線形代数学演習問題 1

問題 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

として，AB, AC, BC を計算せよ．

問題 2

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \text{\Large 0} \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & a_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & & & \text{\Large 0} \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & b_n \end{bmatrix}$$

として AB を計算せよ．

問題 3 n 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & \text{\Large 0} & & & & 0 \end{bmatrix}$$

に対して A^k $(k = 1, 2, \cdots)$ を計算せよ．

問題 4 n 次正方行列 A に対して，$\operatorname{tr} A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ を A の跡 (trace) と呼ぶ．次を示せ；

1) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$,

2) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

線形代数学演習問題 2

問題 1 次の行列の行列式を計算せよ；

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}.$$

問題 2 次の行列の行列式を計算せよ；

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{bmatrix}.$$

問題 3 次の等式を示せ；

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ a & b & c & d \end{bmatrix} = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

問題 4 次の行列の行列式を計算せよ；

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

問題 5 成分が実数の n 次正方行列 A, B に対して

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = |\det(A+iB)|^2$$

が成り立つことを示せ．但し i は虚数単位である（即ち $i^2 = -1$）．

問題 6 次の等式を n に関する数学的帰納法により示せ；

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

問題 7 $\displaystyle\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ を二項係数とする．

1) $q \geq r \geq 0$ のとき $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} \binom{q}{i}\binom{r}{i} = \binom{q+r}{r}$ を示せ，

2) 次の等式を示せ；

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n+1}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{n+2}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{bmatrix} = 1.$$

線形代数学演習問題 3

問題 1 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則行列のとき，A^{-1} を求めよ．

問題 2 次の 4 次正方行列の行列式と余因子行列を求めよ；

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ -7 & 1 & -8 & 6 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

問題 3 n 次正方行列 B は或る正の整数 m に対して $B^m = O$ を満たすとする．このとき，$A = E_n - B$ は正則行列であり

$$A^{-1} = E_n + B + B^2 + \cdots + B^{m-1}$$

であることを示せ.

問題 4 n 次正方行列 A に対して

$$(E_n + A)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k$$

が成り立つことを示せ．ここで $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ は二項係数である．$A^0 = E_n$ とする．

問題 5 次の連立方程式を，Cramér の公式および逆行列を用いて解け；

$$\begin{cases} 2x + y + z + w &= 1 \\ 6x + 2y - z + w &= 2 \\ x + 3y + 4z + 5w &= 3 \\ -x + 2y + 3z + 7w &= 4 \end{cases}.$$

線形代数学演習問題4

問題 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して

1) $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ（実は $\mathrm{rank}(A) = 2$），

2) $PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる 3 次正則行列 P と 4 次正則行列 Q を求めよ.

問題 2 行列の基本変形を用いて $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

問題 3 n 次正方行列

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (n \geq 2)$$

の階数 (rank) を求めよ.

問題 4 次の連立方程式を解け；

$$\begin{cases} 2x + 4y + z - w &= 1 \\ x + 2y - z + w &= 2 \\ 2x + y + z + 2w &= -2 \\ x + 3y + 2z - 3w &= 0 \end{cases}.$$

問題 5 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$