi^\vee(0) = \int_{O_F^\times} d^\times t = 1$ となる．

割 $\beta = (l, m)$ $(l > 0, m > 0)$ に対して

$$\int_{U_\beta} \Phi(ghg')d_{U_\beta}(h) = 0$$

なる $\Phi \in \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(M_n(F))$ の全体とする．

命題 5.8.4.2 $\Phi \in \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}(M_n(F))$ ならば $\Phi^\vee \in \mathcal{S}_0$ である．

[**証明**] $x \in M_n(F)$ に対して $\det x = 0$ とする． $x \neq 0$ として

$$gxh = \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (g, h \in G, 0 < r < n)$$

とおくと，n の分割 $\beta = (r, n-r)$ に対して

$$\Phi^\vee(x) = \int_{M_n(F)} \Phi(y)\tau\left(\mathrm{tr}(yg^{-1}\begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h^{-1})\right) d_{M_n(F)}(y)$$

$$=|\det(gh)|_F^n \int_G \Phi(gyh)\tau\left(\mathrm{tr}(y\begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})\right)|\det y|_F^n d_G(y)$$

$$=|\det(gh)|_F^n \int_{G/U_\beta}\left(\int_{U_\beta} \Phi(gyuh)\tau\left(\mathrm{tr}(yu\begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})\right)|\det y|_F^n d_{U_\beta}(u)\right) d_{G/U_\beta}(\dot{y})$$

$$=|\det(gh)|_F^n \int_{G/U_\beta}\left(\int_{U_\beta} \Phi(gyuh)d_{U_\beta}(u)\right)\mathrm{tr}(y\begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})|\det y|_F^n d_{G/U_\beta}(\dot{y}) = 0$$

となり，又

$$\Phi^\vee(0) = \int_{M_n(F)} \Phi(y)d_{M_n(F)}(y) = \int_G \Phi(y)|\det y|_F^n d_G(y)$$
$$= \int_{G/U_\beta}\left(\int_{U_\beta} \Phi(yu)d_{U_\beta}(u)\right)|\det y|_F^n d_{G/U_\beta}(\dot{y}) = 0.$$

よって $\mathrm{supp}(\Phi^\vee) \subset G$ である．ここで補題 5.8.2.1 の記号を用いて，任意の $g, h \in G$ に対して $(g \cdot \Phi \cdot h)(x) = \Phi(g^{-1}xh^{-1})$ $(x \in M_n(F))$ とおいて，n の

分割 $\beta=(l,m)$ $(0<l<n)$ に対して

$$\begin{aligned}\Psi_{g^{-1}\cdot\Phi\cdot h^{-1}}(x,y)&=\int_{M_{l,m}(F)}\Phi(g\begin{bmatrix}x&u\\0&y\end{bmatrix}h)d_{M_{l,m}(F)}(u)\\&=\int_{U_{beta}}\Phi(g\begin{bmatrix}1&0\\0&y\end{bmatrix}u\begin{bmatrix}x&0\\0&1\end{bmatrix}h)d_{U_\beta}(u)=0\end{aligned}$$

だから

$$0=\Psi^\vee_{g^{-1}\cdot\Phi\cdot h^{-1}}(x,y)=\Psi_{(g^{-1}\cdot\Phi\cdot h^{-1})^\vee}(x,y)=\Psi_{g\cdot\Phi^\vee\cdot h}(x,y)$$

より

$$\int_{U_\beta}|\Phi^\vee(g^{-1}uh^{-1})d_{U_\beta}(u)=\Psi_{g\cdot\Phi^\vee\cdot h}(1,1)=0$$

となって $\Phi^\vee\in\mathcal{S}_0$ を得る．■

$\Phi\in\mathcal{S}(G)$ として，任意の $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}Z(\Phi,\pi,s)&=\int_G\Phi(g)|\det g|_F^s\pi(g)d_G(g)=(|\det|_F^s\cdot\pi)(\Phi)\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty,\\Z(\Phi,\pi',s)&=\int_G\Phi(g)|\det g|_F^s\pi(g^{-1})d_G(g)=Z(\Phi',\pi,-s)\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty\end{aligned}$$

とおく（$\Phi'(g)=\Phi(g^{-1})$．$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty$ については 3.5 頁参照）．

命題 5.8.4.3 任意の $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$Z(*,\pi,s):\mathcal{S}_0\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty$$

は全射複素線形写像である．

[**証明**] $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty$ をとる．$u\in E,\alpha\in E^\vee$ があって $Tv=\langle v,\alpha\rangle u$ $(v\in E)$ であるとしてよい．

$$\varphi\in\mathcal{S}(F^\times)\,\text{s.t.}\,\varphi(t)=\begin{cases}1&:0\le\mathrm{ord}_F(t)<n,\\0&:\text{otherwise}\end{cases}$$

として

$$\Phi_s(x)=\begin{cases}\langle\pi(x)^{-1}u,\alpha\rangle\varphi(\det x)|\det x|_F^{-s} & :x\in G,\\ 0 & :x\notin G\end{cases}$$

とおくと $\Phi_s\in\mathcal{S}_0$ である．実際

$$C_e=\{g\in G^0\mid\langle\pi(g)^{-1}u,\pi^\vee\begin{pmatrix}\varpi^e&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\alpha\rangle\neq 0\}$$

は $G^0=\{g\in G\mid\det g\in O_F^\times\}$ のコンパクト集合で（定理 5.2.5）

$$\mathrm{supp}(\Phi_s)=\bigsqcup_{e=0}^{n-1}\begin{bmatrix}\varpi^e&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}\cdot C_e$$

は G のコンパクト集合である．又，任意の $g,g'\in G$ と n の分割 $\beta\neq(n)$ に対して

$$\pi(g^{-1})u\in E=E(U_\beta,\mathbf{1})=\langle\pi(h)v-v\mid h\in U_\beta,v\in E\rangle_{\mathbb{C}}$$

だから

$$\begin{aligned}&\int_{U_\beta}\Phi_s(ghg')d_{U_\beta}(h)\\=&\int_{U_\beta}\langle\pi(h)\circ\pi(g^{-1})u,\pi^\vee(g')\alpha\rangle\varphi(gg')|\det(gg')|_F^{-s}d_{U_\beta}(h)=0\end{aligned}$$

となる．このとき $a\in E^N$ なるコンパクト開部分群 $N\subset G$ をとれば，命題 5.5.9 より，任意の $v\in E,\beta\in E^\vee$ に対して

$$\begin{aligned}\langle Z(\Phi_s,\pi,s)v,\beta\rangle&=\int_G\langle\pi(g^{-1})u,\alpha\rangle\langle\pi(g)v,\beta\rangle\varphi(\det g)d_G(g)\\&=c(N)d_\pi^{-1}\langle u,\beta\rangle\langle v,\alpha\rangle=c(N)d_\pi^{-1}\langle Tv,\beta\rangle.\end{aligned}$$

よって $\Psi_s = c(N)^{-1}d_\pi \cdot \Phi_s \in \mathcal{S}_0$ とおくと $Z(\Psi_s, \pi, s) = T$ となる．■

さて $GL_n(F)$ における Tate のトリックが基本的である；

命題 5.8.4.4 任意の $\Phi \in \mathcal{S}(M_n), \Psi \in \mathcal{S}_0$ と任意の $u \in E, \alpha \in E^\vee$ に対して

$$\int_G d_G(g) \int_G d_G(h)\Phi(g)\psi^\vee(h)\langle\pi(g)u, \pi^\vee(h)\alpha\rangle |\det g|_F^s |\det h|_F^{n-s},$$

$$\int_G d_G(g) \int_G d_G(h)\Phi^\vee(g)\Psi(h)\langle\pi(g^{-1})u, \pi^\vee(h^{-1})\alpha\rangle |\det g|_F^{n-s} |\det h|_F^s$$

は $0 < \mathrm{Re}(s) < n$ で共に絶対収束して等しい．

[**証明**] $C = \mathrm{supp}(\Psi^\vee)$ は G のコンパクト集合だから $\{\pi^\vee(h)\alpha \mid h \in C\}$ は $E^\vee$ の有限部分集合となる．よってコンパクト集合 $C' \subset G$ があって

$$\bigcup_{h \in C} \mathrm{supp}[G \ni g \mapsto \langle\pi(g)u, \pi^\vee(h)\alpha\rangle \in \mathbb{C}] \subset C' \cdot Z(G)$$

となる．更に $\Phi(xn) = \Phi(x)$ for $\forall n \in N$ なるコンパクト開部分群 $N \subset G$ をとって $C' \subset \bigsqcup_{i=1}^r g_i N$ とおけば，$|\chi_\pi(z)| = 1$ for $\forall z \in Z(G)$ に注意して，$\sigma = \mathrm{Re}(s)$ とおいて $0 < \sigma < n$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_G d_G(g) \int_G d_G(h)\, |\Phi(g)\Psi^\vee(h)\langle\pi(g)u, \pi^\vee(h)\alpha\rangle|\, |\det g|_F^\sigma |\det h|_F^{n-\sigma} \\
\le &\mathrm{const.} \times \int_{C' \cdot Z(G)} |\Phi(g)| \det g|_F^\sigma d_G(g) \\
= &\mathrm{const.} \times \sum_{i=1}^r \int_{g_i N Z(G)} |\Phi(g)||\det g|_F^\sigma d_G(g) \\
= &\mathrm{const.} \times \sum_{i=1}^r \int_{g_i N Z(G)/Z(G)} |\det g_i|_F^\sigma \left(\int_{F^\times} |\Phi(tg_i)||t|_F^{n\sigma} d^\times t\right) d_{G/Z(G)}(\dot{g})
\end{aligned}$$

で，$\sigma > 0$ ならば $\displaystyle\int_{F^\times} |\Phi(tg_i)||t|_F^{n\sigma} d^\times(t) < \infty$ である．同様に第二の積分も絶対収束する．そこで

$$\begin{aligned}
&\int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \Phi(g)\Psi^\vee(h)\langle \pi(g)u, \pi^\vee(h)\alpha\rangle |\det g|_F^s |\det h|_F^{n-s} \\
=& \int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \Phi(g)\Psi^\vee(h)\langle \pi(h^{-1}g)u, \alpha\rangle |\det(h^{-1}g)|_F^s |\det h|_F^n \\
=& \int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \int_{M_n(F)} d_{M_n(F)}(X) \\
&\qquad \Phi(hg)\Psi(X)\tau(\mathrm{tr}(hX))\langle \pi(g)u, \alpha\rangle |\det g|_F^s |\det h|_F^n \\
=& \int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \int_{M_n(F)} d_{M_n(F)}(X) \\
&\qquad \Phi(hg)\Psi(h^{-1}X)\tau(\mathrm{tr}\, X)\langle \pi(g)u, \alpha\rangle |\det g|_F \\
=& \int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \int_G d_G(X) \\
&\qquad |\det X|_F^n \Phi(hg)\Psi(h^{-1}X)\tau(\mathrm{tr}\, X)\langle \pi(g)u, \alpha\rangle |\det g|_F^s \\
=& \int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \int_G d_G(X) \\
&\qquad |\det X|_F^n \Phi(Xhg)\Psi(h^{-1})\tau(\mathrm{tr}\, X)\langle \pi(g)u, \alpha\rangle |\det g|_F^s \\
=& \int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \int_G d_G(X) \\
&\quad |\det(Xg^{-1}h^{-1})|_F^n \Phi(X)\Psi(h^{-1})\tau(\mathrm{tr}(Xg^{-1}h^{-1}))\langle \pi(g)u, \alpha\rangle |\det g|_F^s \\
=& \int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \int_{M_n(F)} d_{M_n(F)}(X) \\
&\qquad \Phi(X)\Psi(h^{-1})\tau(\mathrm{tr}(Xg^{-1}h^{-1}))\langle \pi(g)u, \alpha\rangle |\det g|_F^{s-n} |\det h|_F^{-n} \\
=& \int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \Phi^\vee(g^{-1}h^{-1})\Psi(h^{-1})\langle \pi(g)u, \alpha\rangle |\det g|_F^{s-n} |\det h|_F^{-n} \\
=& \int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \Psi^\vee(g^{-1})\Psi(h^{-1})\langle \pi(h^{-1}g)u, \alpha\rangle |\det(h^{-1}g)|_F^{s-n} |\det h|_F^{-n}
\end{aligned}$$

より，二つの積分は等しい．■

上の命題で $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}_0$ の場合には，証明の後半の積分の変形は任意の $s \in \mathbb{C}$ 対して正当だから，次の系を得る；

系 5.8.4.5 任意の $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}_0$ と任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$Z(\Psi^\vee, \pi', n-s) \circ Z(\Phi, \pi, s) = Z(\Psi, \pi, s) \circ Z(\Phi^\vee, \pi', n-s).$$

$Z(\Phi, \pi, s)$ の関数等式を導くために，次の補題を用いる；

補題 5.8.4.6 $0 \neq v \in E$ に対して

$$E_v = \left\{ u \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \Phi \in \mathcal{S}_0, \exists m \in \mathbb{Z} \\ \text{s.t. } Z(\Phi, \pi, s)v = q^{-ms} \cdot u \text{ for } \forall s \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

とおくと $E = \langle E_v \rangle_{\mathbb{C}}$.

[**証明**] $\langle v, \beta \rangle \neq 0$ なる $\beta \in E^\vee$ をとって

$$\Phi(x) = \begin{cases} \overline{\langle \pi(x)v, \beta \rangle} & : x \in G^0 = \{g \in G \mid \det g \in O_F^\times\}, \\ 0 & x \notin G^0 \end{cases}$$

とおくと $\Phi \in \mathcal{S}_0$ で，任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$u = Z(\Phi, \pi, s)v = \int_G \overline{\langle \pi(g)v, \beta \rangle} \pi(g) v d_G(g)$$

は $s \in \mathbb{C}$ に依らないから，$m = 0$ として $u \in E_v$ であり

$$\langle u, beta \rangle = \int_G |\langle \pi(g)v, \beta \rangle|^2 d_G(g) > 0$$

より $u \neq 0$ である．一方，$u \in E_v$ に対して

$$Z(\Phi, \pi, s)v = q^{-ms} \cdot u \text{ for } \forall s \in \mathbb{C}$$

なる $\phi \in \mathcal{S}_0$ 及び $m \in \mathbb{Z}$ をとると，任意の $g \in G$ に対して，$\Psi(x) = \Phi(g^{-1}x)$ $(x \in M_n(F))$ とおけば $\Psi \in \mathcal{S}_0$ で，任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} Z(\Psi, \pi, s)v &= \int_G \Phi(g^{-1}h) |\det h|_F^s \pi(h) v d_G(h) \\ &= |\det g|_F^s \pi(g) \circ Z(\Phi, \pi, s)v = |\det g|_F^s q^{-ms} \cdot \pi(g) u \end{aligned}$$

となるから，$\pi(g)u \in E_v$ である．(π, E) は G の既約表現だから $E = \langle E_v \rangle_{\mathbb{C}}$ となる．■

命題 5.8.4.7 $\gamma_\pi(T) = cT^d \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ があって，任意の $\Phi \in \mathcal{S}_0$ と $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$Z(\phi^\vee, \pi', n-s) = \gamma_\pi(q^{-s}) \cdot Z(\Phi, \pi, s),$$

$$Z(\Phi^\vee, \pi^\vee, n-s) = \gamma_\pi(q^{-s}) \cdot Z(\Phi, \pi^{\vee\prime}, s).$$

[**証明**] 命題 5.8.4.3 より各 $s \in \mathbb{C}$ に対して $Z(\Phi_s, \pi, s) = 1_E$ なる $\Phi_s \in \mathcal{S}_0$ があるから

$$\gamma_\pi(s) = Z(\Phi_s^\vee, \pi', n-s) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)_\infty$$

とおくと，系 5.8.4.5 より任意の $\Phi \in \mathcal{S}_0$ に対して

$$\begin{aligned}\gamma_\pi(s) \circ Z(\Phi, \pi, s) &= Z(\Phi_s^\vee, \pi', n-s) \circ Z(\Phi, \pi, s) \\ &= Z(\Phi_s, \pi, s) \circ Z(\Phi^\vee, \pi', n-s) \\ &= Z(\Phi^\vee, \pi', n-s)\end{aligned}$$

となる．任意の $h \in G$ に対して $(h \cdot \Phi_s)(x) = \Phi_s(h^{-1}x)$ $(x \in M_n(F))$ とおくと，$h \cdot \Phi_s \in \mathcal{S}_0$ で

$$\begin{aligned}Z(h \cdot \Phi_s, \pi, s) &= \int_G \Phi_s(h^{-1}g)|\det g|_F^s \pi(g) d_G(g) \\ &= |\det h|_F^s \pi(h) \circ Z(\Phi_s, \pi, s) = |\det H|_F^s \pi(h) \circ \gamma_\pi(s).\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}(h \cdot \Phi_s)^\vee(y) &= \int_{M_n(F)} \Phi_s(h^{-1}x)\tau(\mathrm{tr}(xy)) d_{M_n(F)}(x) \\ &= |\det h|_F^n \cdot \Phi_s^\vee(yh) \qquad (y \in M_n(F))\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&Z((h \cdot \Phi_s)^\vee, \pi', n-s) \\ =&|\det h|_F^s \int_G \Phi_s^\vee(gh)|\det g|_F^{n-s}\pi(g^{-1}) d_G(g) \\ =&|\det h|_F^s \cdot \pi(h) \circ Z(\Phi_s^\vee, \pi', n-s) = |\det h|_F^s \pi(h) \circ \gamma_\pi(s).\end{aligned}$$

よって

$$
\begin{aligned}
|\det h|_F^s \cdot \gamma_\pi(s) \circ \pi(h) &= \gamma_\pi(s) \circ Z(h \cdot \Phi_s, \pi, s) \\
&= Z((h \cdot \Phi_s)^\vee, \pi', n-s) = |\det h|_F^s \cdot \pi(h) \circ \gamma_\pi(s)
\end{aligned}
$$

となるから $\gamma_\pi(s) \circ \pi(h) = \pi(h) \circ \gamma_\pi(s)$ となる．よって $\gamma_\pi(s) \in \mathbb{C}$ である．即ち，関数 $\gamma_\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ があって，任意の $\Phi \in \mathcal{S}_0$ と $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$Z(\Phi^\vee, \pi', n-s) = \gamma_\pi(s) \cdot Z(\Phi, \pi, s)$$

となる．任意の $u \in E, \alpha \in E^\vee$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle u, Z(\Phi^\vee, \pi^\vee, n-s)\alpha\rangle &= \int_G \Phi^\vee(g)|\det g|_F^{n-s}\langle u, \pi^\vee(g)\alpha\rangle d_G(g) \\
&= \int_G \Phi^\vee(g)|\det g|_F^{n-s}\langle \pi(g^{-1}u, \alpha\rangle d_G(g) \\
&= \langle Z(\phi^\vee, \pi', n-s)u, \alpha\rangle \\
&= \gamma_\pi(s) \cdot \langle Z(\Phi, \pi, s)u, \alpha\rangle \\
&= \gamma_\pi(s) \int_G \Phi(g)|\det g|_F^s \langle \pi(g)u, \alpha\rangle d_G(g) \\
&= \gamma_\pi(s) \cdot \langle u, Z(\Phi, \pi^{\vee\prime}, s)\alpha\rangle,
\end{aligned}
$$

よって

$$Z(\Phi^\vee, \pi^\vee, n-s) = \gamma_\pi(s) \cdot Z(\Phi, \pi^{\vee\prime}, s)$$

となる．$0 \neq v \in E, 0 \neq u \in E_v$ として

$$Z(\Phi, \pi, s)v = q^{-ms}u \text{ for } \forall s \in \mathbb{C}$$

なる $\Phi \in \mathcal{S}_0$ と $m \in \mathbb{Z}$ をとると

$$Z(\Phi^\vee, \pi', n-s)v = \gamma_\pi(s) \cdot q^{-ms}u \text{ for } \forall s \in \mathbb{C}.$$

よって $\langle u, \alpha\rangle = 1$ なる $\alpha \in E^\vee$ をとれば

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\pi(s) \cdot q^{-ms} = \langle Z(\Phi^\vee, \pi', n-s)v, \alpha\rangle \\
&= Z(\Phi^\vee, \varphi_{u,\alpha}^\vee, n-s) \\
&\qquad = \sum_{e \in \mathbb{Z}} Z_e(\Phi^\vee, \varphi_{u,\alpha}^\vee) q^{e(s-n)} \quad \text{for } \forall s \in \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

となる．よって $\gamma_\pi(T) \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ があって $\gamma_\pi(s) = \gamma_\pi(q^{-s})$ となる．又，任意の $\Phi \in \mathcal{S}_0$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して

$$Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee, (q^n T)^{-1}) = \gamma_\pi(T) \cdot Z(\Phi, \varphi, T)$$

となる．反傾表現 $(\pi^\vee, E^\vee)$ についても同様に $\gamma_{\pi^\vee}(T) \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$ があって，任意の $\Psi \in \mathcal{S}_0$ と $\psi \in \mathcal{C}(\pi^\vee)$ に対して

$$Z(\Psi^\vee, \psi^\vee, (q^n T)^{-1}) = \gamma_{\pi^\vee}(T) \cdot Z(\Psi, \psi, T)$$

となる．$\Psi = \Phi^\vee \in \mathcal{S}_0$, $\psi = \varphi^\vee \in \mathcal{C}(\pi^\vee)$ として

$$\begin{aligned}
&\gamma_\pi(T)\gamma_{\pi^\vee}((q^n T)^{-1}) Z(\Psi, \psi, (q^n T)^{-1}) = \gamma_\pi(T) \cdot Z(\Psi^\vee, \psi^\vee, T) \\
=&\gamma_\pi(T) \cdot Z(\Phi, \varphi, T) = Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee, (q^n T)^{-1}) \\
=&Z(\Psi, \psi, (q^n T)^{-1})
\end{aligned}$$

より $\gamma_\pi(T) \cdot \gamma_{\pi^\vee}((q^n T)^{-1}) = 1$．従って $\gamma_\pi(T) = cT^d$ となる．■

命題 5.8.4.8 任意の $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ と $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して

$$Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee, (q^n T)^{-1}) = \gamma_\pi(T) \cdot Z(\Phi, \varphi, T)$$

である．

[**証明**] $0 \neq \alpha \in E^\vee$ を固定しておく．$0 \neq \beta \in E^\vee_\alpha$ に対して

$$Z(\Psi^\vee, \pi^\vee, n-s)\alpha = q^{ms}\beta \text{ for } \forall s \in \mathbb{C}$$

なる $\Psi \in \mathcal{S}_0$ と $m \in \mathbb{Z}$ をとる．$Z(\Psi^\vee, \pi^\vee, n-s) = \gamma_\pi(q^{-s}) Z(\Psi, \pi^{\vee\prime}, s)$ だから

$$Z(\Psi, \pi^{\vee\prime}, s)\alpha = \gamma_\pi(q^{-s})^{-1} q^{ms} \cdot \beta \text{ for } \forall s \in \mathbb{C}$$

である．ここで $0 < \mathrm{Re}(s) < n$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \Phi(g) \Psi^\vee(h) \langle \pi(g)u, \pi^\vee(h)\alpha \rangle |\det g|_F^s |\det h|_F^{n-s} \\
=&\int_G d_G(g) \int_G d_G(h) \Psi^\vee(g) \psi(h) \langle \pi(g^{-1})u, \pi^\vee(h^{-1})\alpha \rangle |\det g|_F^{n-s} |\det h|_F^s
\end{aligned}$$

で

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \int_G \Phi(g)\langle \pi(g)u, q^{ms}\beta\rangle |\det g|_F^s d_G(g),\\
\text{左辺} &= \int_G d_G(g)\Phi^\vee(g)\langle \pi(g^{-1})u, \gamma_\pi(q^{-s})^{-1}q^{ms}\beta\rangle |\det g|_F^{n-s} d_G(g)
\end{aligned}
$$

だから

$$
Z(\Phi, \varphi_{u,\beta}, s) = \gamma_\pi(q^{-s})^{-1} \cdot Z(\Phi^\vee, \varphi_{u,\beta}^\vee, n-s)
$$

を得る．ここで $E^\vee = \langle E_\alpha^\vee \rangle_{\mathbb{C}}$ だから，任意の $\varphi \in \mathcal{C}(\pi)$ に対して

$$
Z(\Phi^\vee, \varphi^\vee, n-s) = \gamma_\pi(q^{-s}) \cdot Z(\Phi, \varphi, s) \qquad (0 < \mathrm{Re}(s) < n)
$$

となる．■

以上をまとめると

定理 5.8.4.9 G の既約 supercuspidal 表現に対して定理 A と定理 B が成り立つ.

更に

定理 5.8.4.10 $L(\pi, T) = 1$.

[**証明**] 命題 5.8.4.1 で，$\chi_\pi|_{O_F^\times} \neq 1$ ならば $L(\chi_\pi, T) = 1$ だから $L(\pi, T) = 1$. $\chi_\pi|_{O_F^\times} = 1$ のとき

$$
L(\chi_\pi, T) = (1 - \chi_\pi(\varpi)T)^{-1}
$$

だから $\mu_n = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^n = 1\}$ として

$$
L(\chi_\pi, T^n) = \prod_{\zeta \in \mu_n} (1 - \chi_\pi(\varpi)^{1/n}\zeta T)^{-1}.
$$

よって命題 5.8.4.1 より

$$
\begin{aligned}
L(\pi, T) &= \prod_{\zeta \in A} (1 - \chi_\pi(\varpi)^{1/n}\zeta T)^{-1},\\
L(\pi^\vee, T) &= \prod_{\zeta \in B} (1 - \chi_\pi(\varpi)^{1/n}\zeta T)^{-1}
\end{aligned}
$$

なる部分集合 $A, B \subset \mu_n$ がとれる．ところで

$$\varepsilon(\pi,\tau,T) = \gamma_\pi(q^{-(n-1)/2}T) \cdot \frac{L(\pi,T)}{L(\pi^\vee,(qT)^{-1})}$$

で $\gamma_\pi(T) = cT^d, \varepsilon(\pi,\tau,T) = c'T^{d'}$ だから

$$\frac{L(\pi,T)}{L(\pi^\vee,(qT)^{-1})} = c''T^{d''}$$

となるが，これは $L(\pi,T) = L(\pi^\vee,T) = 1$ のときのみ可能．■

5.8.5 　連続群準同型写像 $\lambda : T \to \mathbb{C}^\times$ で $\lambda|_{T\cap K} = 1$ なるものをとり，付随する G のクラス-**1**-表現を (π_λ, E_λ) とする（5.6.1 節参照）．特に

$$\phi_\lambda(kb) = \Delta_B(b)^{1/2}\lambda(b)^{-1} \qquad (k \in K, b \in B)$$

とおいて

$$\omega_\lambda(g) = \langle \pi_\lambda(g)\phi_\lambda, \phi_{\lambda^{-1}} \rangle = \int_K \phi_\lambda(g^{-1}k) d_K(k)$$

とおけば $\omega_\lambda \in \mathcal{C}(\pi_\lambda)$ である．又

$$\lambda(t) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(t_i) \qquad (t = \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{bmatrix} \in T)$$

と書ける．ここで $\lambda_i : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ は $\lambda|_{O_F^\times} = 1$ なる連続群準同型写像である．

命題 5.8.5.1 $\Phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ を $M_n(O_F)$ の特性関数とすると

$$Z(\Phi, \omega_\lambda, q^{-(n-1)/2}T) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i(\varpi)T)^{-1}$$

である．

[**証明**] $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きな任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$
\begin{aligned}
Z(\Phi, \omega_\lambda, s) &= \int_G \Phi(g)\omega_\lambda(g)|\det g|_F^s d_G(g) \\
&= \int_G d_G(g) \int_K d_K(k)\Phi(g)\phi_\lambda(g^{-1}k)|\det g|_F^s \\
&= \int_G \Phi(g)\phi_\lambda(g^{-1})|\det g|_F^s d_G(g) \\
&= \int_B d_B(b) \int_K d_K(k)\Phi(bk)\phi_\lambda(k^{-1}b^{-1})|\det b|_F^s \\
&= \int_B \Phi(b)\Delta_B(b)^{-1/2}\lambda(b)|\det b|_F^s d_B(b).
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\Delta_B(b) = \prod_{i=1}^n |b_i|_F^{2i-(n+1)}, \quad d_B(b) = \prod_{i=1}^n |b_i|_F^{-(n-i)} d^\times b_i \times \prod_{1 \le i < j \le n} db_{ij}
$$

だから

$$
Z(\Phi, \omega_\lambda, s) = \prod_{i=1}^n \int_{O_F} \lambda_i(t)|t|_F^{s-(n-1)/2} d^\times t
$$

となる.

$$
\begin{aligned}
\int_{O_F} \lambda_i(t)|t|_F^{s-(n-1)/2} d^\times t &= \sum_{e \ge 0} \int_{\varpi^e O_F^\times} \lambda_i(t)|t|_F^{s-(n-1)/2} d^\times t \\
&= \sum_{e \ge 0} \lambda_i(\varpi^e) q^{-e(s-(n-1)/2)} \cdot \int_{O_F^\times} d^\times t \\
&= \left(1 - \lambda_i(\varpi) q^{-(s-(n-1)/2)}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

より求める等式を得る. ■

系 5.8.5.2

$$
\begin{aligned}
L(\pi_\lambda, T) &= \prod_{i=1}^n L(\lambda_i, T) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i(\varpi)T)^{-1}, \\
\varepsilon(\pi_\lambda, \tau, T) &= \lambda(\varpi \cdot 1_n) q^{nd/2} T^{nd}
\end{aligned}
$$

である ($d = \mathrm{Max}\{d \in \mathbb{Z} \mid \tau(\varpi^{-d}) = 1\}$).

[証明] $\Pi_\lambda = \mathrm{Ind}_B^G(\Delta_B^{-1/2} \cdot (\lambda \otimes \mathbf{1}_U)$ とおくと，π_λ は Π_λ の部分表現だから，5.8.3 節の結果から $L(\pi_\lambda, T) = P(q^{-(n-1)/2}T) \cdot L(\Pi_\lambda, T)$ なる多項式 $P(T) \in \mathbb{C}[T]$ がとれる．一方

$$L(\Pi_\lambda, T) = \prod_{i=1}^{n} L(\lambda_i, T)$$

だから，命題 5.8.5.1 より $P(T) = 1$ である．よって命題 5.8.3.1 より

$$\varepsilon(\pi_\lambda, \tau, T) = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon(\lambda_i, \tau, T)$$

で，定理 4.9.5 より $\varepsilon(\lambda_i, \tau, T) = q^{d/2}\lambda_i(\varpi)T^d$ である． ■

5.9 $GL_n(F)$ の既約 C^∞-表現の分類

この節では [2], [12] 及び [9] に従って $G_n = GL_n(F)$ の既約 C^∞- 表現の分類について結果のみ述べる．

5.9.1 n の分割 $\beta = (n_1, \cdots, n_r)$ $(r > 1)$ に対して G_β の Haar 測度を

$$d_{G_\beta}(g) = \prod_{i=1}^{r} d_{G_{n_i}}(g_i) \qquad \left(g = \begin{bmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_r \end{bmatrix} \in G_\beta\right)$$

により定め，U_β の Haar 測度を

$$d_{U_\beta}(u) = \prod_{1 \le i < j \le r} du_{ij}$$

により定める．ここで $u = (u_{ij})_{1 \le i < j \le r} \in U_\beta$ $(u_{ij} \in M_{n_i, n_j}(F))$ で du_{ij} は加法群 $M_{n_i,n_j}(F)$ の Haar 測度である．更に $P_\beta = G_\beta \ltimes U_\beta$ の左 Haar 測度を $d_{P_\beta}(gu) = d_{G_\beta}(g) \cdot d_{U_\beta}(u)$ のより定める．このとき $(g^{-1}ug)_{ij} = g_i^{-1}u_{ij}g_j$

より P_β のモジュラー関数は

$$\begin{aligned}\Delta_{P_\beta}(g) &= \prod_{1\le i<j\le r} |\det g_i^{-1}|_F^{n_j} |\det g_j|_F^{n_i} \\ &= \prod_{i=1}^{r} |\det g_i|_F^{n_1+\cdots+n_{i-1}-(n_{i+1}+\cdots+n_r)}\end{aligned}$$

となる．さて G_{n_i} の既約 supercuspidal 表現 σ_i ($n_i = 1$ の場合には $G_{n_i} = F^\times$ の任意の連続指標) をとると，$\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$ は G_β の既約 supercuspidal 表現となり，誘導表現

$$I(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) = \mathrm{Ind}_{P_\beta}^{G_n} \left(\Delta_{P_\beta}^{-1/2} \cdot (\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r \otimes \mathbf{1}_{U_\beta})\right)$$

は長さ有限の C^∞-G_n-加群となる（定理 5.5.5，命題 5.5.7）．

定理 5.9.1.1 n の分割

$$(n_1, \cdots, n_r), \qquad (m_1, \cdots, m_s)$$

及び G_{n_i}, G_{m_j} の既約 supercuspidal 表現 σ_i, τ_j に対して

$$\pi = I(\sigma_1, \cdots, \sigma_r), \qquad \rho = I(\tau_1, \cdots, \tau_s)$$

とおくと，次は同値である；

1) $\mathrm{JH}^0(\pi) = \mathrm{JH}^0(\rho)$,
2) $\mathrm{JH}(\pi) \cap \mathrm{JH}(\rho) \neq \emptyset$,
3) $\mathrm{Hom}_{G_n}(\pi, \rho) \neq 0$,
4) $r = s$ かつ $m_i = n_{w(i)}, \tau_i = \sigma_{w(i)}$ なる $w \in S_r$ がある．

上の定理から，G_n の既約 C^∞-加群 E に対して，$I(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ が E と同型な G_n-部分商をもつような n の分割 $(n_1, \cdots, n_r)$ 及び G_{n_1} の既約 supercuspidal 表現 σ_i は順序と同型を除いて一意的に定まる．そこで

$$\mathrm{supp}(E) = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$$

を E の **supercuspidal support** と呼ぶ.

定理 5.9.1.2 n の分割 $(n_1, \cdots, n_r)$ と G_{n_i} の既約 supercuspidal 表現 σ_i に対して，$I(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ が可約である必要十分条件は，$n_i = n_j$ かつ $\sigma_i = |\det|_F \cdot \sigma_j$ なる $i \neq j$ が存在することである．

5.9.2 G_n の既約 C^∞-表現 (π, V) に対して

1) π の中心指標 χ_π に対して $|\chi_\pi| = 1$ で，任意の $v \in V, \alpha \in V^\vee$ に対して

$$\int_{G_n/Z(G_n)} |\langle \pi(g)v, \alpha\rangle|^2 d_{G_n/Z(G_n)}(\dot{g}) < \infty$$

となるとき，(π, V) は**二乗可積分** であるという．

2) 連続指標 $\chi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ があって $\chi(\det) \otimes \pi$ が二乗可積分となるとき，(π, V) は**本質的に二乗可積分** であるという．

(π, V) が二乗可積分のとき，$0 \neq \alpha \in V^\vee$ を一つ固定すると，V 上の G_n-不変な正定値 Hermite 形式が

$$(u, v) = \int_{G_n/Z(G_n)} \langle \pi(g)u, \alpha\rangle \overline{\langle \pi(g)v, \alpha\rangle} d_{G_n/Z(G_n)}(\dot{g}) \qquad (u, v \in V)$$

により定義され，これにより V を完備化すれば G_n の二乗可積分な既約ユニタリ表現が得られる．

G_n の本質的に二乗可積分な既約表現は次のように特徴付けられる．まず $n = lm$ $(l > 1)$ として G_m の既約 supercuspidal 表現 σ をとって

$$\Delta = (\sigma, |\det|_F \otimes \sigma, |\det|_F^2 \otimes \sigma, \otimes, |\det|_F^{l-1} \otimes \sigma)$$

を長さ l の **segment** と呼ぶ．このとき

定理 5.9.2.1 segment Δ に対して誘導表現 $I(\Delta)$ は唯一の既約商をもつ．それを $Q(\Delta)$ と書く．

定理 5.9.2.2 1) G_n の segment Δ に対して $Q(\Delta)$ は本質的に二乗可積分である，

2) G_n の本質的に二乗可積分な既約 C^∞-表現 π に対して $\pi \simeq Q(\Delta)$ となる G_n の segment Δ が一意的に存在する．

3) G_n の segment

$$\Delta = (\sigma, |\det|_F \otimes \sigma, \cdots, |\det|_F^{l-1} \otimes \sigma)$$

に対して，$Q(\Delta)$ が二乗可積分となる必要十分条件は，l が奇数かつ σ の中心指標 χ_σ に対して $|\chi_\sigma(z)| = |z|_F^{-m(l-1)/2}$ $(\forall z \in F^\times)$ なることである．

5.9.3　二つの segment

$$\Delta = (\sigma, \cdots, |\det|_F^{l-1} \otimes \sigma), \qquad \Delta' = (\sigma', \cdots, |\det|_F^{l'-1} \otimes \sigma')$$

(σ, σ' は夫々 $G_m, G_{m'}$ の既約 supercuspidal 表現) に対して

1) $\Delta \not\subset \Delta', \Delta' \not\subset \Delta$ かつ $\Delta \cup \Delta'$ が G_n の segment となるとき（従って $m = m'$ が必要），Δ と Δ' は**リンクしている**という．
2) Δ と Δ' がリンクしていて，かつ $\sigma' = |\det|_F^r \otimes \sigma$ なる $r > 0$ があるとき，Δ は Δ' に**先行している**という．

定理 5.9.3.1 n の分割 $\beta = (n_1, \cdots, n_r)$ と G_{n_i} の segement Δ_i に対して，任意の $i < j$ に対して Δ_i は Δ_j に先行しないとする．

1) 誘導表現

$$I(Q(\Delta_1), \cdots, Q(\Delta_r)) = \mathrm{Ind}_{P_\beta}^{G_n} \left(\Delta_{P_\beta}^{-1/2} \cdot (Q(\Delta_1) \otimes \cdots Q(\Delta_r) \otimes \mathbf{1}_{U_\beta}) \right)$$

は唯一の既約商 $Q(\Delta_1, \cdots, \Delta_r)$ をもつ．

2) n の分割 $\beta' = (m_1, \cdots, m_s)$ と G_{m_i} の segment Δ'_j に対して，任意の $i < j$ に対して Δ'_i は Δ'_j に先行しないとする．このとき $Q(\Delta_1, \cdots, \Delta_r)$ と $Q(\Delta'_1, \cdots, \Delta'_s)$ が G_n-加群として同型となる必要十分条件は，$r = s$ かつ $\Delta'_i = \Delta_{w(i)}$ となる $w \in S_r$ が存在することである．

更に

定理 5.9.3.2 G_n の任意の既約 C^∞-表現 π に対して，n の分割 $(n_1, \cdots, n_r)$ と G_{n_i} の segment Δ_i があって，任意の $i < j$ に対して Δ_i は Δ_j に先行せず

$$\pi \simeq Q(\Delta_1, \cdots, \Delta_r)$$

となるものが存在する．

このような既約表現の分類を用いて，G_n の特殊なな既約表現を特徴付けることができる．まず

定理 5.9.3.3 G_n の既約 C^∞-表現 $\pi = Q(\Delta_1, \cdots, \Delta_r)$ が非退化である必要十分条件は，任意の Δ_i, Δ_j $(i \neq j)$ がリンクしないことである．このとき誘導表現 $I(Q(\Delta_1), \cdots, Q(\Delta_r))$ は既約で $\pi = I(Q(\Delta_1), \cdots, Q(\Delta_r))$ となる．

G_n の既約 C^∞-表現 (π, V) に対して

1) π の中心指標 χ_π に対して $|\chi_\pi| = 1$,
2) 任意の $\varepsilon > 0$ 及び任意の $v \in V, \alpha \in V^\vee$ に対して

$$\int_{G_n/Z(G_n)} |\langle \pi(g)v, \alpha \rangle|^{2+\varepsilon} d_{G_n/Z(G_n)}(\dot{g}) < \infty$$

となるとき，(π, V) は**緩増加** であるという．既約な緩増加表現は次のように特徴付けられる；

定理 5.9.3.4 G_n の既約 C^∞-表現 $\pi = Q(\Delta_1, \cdots, \Delta_r)$ が緩増加である必要十分条件は

1) π は非退化,
2) $Q(\Delta_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ は全て二乗可積分

なることである．

上の分類で，G_n の一次元表現は次のように得られる;連続指標 $\chi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して，$G_1 = F^\times$ の既約表現 $\sigma_i = |\cdot|_F^{-i+(n+1)/2} \cdot \chi$ をとると

$$\Delta_{B_n}(g) = \prod_{i=1}^n g_{ii}^{2i-1-n} \qquad (g \in B_n)$$

だから $\sigma_i^\vee = |\cdot|_F^{i-(n+1)/2} \cdot \chi^{-1}$ より

$$\Delta_{B_n}^{-1/2} \cdot (\sigma_1^\vee \otimes \cdots \otimes \sigma_n^\vee) \otimes \mathbf{1}_{U_n} = \chi^{-1} \otimes \cdots \otimes \chi^{-1} \otimes \mathbf{1}_{U_n} = \chi(\det)^{-1}$$

となる．よって $\psi_0(g) = \chi(\det g)$ $(g \in G_n)$ とおくと

$$\psi_0 \in \mathrm{Ind}_{B_n}^{G_n} \left(\Delta_{B_n}^{-1/2} \cdot (\sigma_1^\vee \otimes \cdots \sigma_n^\vee \otimes \mathbf{1}_{U_n}) \right)$$

となる．よって

$$\mathrm{Ind}_{B_n}^{G_n} \left(\Delta_{B_n}^{-1/2} \cdot (\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n \otimes \mathbf{1}_{U_n}) \right) \ni \varphi \mapsto \langle \varphi, \psi_0 \rangle \in \mathbb{C}$$

は全射複素線形写像で，任意の $g \in G_n$ に対して

$$\langle g \cdot \varphi, \psi_0 \rangle = \langle \varphi, g^{-1} \cdot \psi_0 \rangle = \chi(\det g)\langle \varphi, \psi_0 \rangle \qquad (\forall \varphi)$$

となるから，$Q(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = \chi(\det)$ となる．

付 録A　半単純加群と半単純環

以下，A は 可換とは限らない $1 \neq 0$ をもつ環とする．特に断らない限り，A-加群とは左 A-加群の意味である．

A.1　半単純加群

定義 A.1.1 A-加群 $M \neq 0$ は，A-部分加群が M と $\{0\}$ に限るとき，**単純 A-加群** と呼ばれる．A の左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ は，A-加群として単純であるとき，**単純左イデアル** と呼ばれる．

命題 A.1.2 単純 A-加群 M, N と A-加群準同型写像 $f : M \to N$ に対して，$f \neq 0$ ならば f は M から N の上への同型写像である．特に，単純 A-加群 M と単純左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ に対して $\mathfrak{a} \cdot M \neq 0$ ならば，$\mathfrak{a}$ と M は A-加群として同型である．

[**証明**] $f \neq 0$ だから $\operatorname{Ker} f \subsetneqq M$，よって $\operatorname{Ker} f = 0$．$f \neq 0$ だから $\operatorname{Im} f \neq 0$，よって $\operatorname{Im} f = N$ となる．単純 A-加群 M と単純左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ に対して $\mathfrak{a} \cdot M \neq 0$ とする．$\mathfrak{a} \cdot x \neq 0$ なる $x \in M$ が存在するから，$a \in \mathfrak{a}$ に対して $f(a) = ax$ とおくと，$f : \mathfrak{a} \to M$ は A-加群準同型写像で $f \neq 0$ である．よって命題の前半から f は $\mathfrak{a}$ から M の上への同型写像である．■

定義 A.1.3 A-加群 M は，任意の A-部分加群 $N \subset M$ に対して $M = N \oplus L$ なる A-部分加群 $L \subset M$ が存在するとき，**半単純** であるという．

　半単純 A-加群 M の A-部分加群 $N \subset M$ は半単純であり，商加群 M/N も半単純 A-加群である．

補題 A.1.4 半単純 A-加群 $M \neq 0$ は単純 A-部分加群 $N \subset M$ を含む.

[**証明**] $0 \neq x \in M$ をとって $f(a) = ax$ $(a \in A)$ とおくと，$\operatorname{Ker} f \subsetneqq A$ は左イデアルとなる．$\operatorname{Ker} f \subset \mathfrak{a} \subsetneqq A$ なる極大左イデアル $\mathfrak{a}$ をとると $f(\mathfrak{a}) \subsetneqq \operatorname{Im} f$ は極大 A-部分加群となる．$M = L \oplus f(\mathfrak{a})$ なる A-部分加群 $L \subset M$ をとれば，$\operatorname{Im} f = (L \cap \operatorname{Im} f) \oplus f(\mathfrak{a})$ となり，$L \cap \operatorname{Im} f \neq 0$ である．ここで $N = L \cap \operatorname{Im} f \subset M$ は単純 A-部分加群である．実際，A-部分加群 $P \subsetneqq N$ に対して，$N = P \oplus P'$ なる A-部分加群 $0 \neq P' \subset N$ がとれる．よって

$$\operatorname{Im} f = N \oplus f(\mathfrak{a}) = P \oplus (P' \oplus f(\mathfrak{a}))$$

となり，$f(\mathfrak{a})$ の極大性から $P = 0$ を得る．■

命題 A.1.5 A-加群 $M \neq 0$ に対して次は同値；

1) M は半単純 A-加群,
2) M の単純 A-部分加群の族 $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$,
3) M の単純 A-部分加群の族 $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) M の単純 A-部分加群の全体を Λ とすると，補題 A.1.4 より $\Lambda \neq \emptyset$ である．$L = \sum_{N \in \Lambda} N \subset M$ とおく．$L \subsetneqq M$ とるすると，M は半単純だから，$M = L \oplus L'$ なる A-部分加群 $0 \neq L' \subset M$ がある．再び補題 A.1.4 から L' は単純 A-加群 N を含む．すると $N \in \Lambda$ だから $N \subset L \cap L'$，よって $L \cap L' \neq 0$ となり矛盾する.

2) $\Rightarrow$ 3) 部分集合 $F \subset \Lambda$ で $\sum_{\lambda \in F} N_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in F} N_\lambda$ となるもの全体を $\mathcal{F}$ とすると，$\mathcal{F}$ は包含関係に関して帰納的半順序集合となるから，Zorn の補題から極大元 $\Gamma \in \mathcal{F}$ がある．ここで $\bigoplus_{\lambda \in \Gamma} N_\lambda \subsetneqq M$ とすると $N_{\lambda_0} \not\subset \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} N_\lambda$ なる $\lambda_0 \in \Lambda$ がある．このとき $N_{\lambda_0} \cap \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} N_\lambda = 0$ となるから

$$N_{\lambda_0} + \sum_{\lambda \in \Gamma} N_\lambda = N_{\lambda_0} \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} N_\lambda$$

となり，Γ の極大性に反する．

3) $\Rightarrow$ 1) A-部分加群 $N \subsetneqq M$ に対して，部分集合 $F \subset \Lambda$ で $N \cap \bigoplus_{\lambda \in F} N_\lambda = 0$ なるもの全体を $\mathcal{F}$ とおくと，$\mathcal{F}$ は包含関係に関して帰納的半順序集合となるから，Zorn の補題より極大元 $\Gamma \in \mathcal{F}$ がある．このとき Γ の極大性から $M = N \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} N_\lambda$ を得る．■

A-加群 M に対して，$D = \mathrm{End}_A(M)$ は 1 をもつ環となり，M は自然に D-加群となる．$a \in A$ に対して $f_a(x) = ax$ $(x \in M)$ とおくと $f_a \in \mathrm{End}_D(M)$ で

$$A \ni a \mapsto f_a \in \mathrm{End}_D(M)$$

は環準同型写像となる．このとき次の Jacobson-Chevalley **の稠密性定理**が基本的である；

定理 A.1.6 半単純 A-加群 M に対して $D = \mathrm{End}_A(M)$ とおく．

1) 任意の $f \in \mathrm{End}_D(M)$ と有限部分集合 $S \subset M$ に対して， 全ての $x \in S$ に対して $f(x) = ax$ となる $a \in A$ が存在する．
2) M が D-加群として有限生成ならば

$$A \ni a \mapsto f_a \in \mathrm{End}_D(M)$$

は全射である．

[**証明**] 1) まず $S = \{x\}$ は一個の元からなるとする．$M = N \oplus Ax$ なる A-部分加群 $N \subset M$ がある．この直和分解に関する M から Ax への射影を π とすると，$\pi \in \mathrm{End}_A(M) = D$ だから

$$f(x) = f(\pi x) = \pi \cdot f(x) \in Ax$$

となる．次に，一般に $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ とする．$N = \bigoplus^{n} M$ は半単純 A-加群で

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in N$$

とおく．$\Delta = \mathrm{End}_A(N)$ は自然に $M_n(D)$ と同一視されるから $g \in \mathrm{End}_\Delta(M)$ が

$$g \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(y_1) \\ \vdots \\ f(y_n) \end{bmatrix}$$

により定義される．上に示したとおり $g(x) = ax$ なる $a \in A$ がある．即ち $f(x_i) = ax_i\ (i = 1, \cdots, n)$ となる．

2)D-加群としての M の生成元を $\{x_1, \cdots, x_n\}$ とすると，定理の前半から $f(x_i) = ax_i\ (i = 1, \cdots, n)$ なる $a \in A$ がある．よって $f = f_a$ である．■

A.2 Jacobson 根基

A の全ての極大左イデアルの共通部分を $\mathfrak{J}(A)$ と書いて，A の **Jacobson 根基**と呼ぶ.

補題 A.2.1 M が半単純 A-加群ならば $\mathfrak{J}(A) \cdot M = 0$ である.

[**証明**] M は単純 A-加群の和だから， M は単純 A-加群であるとしてよい. 任意の $0 \neq x \in M$ に対して

$$f : A \ni a \mapsto ax \in M$$

は全射 A-加群準同型写像で，$\mathrm{Ker}\, f$ は A の極大左イデアルとなる．よって $\mathfrak{J}(A) \subset \mathrm{Ker}\, f$．即ち $\mathfrak{J}(A) \cdot x = 0$ となる．■

A の極大左イデアル $\mathfrak{m} \subset A$ に対して $A/\mathfrak{m}$ は単純 A-加群だから補題 A.2.1 より $\mathfrak{J}(A) \cdot A/\mathfrak{m} = 0$，即ち，$\mathfrak{J}(A) \cdot A \subset \mathfrak{m}$ となる．よって $\mathfrak{J}(A) \cdot A \subset \mathfrak{J}(A)$. よって A の Jacobson 根基 $\mathfrak{J}(A)$ は A の両側イデアルである.

命題 A.2.2 $\mathfrak{J}(A) + \mathfrak{a} = A$ なる左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ は $\mathfrak{a} = A$ に限る.

[**証明**] $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ とすると，$\mathfrak{a}$ を含む極大左イデアル $\mathfrak{m} subset A$ があるから，$\mathfrak{J}(A) + \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m} \subsetneqq A$ となる．■

命題 A.2.3 $a \in A$ に対して次は同値；

1) $a \in \mathfrak{J}(A)$,
2) $Aa + \mathfrak{a} = A$ なる左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ は $\mathfrak{a} = A$ に限る,
3) 任意の $x \in A$ に対して $A \cdot (1 - xa) = A$,
4) 任意の $x \in A$ に対して $1 - xa \in A^{\times}$.

ここで $A^{\times}$ は環 A の単数群，即ち $Aa = aA = A$ なる $a \in A$ の全体であり，乗法に関して群をなす.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ とすると $\mathfrak{a}$ を含む極大左イデアル $\mathfrak{m} \subset A$ があるから $Aa + \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m} \subsetneqq A$.

2) $\Rightarrow$ 3) 任意の $x \in A$ に対して $Axa \subset Aa$ で $Axa + A(1 - xa) = A$ となるから $A(1 - xa) = A$.

3) $\Rightarrow$ 4) 任意の $x \in A$ に対して，$x'(1 - xa) = 1$ なる $x' \in A$ がある．このとき $Ax' = A(1 + x'xa) = A$ だから $x' \in A^{\times}$．よって $1 - xa \in A^{\times}$.

4) $\Rightarrow$ 3) 明らか.

3) $\Rightarrow$ 2) $Aa + \mathfrak{a} = A$ なる左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ に対して $xa + y = 1$ なる $x \in A, y \in \mathfrak{a}$ がある．このとき $Ay = A(1 - xa) = A$ だから $\mathfrak{a} = A$.

2) $\Rightarrow$ 1) 任意の極大左イデアル $\mathfrak{m} \subsetneqq A$ に対して，$Aa + \mathfrak{m} \subsetneqq A$ だから $a \in \mathfrak{m}$．よって $a \in \mathfrak{J}(A)$. ■

次の命題を中山の補題と呼ぶ；

命題 A.2.4 有限生成 A-加群 M に対して $\mathfrak{J}(A)M = M$ ならば $M = 0$.

[**証明**] $\{x_1, \cdots, x_n\}$ を M の生成系とする．$x_1 \in M = \mathfrak{J}(A)M$ で $\mathfrak{J}(A) \subset A$ は両側イデアルだから

$$x_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \qquad (a_i \in \mathfrak{J}(A))$$

とできる．命題 A.2.3 より $1 - a_1 \in A^{\times}$ である．よって $n > 1$ とすると $\{x_2, \cdots, x_n\}$ が既に M を生成する．よって $n = 1$ とできるが，このとき $(1 - a_1)x_1 = 0$ だから $x_1 = 0$．よって $M = 0$. ■

後に用いるために次の命題を示しておく；

命題 A.2.5 左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ の元が全て巾零ならば $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{J}(A)$.

[**証明**] まず $x \in A$ が冪零であるとして $x^r = 0$ $(0 < r \in \mathbb{Z})$ とすると

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{r-1})(1 - x) = 1 - x^r = 1$$

だから $A \cdot (1 - x) = A$ である．よって $a \in \mathfrak{a}$ とすると，任意の $x \in A$ に対して $A(1 - xa) = A$ となり，命題 A.2.3 より $a \in \mathfrak{J}(A)$ となる．■

A.3　半単純環，単純環

定義 A.3.1 A が A-加群として半単純のとき，A を**半単純環** と呼ぶ．A の両側イデアルが A と $\{0\}$ に限るとき，A を**単純環** と呼ぶ.

命題 A.3.2 A が半単純環のとき，単純 A-加群 M と単純左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ に対して，$\mathfrak{a}$ と M が A-加群として同型なるための必要十分条件は $\mathfrak{a} \cdot M \neq 0$ なることである.

[**証明**] 十分なることは命題 A.1.2 で示した．逆に A-加群の同型写像 $f : \mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} M$ があったとする．$A = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ なる左イデアル $\mathfrak{b} \subset A$ がとれるから，直和分解 $A = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ に関する A から $\mathfrak{a}$ への射影を $\pi : A \to \mathfrak{a}$ として，$x = f \circ \pi(1) \in M$ とおく．任意の $a \in \mathfrak{a}$ に対して $f(a) = f \circ \pi(a) = ax$ となるから，$\mathfrak{a} \cdot M \neq 0$ である．■

A は半単純環であるとすると，任意の単純 A-加群 M に対して，M と A-加群として同型な単純左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ が存在する；実際，命題 A.1.5 から A は単純左イデアルの和 だから $\mathfrak{a} \cdot M \neq 0$ なる単純左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ が存在する．よって M と $\mathfrak{a}$ は A-加群として同型である.

A の単純左イデアルの A-加群としての同型類全体を $C(A)$ と書く．$c \in C(A)$ に対して

$$\langle c \rangle = \sum_{\mathfrak{a} \in c} \mathfrak{a} \subset A$$

とおく.

命題 A.3.3 A が半単純ならば

1) 任意の $c \in C(A)$ に対して $\langle c \rangle$ は A の両側イデアルである，
2) 相異なる $c, c' \in C(A)$ に対しては $\langle c \rangle \cdot \langle c' \rangle = 0$,
3) $C(A)$ は有限集合である．

[**証明**] $c \in C(A)$ とする．c に含まれない 単純左イデアル $\mathfrak{b} \subset A$ に対しては命題 A.1.2 より $\langle c \rangle \cdot \mathfrak{b} = 0$ となる．よって $c \neq c' \in C(A)$ に対して $\langle c \rangle \cdot \langle c' \rangle = 0$ である．又，$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in c$ として，$\mathfrak{a} \cdot b \neq 0$ なる $b \in \mathfrak{b}$ をとると $\mathfrak{a} \cdot b = \mathfrak{b}$ となるから，$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset \langle c \rangle$ である．よって

$$A = \sum_{\mathfrak{a} \subset A:\text{単純左イデアル}} \mathfrak{a}$$

より $\langle c \rangle \cdot A = \langle c \rangle \cdot \langle c \rangle \subset \langle c \rangle$．よって $\langle c \rangle$ は A の両側イデアルである．最後に $A = \sum_{c \in C(A)} \langle c \rangle$ だから

$$1 = e_1 + \cdots + e_r, \quad 0 \neq e_i \in \langle c_i \rangle, \quad c_i \in C(A)$$

として，$c_1, \cdots, c_r$ は互いに相異なるとする．任意の単純左イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ に対して

$$0 \neq \mathfrak{a} = e_1\mathfrak{a} + \cdots + e_r\mathfrak{a}$$

だから $e_i\mathfrak{a} \neq 0$ なる $e_i \in \langle c_i \rangle$ がある．よって $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} \neq 0$ なる $\mathfrak{b} \in c_i$ があり，よって $\mathfrak{a} \in c_i$ となる．よって $C(A) = \{c_1, \cdots, c_r\}$ である．■

命題 A.3.4 A は半単純環であるとする．A が単純環となる必要十分条件は $\sharp C(A) = 1$ なることである．

[**証明**] A は単純環であるとする．$c \in C(A)$ として，$\langle c \rangle \neq 0$ は A の両側イデアルだから $A = \langle c \rangle$ となる．よって任意の単純左イデアル $\mathfrak{b} \subset A$ に対して

$$\mathfrak{b} = A \cdot \mathfrak{b} = \sum_{\mathfrak{a} \in c} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$$

より $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \neq 0$ なる $\mathfrak{a} \in c$ がある．よって命題 A.1.2 より $\mathfrak{b} \in c$ となる．

逆に $\sharp C(A)=1$ とする．両側イデアル $0\neq\mathfrak{b}\subset A$ に対して $\mathfrak{b}_0\subset\mathfrak{b}$ なる単純左イデアル $\mathfrak{b}_0\subset A$ がある．一方任意の単純左イデアル $\mathfrak{a}\subset A$ に対して，$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}_0 a$ なる $a\in\mathfrak{a}$ がある．よって $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}a\subset\mathfrak{b}$．よって $\mathfrak{b}=A$ となる．■

A を半単純環としよう．命題 A.3.3 より $C(A)=\{c_1,\cdots,c_r\}$ は有限集合である．$A_i=\langle c_i\rangle$ とおくと

$$A=A_1\oplus\cdots\oplus A_r \tag{A.1}$$

となり，$1=e_1+\cdots+e_r$ $(e_i\in A_i)$ とおくと，$A_i=Ae_i$ は $e_i\in A_i$ を 1 とする単純半単純環である．実際，まず $A=\displaystyle\sum_{c\in C(A)}\langle c\rangle=A_1+\cdots+A_r$ であり，$i\neq j$ ならば $A_i\cdot A_j=0$ である．任意の $a\in A_i$ に対して

$$a=a1=ae_1+\cdots+ae_r=ae_i,$$

同様に $e_ia=a$ だから，A_i は e_i を 1 とする環である．一方 $a_1+\cdots+a_r=0$ $(a_i\in A_i)$ とすると，$a_i=e_ia_i=0$．よって $A=A_1\oplus\cdots\oplus A_r$ である．A_i の A_i-部分加群は A-部分加群だから A_i は半単純環である．更に，単純左イデアル $\mathfrak{a}\subset A_i$ をとると，$\mathfrak{a}$ は A の単純左イデアルで $e_i\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\neq 0$．よって $\mathfrak{a}\in c_i$．よって $\sharp C(A_i)=1$ となり命題 A.3.4 より A_i は単純環となる．

上で A の直和分解 (A.1) を A の**単純分解** と呼ぶ.

さて A を半単純環として

$$A=A_1\oplus\cdots\oplus A_r,\qquad 1=e_1+\cdots+e_r\quad(e_i\in A_i)$$

を A の単純分解とする．$\mathfrak{a}_i\subset A_i$ を単純左イデアルとすると，$\mathfrak{a}_i$ は A の単純左イデアルで

$$C(A)=\{[\mathfrak{a}_1],\cdots,[\mathfrak{a}_r]\}$$

である．このとき

命題 A.3.5 A-加群 M に対して，M は半単純 A-加群であり，$\mathfrak{a}_i$ と A-加群として同型な単純 A-部分加群 $N\subset M$ の全体を $\mathcal{S}_i$ とすると

$$e_iM=\sum_{N\in\mathcal{S}_i}N$$

となり，更に $M=e_1M\oplus\cdots\oplus e_rM$ である．

[**証明**] 適当な直和 $\bigoplus^{\Lambda} A$ から M への全射 A- 加群準同型写像があって，$\bigoplus^{\Lambda} A$ は半単純 A- 加群だから，M は半単純である．

$M_i = e_i M \subset M$ は A-部分加群だから半単純である．そこで $N \subset M_i$ を単純 A-部分加群としよう．適当な $x \in N$ をとれば或 $\mathfrak{a}_j$ に対して $N = \mathfrak{a}_j x$ となる．ここで $j \neq i$ とすると，$x = e_i y$ $(y \in M)$ と書けるから，任意の $a \in \mathfrak{a}_j \subset A_j$ に対して $ax = ae_i y = 0$．よって $N = 0$ となり矛盾する．よって $j = i$，即ち，$\mathfrak{a}_i \cdot N \neq 0$ だから N と $\mathfrak{a}_i$ は A-加群として同型である．逆に単純 A-部分加群 $N \subset M$ が A-加群として $\mathfrak{a}_i$ と同型ならば，$N = \mathfrak{a}_i x$ $(x \in N)$ となり，

$$N = \mathfrak{a}_i x \subset e_i A x \subset e_i M$$

となる．

上で述べたことから $M = e_1 M + \cdots + e_r M$ である．一方 $x_1 + \cdots + x_r = 0$ $(x_i \in e_i M)$ とすると，$e_i e_j = 0$ $(i \neq j)$ より $x_i = 1x_i = e_i x_i = 0$ となる．■

上の直和分解 $M = e_1 \oplus \cdots \oplus e_r M$ を M の等型分解と呼ぶ.

A.4 Noether 加群と Artin 加群

定義 A.4.1 A-加群 M に対して，

1) M の A-部分加群からなる任意の空でない族が包含関係に関して極大元をもつとき，M を Noether A-加群と呼ぶ,
2) M の A-部分加群からなる任意の空でない族が包含関係に関して極小元をもつとき，M を Artin A-加群と呼ぶ.

Noether A-加群は有限生成 A-加群である．A-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

に対して，M が Noether (Artin) A-加群である必要十分条件は，L, N が Noether (Artin) A-加群なることである．

命題 A.4.2 半単純 A-加群 M に対して次は同値である；

1) $M = Ax_1 \oplus \cdots \oplus Ax_r$ なる $0 \neq x_i \in M$ がある,
2) M は A 上有限生成,
3) M は Noether A-加群,
4) M は Artin A-加群.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) は明らか．3) $\Rightarrow$ 2) は既に述べた.

2) $\Rightarrow$ 1)3)4) 仮定から，単純 A-部分加群 $M_i \subset M$ をとって $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ とできる．$0 \neq x_i \in M_i$ をとれば $M = Ax_i$ となる．M_i は Noether かつ Artin A-加群だから M は Noether かつ Artin A-加群である.

4) $\Rightarrow$ 1) M は半単純 Artin A-加群だから，単純 A-部分加群 $M_i \subset M$ をとって $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ とできて，$M_i = Ax_i$ $(x_i \in M_i)$ となる．■

A.5　Noether 環と Artin 環

定義 A.5.1 A が Noether A-加群（Artin A-加群）のとき，A を Noether 環（Artin 環）と呼ぶ.

命題 A.5.2 A が Artin 環のとき，A-加群 M が半単純なるための必要十分条件は $\mathfrak{J}(A) \cdot M = 0$ なることである.

[**証明**] 必要であることは補題 A.2.1 で示したので，十分であることを示す．A は Artin 環だから $\Leftarrow$) $\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$ なる極大左イデアル $\mathfrak{m}_i \subset A$ がある．$A/\mathfrak{m}_i$ は単純 A-加群で

$$A/\mathfrak{J}(A) \ni \overline{a} \mapsto (\overline{a}, \cdots, \overline{a}) \in A/\mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{m}_r$$

は単射 A-加群準同型写像だから $A/\mathfrak{J}(A)$ は半単純環である．$\mathfrak{J}(A) \cdot M = 0$ とすると，M は自然に $A/\mathfrak{J}(A)$-加群となるから，半単純である（命題 A.3.5）.
■

定理 A.5.3 A が Artin 環になるための必要十分条件は

1) A は Noether 環,

2) $A/\mathfrak{J}(A)$ は半単純環，
3) $\mathfrak{J}(A)^r = 0$ なる $0 < r \in \mathbb{Z}$ がある

なることである．

[**証明**] A が Artin 環のとき，命題 A.5.2 より $A/\mathfrak{J}(A)$ は半単純である．又，$\mathfrak{J}(A)^r = 0$ なる $0 < r \in \mathbb{Z}$ がある；実際，$\mathfrak{J}(A) \supset \mathfrak{J}(A)^2 \supset \cdots$ だから，番号 $0 < r \in \mathbb{Z}$ があって $\mathfrak{J}(A)^r = \mathfrak{J}(A)^n$ $(n \geq r)$ となる．$\mathfrak{J}(A)^r \neq 0$ として，$\mathfrak{J}(A)^r \cdot \mathfrak{c} \neq 0$ なる左イデアル $\mathfrak{c} \subset A$ の全体を $\mathcal{F}$ とおくと，$A \in \mathcal{F}$ だから $\mathcal{F}$ は包含関係に関する極小元 $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$ をもつ．ここで $\mathfrak{J}(A)^r a \neq 0$ なる $a \in \mathfrak{a}$ をとると，左イデアル $\mathfrak{J}(A)a \subset A$ は $\mathfrak{J}(A)^r \cdot \mathfrak{J}(A)a = \mathfrak{J}(A)^r a \neq 0$ を満たすから，$\mathfrak{J}(A)a \in \mathcal{F}$ かつ $\mathfrak{J}(A)a \subset \mathfrak{a}$ となり，$\mathfrak{a}$ の極小性から $\mathfrak{J}(A)a = \mathfrak{a}$，よって $\mathfrak{a} = Aa$ となる．よって $\mathfrak{a}$ は有限生成 A-加群で $\mathfrak{J}(A)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ だから，中山の補題 A.2.4 より $\mathfrak{a} = 0$ となり矛盾する．そこで $A/\mathfrak{J}(A)$ は半単純環で $\mathfrak{J}(A)^r = 0$ なる $0 < \exists r \in \mathbb{Z}$ が存在すると仮定して，A が Artin 環であることと Noether 環であることは同値であることを示す．r に関する帰納法による．

i) $r = 1$ のとき，A は半単純環となるから，命題 A.4.2 より成り立つ．

ii) $r-1$ まで成り立つとして $r > 1$ のとき，$B = A/\mathfrak{J}(A)^{r-1}$ とおくと $\mathfrak{J}(B) = \mathfrak{J}(A)/\mathfrak{J}(A)^{r-1}$ だから，$\mathfrak{J}(B)^{r-1} = 0$，かつ $B/\mathfrak{J}(B)$ は $A/\mathfrak{J}(A)$ と同型だから半単純環となる．よって，帰納法の仮定から $B = A/\mathfrak{J}(A)^{r-1}$ が Artin 環であることと Noether 環であることは同値である．一方，$\mathfrak{J}(A)^{r-1}$ は自然に $A/\mathfrak{J}(A)$-加群となるから，$\mathfrak{J}(A)^{r-1}$ は半単純 A-加群である．よって命題 A.4.2 より $\mathfrak{J}(A)^{r-1}$ が Artin A-加群であることと $\mathfrak{J}(A)^{r-1}$ が Noether A-加群であることは同値である．よって A が Artin 環であることと Noether 環であることは同値となる．■

命題 A.5.4 A が半単純環になる必要十分条件は，A が Artin 環かつ $\mathfrak{J}(A) = 0$ なることである．

[**証明**] A が半単純環とする．A は有限生成 A-加群だから，命題 A.4.2 より A は Artin 環である．又，A は半単純 A-加群だから，命題 A.5.2 より $\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{J}(A) \cdot A = 0$ となる．逆は命題 A.5.2 よりよい．■

命題 A.5.5 環 A に対して次は同値である；

1) A は単純環かつ半単純環,
2) A は半単純環で，A の中心 $Z(A)$ は体,
3) A は単純環かつ Artin 環.

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) $0 \neq a \in Z(A)$ とすると，$0 \neq Aa \subset A$ は両側イデアルだから $Aa = A$．よって $ab = ba = 1$ なる $b \in A$ がある．任意の $x \in A$ に対して $a(xb - bx) = xab - abx = 0$，よって $b \in Z(A)$ である．

2) $\Rightarrow$ 3) 命題 A.5.4 より A は Artin 環である．$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ を A の単純分解として $1 = e_1 + \cdots + e_r$ $(e_i \in A_i)$ とおくと，$0 \neq e_i \in Z(A)$ である．ここで $r > 1$ とすると，$e_1 e_2 = 0$ となり，$Z(A)$ が体であることに反する．

3) $\Rightarrow$ 1) $\mathfrak{J}(A) \subsetneqq A$ は両側イデアルだから $\mathfrak{J}(A) = 0$．よって命題 A.5.4 より A は半単純環である．■

A.6　組成列

A-加群 M に対して，A-部分加群 $V \subset W \subset M$ をとって A-加群 W/V を M の A-**部分商**と呼ぶ．簡単な性質として

命題 A.6.1 単純 A-加群 E と A-加群の完全列

$$0 \to L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$$

に対して，M が E と同型な A-部分商をもつならば，L 又は N が E と同型な A-部分商をもつ．

[**証明**] A-部分加群 $W \subset M$ と全射 A-加群準同型写像 $f : W \to E$ がある．$f(\mathrm{Im}(\alpha) \cap W) \neq 0$ ならば $f \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \to E$ は全射となり，L が E と同型な A-部分商をもつ．$f(\mathrm{Im}(\alpha) \cap W) = 0$ ならば

$$\mathrm{Ker}(\beta) \cap W = \mathrm{Im}(\alpha) \cap W \subset \mathrm{Ker}(f)$$

となるから A-加群の全射準同型写像

$$(*) : W/\mathrm{Ker}(\beta)\cap W \ni \dot{x} \mapsto \dot{x} \in W/\mathrm{Ker}(f)$$

が定義され，これは A-加群の同型

$$W/\mathrm{Ker}(\beta)\cap W \tilde{\to} \beta(W) \subset N, \qquad W/\mathrm{Ker}(f) \tilde{\to} E$$

より A-加群の全射準同型写像 $(*) : \beta(W) \to E$ を与えるから，N が E と同型な A-部分商をもつ．■

A-加群 M の A-部分加群の列

$$(*) : M = M_0 \gneqq M_1 \gneqq \cdots \gneqq M_{r-1} \gneqq M_r = 0$$

で M_i/M_{i+1} が全て単純 A-加群のとき，$(*)$ を M の**組成列** と呼び，

$$\{M_0/M_1, \cdots, M_{r-1}/M_r\}$$

を組成列 $(*)$ の**組成因子**，r を**組成列** $(*)$ **の長さ** と呼ぶ．単純 A-加群 M_i/M_{i+1} の同型類を $[M_i/M_{i+1}]$ と書いて

$$\mathrm{JH}^0(M) = \{[M_0/M_1], [M_1/M_2], \cdots, [M_{r-1}/M_r]\}$$

とおき，$\mathrm{JH}^0(M)$ の相異なるもの全体を $\mathrm{JH}(M)$ と書く．命題 A.6.1 から次の系を得る；

系 A.6.2 組成列をもつ A-加群 M が単純 A-加群 E と同型な A-部分商をもつならば，E は M の組成因子の一員と同型である．

命題 A.6.3 A-加群 M に対して，M が組成列をもつ必要十分条件は M が Artin かつ Noether A-加群なることである．

[**証明**] M が組成列

$$M = M_0 \gneqq M_1 \gneqq \cdots \gneqq M_{r-1} \gneqq M_r = 0$$

をもつとする．M_i/M_{i+1} は単純 A-加群だから Artin かつ Noether A- 加群である．よって M_{i+1} が Artin かつ Noether A-加群ならば M_i も Artin か

つ Noether A-加群となる．$M_r = 0$ は Artin かつ Noether A-加群だから，$M = M_0$ は Artin かつ Noether A-加群である．逆に M が Noether A-加群とすると，M の A-部分加群の列

$$M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots$$

で M_i/M_{i+1} は全て単純 A-加群になるものがとれる．更に，M が Artin A-加群とすると，$M_r = 0$ なる番号 r がある．■

A-加群 M が組成列をもつとき，組成列の長さは一定であり，組成因子は順序と同型を除くと一意的である（Jordan-Hölder の定理 [11, 定理 7.42]）．そこで A-加群 M に対して，

$$l_A(M) = \begin{cases} M \text{ の組成列の長さ} & : M \text{ が組成列をもつとき} \\ \infty & : M \text{ が組成列をもたないとき} \end{cases}$$

とおき，$l_A(M)$ を A-加群 M の長さと呼ぶ.

基本的なことは次の二つの定理（Artin-Weddeburn の定理）である；

定理 A.6.4 A は単純環かつ半単純環とする．単純 A-加群 M に対して $D = \mathrm{End}_A(M)$ は斜体で（命題 A.1.2），M は自然に D-加群となる．このとき

1) $\dim_D M = l_A(A) < \infty$,
2) $a \in A$ に対して $f_a(x) = ax$ $(x \in M)$ とおくと，$a \mapsto f_a$ は A から $\mathrm{End}_D(M)$ の上への環同型写像である.

[**証明**] まず $\dim_D M < \infty$ である．実際，部分集合 $S \subset M$ に対して $\mathfrak{a}(S) = \{a \in A \mid aS = 0\}$ は A に左イデアルとなる．命題 A.5.4 より A は Artin 環だから

$$\mathcal{F} = \{\mathfrak{a}(S) \mid S \subset M : \text{有限部分集合}\} \neq \emptyset$$

は極小元 $\mathfrak{a}(S_0) \in \mathcal{F}$ をもつ．$S_0 \subset M$ で生成された D-部分加群を $N \subset M$ とする．$N \subsetneqq M$ として $x_0 \in M$ は N に含まれないとすると，$f|_N = 0$, $f(x_0) \neq 0$ なる $f \in \mathrm{End}_D(M)$ がある．Jacobson-Chevalley の稠密性定理（定理 A.1.6）より任意の $x \in S_1 = \{x_0\} \cup S_0$ に対して $f(x) = ax$ なる $a \in A$

がある．このとき $a \in \mathfrak{a}(S_0)$ かつ $a \notin \mathfrak{a}(S_1)$ だから $\mathfrak{a}(S_1) \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{a}(S_1) \subsetneqq \mathfrak{a}(S_0)$ となり $\mathfrak{a}(S_0)$ の極小性に反する．よって $M = N$ となり $\dim_D M < \infty$ である．よって再び定理 A.1.6 と A が単純環であることから，$a \mapsto f_a$ は A から $\mathrm{End}_D(M)$ への環の同型写像である．そこで M の D-基底を $\{x_1, \cdots, x_n\}$ とすると，$a \mapsto (ax_1, \cdots, ax_n)$ は A から直和 M^n の上への A-加群同型を与える．よって $l_A(A) = n = \dim_D M$ となる．■

定理 A.6.5 D を斜体として，有限次元 D-加群 $M \neq 0$ をとる．このとき

1) $A = \mathrm{End}_D(M)$ は単純環かつ半単純環で $l_A(A) = \dim_D M < \infty$,
2) M は単純 A-加群,
3) $a \in D$ に対して $f_a(x) = ax$ $(x \in M)$ とおくと，$a \mapsto f_a$ は D から $\mathrm{End}_A(M)$ の上への環同型写像である．

[**証明**] $0 \neq x \in M$ とすると

$$Ax = \{\alpha(x) \mid \alpha \in \mathrm{End}_D(M)\} = M$$

となるから，M は単純 A-加群である．ここで M の D-基底 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ に対して，$a \mapsto (ax_1, \cdots, ax_n)$ は A から直和 M^n の上への A-加群同型を与える．よって A は半単純で $l_A(A) = n = \dim_D M$ となる．更に，

$$Z(A) = Z(\mathrm{End}_D(M)) = Z(M_n(D)) = Z(D)$$

は体だから，命題 A.5.4 より A は単純環である．3) は定理 A.1.6 よりよい．
■

A.7 加群の指標

以下，K は標数 0 の体として，A は有限次元 K-代数（1 をもつ）とする．有限生成 A-加群 M をとったとき，$a \in A$ に対して $f_a(x) = ax$ $(x \in M)$ とおくと $f_a \in \mathrm{End}_K(M)$ だから，f_a の K 上の跡を $\chi_M(a) = \mathrm{tr}\, f_a \in K$ と書き，χ_M を M の**指標**と呼ぶ．

補題 A.7.1 有限生成半単純 A-加群 M に対して $D = \mathrm{End}_A(M)$ とおくと

$$\mathrm{End}_D(M) = \{f_a \in \mathrm{End}_K(M) \mid a \in A\}$$

であって，$\mathrm{End}_D(M)$ は半単純 K-代数である．

[**証明**] $\dim_K M < \infty$ より M は有限生成 D-加群だから，Jacobson-Chevalley の稠密性定理（定理 A.1.6）を用いれば，補題の前半は明らかである．後半を示すために，まず $\dim_K \mathrm{End}_D(M) < \infty$ だから $\mathrm{End}_D(M)$ は Artin 環である．よって定理 A.5.3 より $\mathfrak{J}(\mathrm{End}_D(M))^r = 0$ なる $0 < r \in \mathbb{Z}$ がある．$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ なる単純 A-部分加群 $M_i \subset M$ をとって，$D_i = \mathrm{End}_A(M_i)$ とおく．補題の前半から M_i は M の $\mathrm{End}_D(M)$-部分加群で，$f \mapsto f|_{M_i}$ は $\mathrm{End}_D(M)$ から $\mathrm{End}_{D_i}(M_i)$ の上への環準同型写像となる．よって命題 A.2.5 から $f \in \mathfrak{J}(\mathrm{End}_D(M))$ ならば $f|_{M_i} \in \mathrm{End}_{D_i}(M_i))$ となる．ところが定理 A.6.5 より $\mathrm{End}_{D_i}(M_i)$ は半単純環だから，命題 A.5.4 より $\mathfrak{J}(\mathrm{End}_{D_i}(M_i)) = 0$. よって $\mathfrak{J}(\mathrm{End}_D(M)) = 0$ となる．よって命題 A.5.4 より $\mathrm{End}_D(M)$ は半単純環である．■

定理 A.7.2 互いに同型でない単純 A-加群 $M_1, \cdots, M_r$ に対して，$\chi_{M_1}, \cdots, \chi_{M_r}$ は K 上一次独立である．

[**証明**] $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ は有限生成半単純 A-加群だから，補題 A.7.1 より，$D = \mathrm{End}_A(M)$ とおくと，$\mathrm{End}_D(M)$ は半単純 K-代数で，$M_i \subset M$ は単純 $\mathrm{End}_D(M)$-加群であって互いに同型でない．よって A は半単純であると仮定して証明すればよい．すると $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ を A の単純分解として $1 = e_1 + \cdots + e_r$ $(e_i \in A_i)$ とおき，$\mathfrak{a}_i \subset A_i$ なる単純左イデアル $\mathfrak{a}_i \subset A$ をとって $M_i = \mathfrak{a}_i$ であるとしてよい．$A_i \cdot A_j = 0$ $(i \neq j)$ だから

$$\chi_{\mathfrak{a}_i}(e_j) = \begin{cases} \dim_K \mathfrak{a}_i & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

である．よって $\chi = \lambda_1 \chi_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + \lambda_r \chi_{\mathfrak{a}_r} = 0$ $(\lambda_i \in K)$ とすると

$$0 = \chi(e_i) = \lambda_i \dim_K \mathfrak{a}_i$$

から $\lambda_i = 0$ を得る．■

定理 A.7.3 有限生成半単純 A-加群 M, N に対して，M と N が A-加群として同型である必要十分条件は $\chi_M = \chi_N$ なることである．

[**証明**] 十分性のみが問題である．互いに同型でない単純 A-加群 $M_1, \cdots, M_r$ を用いて

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} {M_i}^{m_i}, \quad N \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} {M_i}^{n_i}$$

$(0 \leq m_i, n_i \in \mathbb{Z})$ なる A-加群同型がある．このとき

$$\chi_M = m_1\chi_{M_1} + \cdots + m_r\chi_{M_r}, \quad \chi_N = n_1\chi_{M_1} + \cdots + n_r\chi_{M_r}$$

だから，$\chi_M = \chi_N$ とすると定理 A.7.2 より $m_i = n_i$，よって M と N は A-加群として同型である．■

応用上の便利のために上の定理 A.7.3 をもう少し一般化しておく．$\mathcal{A}$ を可換とも 1 を持つとも有限次元とも限らない K-代数とする（K は標数 0 の体）．$\mathcal{A}$-加群の単純性や半単純性は，定義 A.1.1 や定義 A.1.3 と同様に定義される．$\mathcal{A}$-加群 M と $a \in \mathcal{A}$ に対して $f_a \in \mathrm{End}_K(M)$ を $f_a(x) = ax$ $(x \in M)$ により定義する．更に $\dim_K M < \infty$ のとき，$\mathcal{A}$-加群 M の指標 χ_M を $\chi_M(a) = \mathrm{tr}(f_a) \in K$ $(a \in \mathcal{A})$ により定義する．このとき

系 A.7.4 K 上有限次元なる半単純 $\mathcal{A}$-加群 M, N に対して，M と N が $\mathcal{A}$-加群として同型なるための必要十分条件は $\chi_M = \chi_N$ かつ $\dim_K M = \dim_K N$ なることである．

[**証明**] 必要であることは明らかだから，十分条件であることを示す．$L = M \oplus N$ として，$\{f_a \in \mathrm{End}_K(L) \mid a \in \mathcal{A}\}$ と $1 \in \mathrm{End}_K(L)$ で生成された $\mathrm{End}_K(L)$ の K-部分代数を A とすると，A は有限次元 K-代数で，L は半単純 A-加群となる．そこで A-加群 M の指標を χ^M と書くと

$$\chi^M(f_a) = \chi_M(a) \quad (a \in \mathcal{A}), \qquad \chi^M(1) = \dim_K M$$

である．よって $\chi_M = \chi_N$ かつ $\dim_K M = \dim_K N$ ならば $\chi^M = \chi^N$ となり，定理 A.7.3 より M と N は A-加群として同型，従って $\mathcal{A}$-加群として同型となる．■

A.8　K-代数の Jacobson 根基

以下，A:K-algebra (K:field) とする．$a \in A$ に対して

$$(*) : K[X] \ni f(X) \mapsto f(a) \in A : K\text{-algebra hom.}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(*) &= K[a] \\ &= \{\lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \cdots + \lambda_n a^n \mid \lambda_i \in K\} \subset A : K\text{-subalgebra} \\ \mathrm{Ker}(*) &= (\varphi_a(X)) \text{ with } \varphi_a(X) \in K[X]\text{:monic}\end{aligned}$$

である．$\varphi_a(X)$ を K 上の a の最小多項式と呼ぶ.

$$a\text{:algebraic over } K \ \Leftrightarrow\ \varphi_a(X) \neq 0.$$

このとき

$$\begin{aligned}&\dim_K K[a] = \deg \varphi_a(X), \\ &\{1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\} : K\text{-basis of } K[a]\ (n = \deg \varphi_a(X)).\end{aligned}$$

又

$$K[a]^\times = \{f(a) \mid f(X) \in K[X] \text{ s.t. } (f(X), \varphi_a(X)) = 1\} = K[a] \cap A^\times$$

実際，$f(X) \in K[X]$ に対して $f(a) \in A^\times$ として，$c \in A$ s.t. $f(a)c = cf(a) = 1$ とする.

$$(f(X), \varphi_a(X)) = d(X), \quad \varphi_a(X) = d(X)h(X)\ (h(X) \in K[X])$$

とすると

$$f(a)h(a) = 0 \quad \therefore 0 = cf(a)h(a) = h(a) \quad \therefore \varphi_a(X) | h(X).$$

よって $\deg d(X) = 0$.

更に，$\lambda \in K$ に対して

$$a - \lambda \in A^\times \ \Leftrightarrow\ \varphi_a(\lambda) \neq 0$$

実際

$$\begin{aligned} a-\lambda \notin A^{\times} &\Leftrightarrow (X-\lambda, \varphi_a(X)) \neq 1 \\ &\Leftrightarrow X-\lambda | \varphi_a(X) \quad \therefore \varphi_a(\lambda)=0. \end{aligned}$$

命題 A.8.1

$$\begin{aligned} &a \in A,\ \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\} \subset K : \text{distinct s.t. } a-\lambda_i \in A^{\times} \\ &\{(a-\lambda_i)^{-1}\_i = 1, \cdots, r : \text{linearly dep. over } K \\ \Rightarrow &a\text{:algebraic over } K \text{ s.t. } \deg \varphi_a(X) < r. \end{aligned}$$

[**証明**] まず

$$c_i \in K \,\text{s.t.} \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot (a-\lambda_i)^{-1} = 0, \quad (c_1, \cdots, c_r) \neq (0, \cdots, 0)$$

とすると

$$f(X) = \sum_{i=1}^{r} c_c (X-\lambda_i)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i \prod_{j \neq i} (X-\lambda_j) \in K[X]$$

で，$c_1 \neq 0$ とすると $f(\lambda_1) = c_1 \cdot \prod_{j \neq 1} (\lambda_1 - \lambda_j) \neq 0$ より，$f(X) \neq 0$．更に

$$f(a) \cdot \prod_{i=1}^{r} (a-\lambda_i)^{-1} = \sum_{i=1}^{r} c_i (a-\lambda_i)^{-1} = 0 \quad \therefore f(a) = 0.$$

よって a:algebraic over K で $\deg \varphi_a(X) \leq \deg f(X) < r$. ■

命題 A.8.2 $a \in \mathfrak{h}(A)$:algebraic over $K \Rightarrow a^r = 0$ for some $0 < r \in \mathbb{Z}$.

[**証明**] まず

$$\begin{aligned} &K[a] \supset a \cdot K[a] \supset a^2 \cdot K[a] \supset \cdots, \quad \dim_K K[a] = \deg \varphi_a(X) < \infty \\ &\therefore 0 < \exists m \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } a^m \cdot K[a] = a^{m+1} \cdot K[a] \\ &\therefore \exists b \in K[a] \text{ s.t. } a^m = a^{m+1} b \\ &\therefore a^m(1-am) = 0,\ 1-ba \in A^{\times}\ (\because a \in \mathfrak{h}(A)) \quad a^m = 0 \end{aligned}$$

■

定理 A.8.3 $\sharp K^\times > \dim_K A$ ならば

$$\mathfrak{h}(A) \subset \{a \in A \mid a^r = 0 \text{ for some } 0 < r \in \mathbb{Z}\}.$$

[**証明**] $a \in \mathfrak{h}(A)$ とすると

$$1 - \lambda a \in A^\times \text{ for } \forall\lambda \in K^\times \quad \therefore a - \lambda \in A^\times \text{ for } \forall\lambda \in K^\times$$

よって a:not algebraoc over K とすると命題 A.8.1 より

$$\{(a-\lambda)^{-1}\}_{\lambda^i{}_n K^\times} \text{ :linerarly indep. over } K \quad \therefore \dim_K A \geq \sharp K^\times\text{:矛盾}.$$

よって命題 A.8.2 より上の通り. ■

付 録B　ルート・データ

定義 B.1 $(X, \Phi; X^\vee, \Phi^\vee)$ が条件

1) $X, X^\vee$ は有限階数の自由 $\mathbb{Z}$-加群であり，$\Phi \subset X$, $\Phi^\vee \subset X^\vee$ は有限部分集合，
2) 双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$ があって，$x \mapsto \langle x, * \rangle$, $u \mapsto \langle *, u \rangle$ は $\mathbb{Z}$-加群の同型

$$X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^\vee, \mathbb{Z}), \qquad X^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z})$$

を与える，
3) Φ から $\check{\Phi}$ への全単射 $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ があって，任意の $\alpha \in \Phi$ に対して $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$,
4) $\alpha \in \Phi$ に対して $s_\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(X)$, $s_{\alpha^\vee} \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(X^\vee)$ を

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha, \qquad s_{\alpha^\vee}(u) = u - \langle \alpha, u \rangle \alpha^\vee$$

により定義すると，$s_\alpha(\Phi) = \Phi$, $s_{\alpha^\vee}(\Phi^\vee) = \Phi^\vee$

を満たすとき，これを**ルート・データ**と呼ぶ.

$\mathbb{Z}$-線形写像 $p : X \to X^\vee$ を

$$p(x) = \sum_{\alpha \in \Phi} \langle x, \alpha^\vee \rangle \cdot \alpha^\vee$$

により定義すると

$$\langle x, p(x) \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi} \langle x, \alpha^\vee \rangle^2 \qquad (x \in X)$$

だから

$$X_0 = \operatorname{Ker} p = \{x \in X \mid \langle x, \Phi^\vee \rangle = 0\}$$

とおく．任意の $\alpha \in \Phi$ に対して，$\langle s_\alpha(x), u \rangle = \langle x, s_{\alpha^\vee}(u) \rangle$ と $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ に注意すれば，任意の $\beta \in \Phi$ に対して

$$\langle \alpha, s_{\alpha^\vee}\beta^\vee \rangle \cdot s_{\alpha^\vee}\beta^\vee = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle^2 \alpha^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \beta^\vee$$

となり，両辺を $\beta \in \Phi$ 上足し上げれば，$s_{\alpha^\vee}\Phi^\vee = \Phi^\vee$ より

$$p(\alpha) = \frac{1}{2}\langle \alpha, p(\alpha) \rangle \cdot \alpha^\vee \qquad (\alpha \in \Phi)$$

を得る．$\langle \alpha, p(\alpha) \rangle \geq \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ だから

$$V_{\mathbb{Q}} = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}, \qquad V_{\mathbb{Q}}^\vee = \langle \Phi^\vee \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$$

とおくと，$x \mapsto p(x)$ は全射 $\mathbb{Q}$-線形写像 $V_{\mathbb{Q}} \to V_{\mathbb{Q}}^\vee$ を与える．よって $\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} \geq \dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}^\vee$ であるが，$(X^\vee, \Phi^\vee; X, \Phi)$ もルート・データとなるから，$\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}^\vee$ となり，$x \mapsto p(x)$ は $\mathbb{Q}$-線形同型写像 $V_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{Q}}^\vee$ を与える．よって

$$\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{Q}} \left((X \otimes \mathbb{Q})/(X_0 \otimes \mathbb{Q}) \right), \qquad V \cap (X_0 \otimes \mathbb{Q}) = \{0\}$$

より $X \otimes \mathbb{Q} = V_{\mathbb{Q}} \oplus (X_0 \otimes \mathbb{Q})$ となる．特に

$$\langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}} \cap X_0 = \{0\}, \qquad (X : X_0 \oplus \langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}}) < \infty$$

である．

$$V = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}, \qquad V^\vee = \langle \Phi^\vee \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$$

とおく．$u \mapsto \langle *, u \rangle$ により $V^\vee$ と V の双対空間 V^* を同一視すると，(V, Φ) は根系となる．これをルート・データ $(X, \Phi; X^\vee, \Phi^\vee)$ に付随した根系と呼ぶ．

ルート・データは複素数体上の簡約可能な線形代数群から自然に生ずる．G を $\mathbb{C}$ 上定義された簡約可能な連結線形代数群として，T をその極大輪環群とする．$X(T)$（或いは $X^\vee(T)$）を T から乗法群 $\mathbb{G}_m$（或いは乗法群 $\mathbb{G}_m$ から T）への代数群としての群準同型写像全体の成す可換群とする（群演算は加法的に書く）．$\alpha \in X(T), u \in X^{\text{`}}\vee(T)$ に対して $\alpha(u(t)) = t^{\langle \alpha, u \rangle}$ $(t \in \mathbb{G}_m)$ なる $\langle \alpha, u \rangle \in \mathbb{Z}$ が定まり，$\alpha \mapsto \langle \alpha, * \rangle, u \mapsto \langle *, u \rangle$ はそれぞれ，$X(T), X^\vee(T)$

から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^\vee(T),\mathbb{Z})$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T),\mathbb{Z})$ への同型写像を与える．G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ への T の随伴表現 Ad に対する同時固有ベクトルから生ずる $X(T)$ の元全体を Φ とする．任意の $\alpha\in\Phi$ に対して $\mathrm{Ker}\,\alpha$ の代数的連結成分を T_α とすると，$T=T_\alpha\cdot\mathrm{Im}\,\alpha^\vee$ かつ $\langle\alpha,\alpha^\vee\rangle=2$ なる $\alpha^\vee\in\Phi^\vee$ が一意的にさだまり，その全体を $\Phi^\vee$ とすると，$(X(T),\Phi;X^\vee(T),\Phi^\vee)$ はルート・データとなる．これを G の T に関するルート・データと呼ぶ．以下，具体的な例を幾つか示す；

例 B.2 $G=GL_n(\mathbb{C})$ の場合．G に含まれる対角行列全体 T が G の極大輪環群となる．$l=(l_1,\cdots,l_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対して $\alpha_l\in X(T)$ を

$$\alpha_l(a)=\prod_{i=1}^n a_i^{l_i}\qquad \left(a=\begin{bmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{bmatrix}\in T\right)$$

により定義すると，$l\mapsto\alpha_l$ が同型 $\mathbb{Z}^n\xrightarrow{\sim}X(T)$ を与える．一方，$m=(m_1,\cdots,m_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対して $u_m\in X^\vee(T)$ を

$$u_m(t)=t^m=\begin{bmatrix}t^{m_1}&&\\&\ddots&\\&&t^{m_n}\end{bmatrix}\qquad (t\in\mathbb{C}^\times)$$

により定義すると，$m\mapsto u_m$ が同型 $\mathbb{Z}^n\xrightarrow{\sim}X^\vee(T)$ を与える．特に

$$\langle\alpha_l,u_m\rangle=\sum_{i=1}^n l_im_i\qquad (l,m\in\mathbb{Z}^n)$$

である．G の Lie 環 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ への随伴表現 $\mathrm{Ad}(a)X=aXa^{-1}$ を直接計算して

$$\Phi=\{(\alpha_i\alpha_j^{-1})^{\pm1}\mid 1\le i<j\le n\}$$

を得る．ここで $\{e_1,\cdots,e_n\}$ を $\mathbb{Z}^n$ の標準的な $\mathbb{Z}$-基底として，$\alpha_i=\alpha_{e_i}$ とおく．よって $GL_n(\mathbb{C})$ のルート・データは

$$(\mathbb{Z}^n,\{\pm(e_i-e_j)\mid 1\le i<j\le n\};\mathbb{Z}^n,\{\pm(e_i-e_j)\mid 1\le i<j\le n\})$$

($\langle l, m\rangle = \sum_{i=1}^{n} l_i m_i$) と同型である．$x \in X(T) = \mathbb{Z}^n$ に対して

$$p(x) = \sum_{\alpha\in\Phi} \langle x, \alpha^\vee\rangle \alpha^\vee = 2\sum_{i=1}^{n}\left(nx_i - \sum_{j=1}^{n} x_j\right) e_i$$

となり，$\operatorname{Ker} p = \mathbb{Z}(1, \cdots, 1)$ である．

例 B.3 $G = SL_n(\mathbb{C})$ の場合．G に含まれる対角行列の全体 T が G の極大輪環群である．$l \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\alpha_l \in X(T)$ を，$GL_n(\mathbb{C})$ の場合と同様に

$$\alpha(a) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{l_i} \qquad \left(a = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \in T\right)$$

により定義すると

$$\dot{l} = l \pmod{\mathbb{Z}(1, \cdots, 1)} \mapsto \alpha_l$$

が同型 $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, \cdots, 1) \xrightarrow{\sim} X(T)$ を与える．一方

$$(\mathbb{Z}^n)_{\mathrm{tr}=0} = \left\{ x \in \mathbb{Z}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

とけば，$m \in (\mathbb{Z}^n)_{\mathrm{tr}=0}$ に対して $u_m \in X^\vee(T)$ が

$$u_m(t) = \begin{bmatrix} t^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{m_n} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{C}^\times)$$

により定義され，$m \mapsto u_m$ が同型 $(\mathbb{Z}^n)_{\mathrm{tr}=0} \xrightarrow{\sim} X^\vee(T)$ を与える．特に

$$\langle \alpha_l, u_m\rangle = \sum_{i=1}^{n} l_i m_i$$

である．$SL_n(\mathbb{C})$ の Lie 環

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$$

への随伴表現 $\mathrm{Ad}(a)X = aXa^{-1}$ を直接計算して

$$\Phi = \left\{(\alpha_i\alpha_j^{-1})^{\pm 1} \,\middle|\, 1 \le i < j \le n\right\}$$

を得る ($\alpha_i = \alpha_{e_i}$). よって $SL_n(\mathbb{C})$ のルート・データは

$$(\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1,\cdots,1), \{\pm(\dot{e}_i - \dot{e}_j) \mid 1 \le i < j \le n\}; \\ (\mathbb{Z}^n)_{\mathrm{tr}=0}, \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \le i < j \le n\})$$

($\langle \dot{l}, m\rangle = \sum_{i=1}^{n} l_i m_i$) と同型である.

例 B.4 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix}$ とおいて

$$G = Sp(n,\mathbb{C}) = \{g \in GL_{2n}(\mathbb{C}) \mid gJ_n\,{}^t g = J_n\}$$

の場合. G に含まれる対角行列の全体

$$T = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix} \,\middle|\, a = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{bmatrix}\right\}$$

が G の極大輪環群となる. $l \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\alpha_l \in X(T)$ を

$$\alpha_l \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{l_i}$$

により定義すると, $l \mapsto \alpha_l$ が同型 $\mathbb{Z}^n \tilde{\to} X(T)$ を与える. $m \in \mathbb{Z}^n$ に対して $u_m \in X^\vee(T)$ を

$$u_m(t) = \begin{bmatrix} t^m & 0 \\ 0 & t^{-m}\end{bmatrix} \qquad \left(t^m = \begin{bmatrix} t^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{m_n}\end{bmatrix}, t \in \mathbb{C}^\times\right)$$

により定義すると, $m \mapsto u_m$ が同型 $\mathbb{Z}^n \tilde{\to} X^\vee(T)$ を与える. 特に $\langle \alpha_l, u_m\rangle = \sum_{i=1}^{n} l_i m_i$ である. G の Lie 環

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid XJ_n + J_n\,{}^t X = 0\}$$

に対する随伴表現 $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ を直接計算して

$$\Phi = \{(\alpha_i\alpha_j^{-1})^{\pm 1}, (\alpha_i\alpha_j)^{\pm 1}, \alpha_k^{\pm 2} \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n\}$$

となる．よって $Sp(n, \mathbb{C})$ のルート・データは

$$\left(\mathbb{Z}^n, \left\{\pm(e_i \pm e_j), \pm 2e_k \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq k \leq n \end{matrix}\right\}; \right.$$
$$\left. \mathbb{Z}^n, \left\{\pm(e_i \pm e_j), \pm e_k \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq k \leq n \end{matrix}\right\}\right)$$

$(\langle i, m\rangle = \sum_{i=1}^{n} l_i m_i)$ と同型である．

例 B.5 $S_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix}$ とおいて

$$G = SO(2n, \mathbb{C}) = \{g \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid gS_{2n}\,{}^t g = S_{2n}\}$$

の場合．G に含まれる対角行列の全体

$$T = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \;\middle|\; a = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}\right\}$$

が G の極大輪環群となる．$l \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\alpha_l \in X(T)$ を

$$\alpha_l \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{l_i}$$

により定義すると，$l \mapsto \alpha_l$ が同型 $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} X(T)$ を与える．$m \in \mathbb{Z}^n$ に対して $u_m \in X^\vee(T)$ を

$$u_m(t) = \begin{bmatrix} t^m & 0 \\ 0 & t^{-m} \end{bmatrix} \qquad \left(t^m = \begin{bmatrix} t^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{m_n} \end{bmatrix}, t \in \mathbb{C}^\times\right)$$

により定義すると，$m \mapsto u_m$ が同型 $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} X^\vee(T)$ を与える．特に $\langle \alpha_l, u_m \rangle = \sum_{i=1}^{n} l_i m_i$ である．G の Lie 環

$$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid XS_{2n} + S_{2n}\, {}^t X = 0\}$$

に対する随伴表現 $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ を直接計算して

$$\Phi = \{(\alpha_i \alpha_j^{-1})^{\pm 1}, (\alpha_i \alpha_j)^{\pm 1} \mid 1 \le i < j \le n\}$$

を得る．よって $SO(2n, \mathbb{C})$ のルート・データは

$$(\mathbb{Z}^n, \{\pm(e_i \pm e_j) \mid 1 \le i < j \le n\}; \mathbb{Z}^n, \{\pm(e_i \pm e_j) \mid 1 \le i < j \le n\})$$

$(\langle l, m \rangle = \sum_{i=1}^{n} l_i m_i)$ と同型である．

例 B.6 $S_{2n+1} = \begin{bmatrix} & & 1_n \\ & -1 & \\ 1_n & & \end{bmatrix}$ とおいて

$$G = SO(2n+1, \mathbb{C}) = \{g \in SL_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid gS_{2n+1}\, {}^t g = S_{2n+1}\}$$

の場合．G に含まれる対角行列の全体

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & a^{-1} \end{bmatrix} \middle| \, a = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \right\}$$

が G の極大輪環群となる．$l \in \mathbb{Z}\ n$ に対して $\alpha_l \in X(T)$ を

$$\alpha_l \begin{bmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & a^{-1} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{l_i}$$

により定義すると，$l \mapsto \alpha_l$ が同型 $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} X(T)$ を与える．$m \in \mathbb{Z}^n$ に対して $u_m \in X^\vee(T)$ を

$$u_m(t) = \begin{bmatrix} t^m & & \\ & 1 & \\ & & t^{-m} \end{bmatrix} \qquad \left(t^m = \begin{bmatrix} t^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{m_n} \end{bmatrix}, t \in \mathbb{C}^\times\right)$$

により定義すると，$m \mapsto u_m$ が同型 $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} X^\vee(T)$ を与える．G の Lie 環

$$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid XS_{2n+1} + S_{2n+s}\,{}^tX = 0\}$$

に対する随伴表現 $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ を直接計算して

$$\Phi = \{(\alpha_i\alpha_j^{-1})^{\pm 1}, (\alpha_i\alpha_j)^{\pm 1}, \alpha_k^{\pm 1} \mid 1 \le i < j \le n, 1 \le k \le n\}$$

を得る $(\alpha_i = \alpha_{e_i})$．よって $SO(2n+1,\mathbb{C})$ のルート・データは

$$\left(\mathbb{Z}^n, \left\{\pm(e_i \pm e_j), \pm e_k \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i < j \le n \\ 1 \le k \le n \end{array}\right\};\right.$$
$$\left.\mathbb{Z}^n, \left\{\pm(e_i \pm e_j), \pm 2e_k \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i < j \le n \\ 1 \le k \le n \end{array}\right\}\right)$$

$(\langle l, m\rangle = \sum_{i=1}^{n} l_i m_i)$ と同型である．

複素数体上定義された簡約可能な線形代数群のルート・データに関して，次の定理が基本的である（[3, vol.1, p.9, Th.2.9.]）；

定理 B.7 付随する根系が被約であるルート・データ $(X, \Phi; X^\vee, \Phi^\vee)$ に対して，$\mathbb{C}$ 上定義された簡約可能な連結線形代数群 G とその極大輪環群 T が存在して，G の T に関するルート・データが $(X, \Phi; X^\vee, \Phi^\vee)$ と同型となる．このような (G,T) は同型を除いて一意的である．

参考文献

[1] I.N.Bernshtein, A.V.Zelevinskii : *Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non-Archimedean local field* (Russian Math. Surveys 31 (1976), 1–68)

[2] I.N.Bernstein, A.V.Zelevinsky : *Induced representations of $\mathfrak{p}$-adic groups. I* (Ann. Sci. de l'É.N.S (1977), 441-472)

[3] A.Borel, W.Casselman ed.: Automorphic forms, representations, and L-functions (P.S.P.M. vol.33, Amer. Math. Soc. (1979))

[4] N.Bourbaki : Algèbre Commutative (Masson ,1985)

[5] W.Casselman : Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups (Draft: 1 May 1995), http://www.math.ubc.ca/˜cass/research.html

[6] R.Godement : Topologie algébrique et théorie des faisceaux (Hermann, 1958)

[7] R.Godement : Notes on Jacquet-Langlands' theory (Princeton, 1970)

[8] R.Godement, H.Jacquet : Zeta functions of simple algebras (Lecture Notes in Math. 260 (1972), Springer-Verlag)

[9] D.Prasad, A.Raghuram : Representation theory of $GL(n)$ over non-Archimedean local fields (a note by the second author based on the lecture by the first, 2000)

[10] 清水英男：保形関数（岩波講座基礎数学，1977）

[11] 山崎圭次郎：環と加群（岩波講座 基礎数学，岩波書店，1978）

[12] A.V.Zelevinsky-1980 : *Induced representations of* $\mathfrak{p}$*-sdic groups. II. On irreducible representations of* $GL(n)$ (Ann. Sci. de l'É.N.S (1980), 165–210)

索 引