第5章　ベクトル空間と線形写像

この章を通して K は一般の体であるとする．一般の体に馴染のない読者は，K は有理数の全体 $\mathbb{Q}$，実数の全体 $\mathbb{R}$　又は複素数の全体 $\mathbb{C}$ であるとして読んでもかまわない．

5.1　ベクトル空間の定義と例

大雑把に言って，“ベクトル和”と “定数倍” が定義された集合をベクトル空間と呼ぶのである．厳密には次のように定義する；

定義 5.1.1 空でない集合 V が次の諸条件を満たすとき，V を K 上の**ベクトル空間**（簡単に K-**ベクトル空間**）と呼ぶ；

1) 任意の $u, v \in V$ に対して，そのベクトル和 $u + v \in V$ が定義されて，次の条件を満たす；
   (a) 任意の $u, v \in V$ に対して $u + v = v + u$ である，
   (b) 任意の $u, v, w \in V$ に対して $(u + v) + w = u + (v + w)$ である，
   (c) 全ての $u \in V$ に対して $u + o = u$ となるような $o \in V$ が存在する，
   (d) 任意の $u \in V$ に対して $u + u' = o$ となるような $u' \in V$ が存在する．
2) 任意の $\alpha \in K$ と $u \in V$ に対して，u の α 倍 $\alpha v \in V$ が定義されて，次の条件を満たす；
   (a) 任意の $\alpha, \beta \in K$ と $u \in V$ に対して $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta v)$ である，
   (b) 任意の $u \in V$ に対して $1u = u$ である，
   (c) 任意の $\alpha, \beta \in K$ と $u \in V$ に対して $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ である，
   (d) 任意の $\alpha \in K$ と $U, v \in V$ に対して $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ である．

V が K-ベクトル空間であるとき，V の元を**ベクトル**と呼ぶ．ところで，上の条件 1) の (c) で存在を仮定したベクトル $o \in V$ は実は唯一存在する．実際，$o' \in V$ が条件 1) の (c) を満たすならば，$o' = o' + o = o + o' = o$ となるからである．そこで条件 1) の (c) で仮定した $o \in V$ を K-ベクトル空間 V の**零ベクトル** と呼ぶ．更に，条件 1) の (d) で仮定した $u' \in V$ は $u \in V$ に対して唯一定まる．実際，$u'' \in V$ が条件 1) の (d) を満たすならば

$$u'' = u'' + o = u'' + (u + u') = (u'' + u) + u' = (u + u'') + u' = o + u' = u'$$

となるからである．そこで $u' \in V$ を $u \in V$ の**逆ベクトル**と呼び $-u$ と書くことにする．

$$u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0 \cdot u = o$$

より $-u = (-1)u$ である．

例 5.1.2 集合

$$K^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_i \in K \right\}$$

は $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in K^n$ 及び $\alpha \in K$ に対して，x, y のベクトル和 $x + y$，及び x の α 倍 αx をそれぞれ

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots x_n + y_n \end{bmatrix}, \qquad \alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

により定義すると，K-ベクトル空間となる．

例 5.1.3 K の元を成分とする (m, n) 行列の全体 $M_{m,n}(K)$ は，行列の和をベクトル和とし，行列の定数倍をベクトルの定数倍とすることにより，K-ベクトル空間となる．$K^n = M_{n,1}(K)$ とみれば，例 5.1.2 はここの例の特殊な場合である．

例 5.1.4 実数の区間 $[a, b]$ $(a < b)$ 上の実数値連続関数の全体を $C([a, b])$ と書く．このとき $\varphi, \psi \in C([a, b])$ の和 $\varphi + \psi \in C([a, b])$，及び $\varphi \in C([a, b])$ の $\lambda \in \mathbb{R}$ 倍 $\lambda\varphi \in C([a, b])$ を夫々

$$(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t), \qquad (\lambda\varphi)(t) = \lambda \cdot \varphi(t) \qquad (aleqt \leq b)$$

により定義すると，$C([a, b])$ は $\mathbb{R}$-ベクトル空間となる．

5.2 ベクトル部分空間の定義と例

定義 5.2.1 K-ベクトル空間 V の部分集合 $W \subset V$ が次の条件を満たすとき，W を V の K-**ベクトル部分空間**と呼ぶ；

1) W は空集合ではない,
2) 任意の $w, w' \in W$ に対して $w + w' \in W$ である,
3) 任意の $\alpha \in K$ と $w \in W$ に対して $\alpha w \in W$ である.

定義から次の命題はすぐにわかる；

命題 5.2.2 K-ベクトル空間 V に対して

1) V 自身，及びゼロベクトルのみからなる集合 $\{o\}$ は V の K- ベクトル部分空間である.
2) W が V の K-ベクトル部分空間ならば，V のゼロベクトルは W に含まれる.

[**証明**] 1) 明らか.
2) W は空集合ではないから，ベクトル $w \in W$ を含む．すると定数 $0 \in K$ に対して $o = 0 \cdot w \in W$ となる．■

W が K-ベクトル空間 V の K-ベクトル部分空間ならば，V におけるベクトル和と定数倍を W に制限することにより，W は K-ベクトル空間となる．命題 5.2.2 の 2) より W のゼロベクトルは V のゼロベクトルと一致し，$w \in W$ の逆ベクトルは $-u = (-1)u$ より V における w の逆ベクトルと一致する.
ベクトル部分空間の重要な例として

命題 5.2.3 K-ベクトル空間 V の有限部分集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ をとると,

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_r\rangle_K = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \;\middle|\; \alpha_i \in K \right\}$$

は V の K-ベクトル部分空間である.

[**証明**] 明らかに $W = \langle v_1, \cdots, v_r\rangle_K$ は V の空でない部分集合である．任意の $v, w \in \langle v_1, \cdots, v_r\rangle_K$ をとって

$$v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i \quad (\alpha_i, \beta_i \in K)$$

とおくと,

$$v + w = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta_i) v_i \in W$$

となる．又，任意の $\alpha \in K$ に対して

$$\alpha v = \sum_{i=1}^{r} (\alpha \alpha_i) v_i \in W$$

となる．■

5.3 線形写像の定義と例

定義 5.3.1 K-ベクトル空間 V から K-ベクトル空間 W への写像

$$f : V \to W$$

が次の条件を満たすとき，f を V から W への K-**線形写像**と呼ぶ；

1) 任意の $v, v' \in V$ に対して $f(v + v' = f(v) + f(v')$ である，
2) 任意の $\alpha \in K$ と $v \in V$ に対して

このとき，次のことは定義からすぐにわかる；

1) $f(o) = o$．即ち，K-線形写像 f により，V のゼロベクトルは必ず W のゼロベクトルに対応する，
2) 任意の $v \in V$ に対して $f(-v) = -f(v)$．即ち，K 線形写像により，逆ベクトルは逆ベクトルに対応する．

実際，任意の $v \in V$ に対して $0 \cdot v = o$ だから

$$f(o) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = o$$

となる．又，$-v = (-1)v$ だから

$$f(-v) = f((-1)v) = (-1)f(v) = -f(v)$$

となる．

例 5.3.2 (m, n) 行列 $A \in M_{m,n}(K)$ が与えられたとき，写像 $f_A : K^n \to K^m$ を $f_A(x) = Ax$ により定義すると，f_A は K-ベクトル空間 K^n から K-ベクトル空間 K^m への K-線形写像となる．f_A を行列 A に付随した K-線形写像と呼ぶ．

問 5.3.3 例 5.3.2 を確かめよ．

定理 5.3.4 K-ベクトル空間 V から K-ベクトル空間 W への K-線形写像 $f : V \to W$ に対して

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \in W \mid v \in V\}, \quad \mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = o\}$$

とおくと，$\mathrm{Im}(f)$ は W の K-ベクトル部分空間となり，$\mathrm{Ker}(f)$ は V の K-ベクトル部分空間となる．$\mathrm{Im}(f), \mathrm{Ker}(f)$ をそれぞれ K-線形写像 f の**像**，**核**と呼ぶ．

[**証明**] まず $\mathrm{Im}(f)$ は W の空でない部分集合である．任意の $w, w' \in \mathrm{Im}(f)$ をとると，$w = f(v)$, $w' = f(v')$ となる $v, v' \in V$ が存在する．すると

$f(v+v') == w+w'$ となるから $w+w' \in \mathrm{Im}(f)$ である．又，任意の $\alpha \in K$ に対して $f(\alpha v) = \alpha w$ だから $\alpha w \in \mathrm{Im}(f)$ である．よって $\mathrm{Im}(f)$ は W の K-ベクトル部分空間となる．

一方，既に見たように $f(o) = o$ だから V ゼロベクトルは $\mathrm{Ker}(f)$ に含まれる．よって $\mathrm{Ker}(f)$ は V の空でない部分集合である．任意の $v, v' \in \mathrm{Ker}(f)$ をとると，$f(v) = f(v') = o$ である．よって $f(v+v') = o$ となるから $v+v' \in \mathrm{Ker}(f)$ である．又，任意の $\alpha \in K$ に対して $f(\alpha v) = \alpha f(v) = o$ となるから $\alpha v \in \mathrm{Ker}(f)$ である．よって $\mathrm{Ker}(f)$ は V の K-ベクトル部分空間となる．■

次の定理が示すように線形写像の像と核は，それぞれ線形写像の性質を反映している；

定理 5.3.5 K-ベクトル空間 V から K-ベクトル空間 W への K-線形写像 $f : V \to W$ に対して

1) f が全射となるための必要十分条件は $\mathrm{Im}(f) = W$ なることである，
2) f が単射となるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$ なることである．

[**証明**] 1) は明らかであるから，2) を証明しよう．f が単射であるとする．任意の $v \in \mathrm{Ker}(f)$ をとると，$f(v) = o$ であるが，線形写像では常に $f(o) = o$ だから $f(v) = f(o)$ となる．f は単射だから $v = o$ を得る．即ち，$\mathrm{Ker}(f)$ の元はゼロベクトルのみである．逆に $\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$ とする．任意の $v, v' \in V$ に対して $f(v) = f(v')$ とすると

$$f(v'-v) = f(v') - f(v) = o$$

だから $v' - v \in \mathrm{Ker}(f)$ となる．ところが $\mathrm{Ker}(f)$ の元はゼロベクトルのみから $v' - v = o$，即ち $v' = v$ となる．よって f は単射である．■

定義 5.3.6 K-ベクトル空間 V から K-ベクトル空間 W への K-線形写像 $f : V \to W$ が全単射であるとき，f を V から W への K-**線形同型写像**と呼び，$f : V \xrightarrow{\sim} W$ と表す．このとき K-ベクトル空間 V, W は K **上線形同型**であるという．

K-線形同型写像 $f : V \xrightarrow{\sim} W$ があったとすると，写像 f は全単射だから，その逆写像 $f^{-1} : W \to V$ が定義できる．このとき逆写像 f^{-1} は K-線形写像となる．従って V, W が K 上線形同型となるには，二つの互いに逆向きの K-線形写像

$$f : V \to W, \qquad g : W \to V$$

があって $f \circ g = \mathrm{id}_W$, $g \circ f = \mathrm{id}_V$ となることが必要十分である．

5.4 ベクトル空間の次元

定義 5.4.1 K-ベクトル空間 V の有限部分集合 $\{v_1, v_2, v_r\}$ に対して

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = o$$

となる $\lambda_i \in K$ は $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdot = \lambda_r = 0$ に限るとき，$\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ は K **上一次独立**であるという．$\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ が K 上一次独立でないとき，$\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ は K **上一次従属**であるという．

K-ベクトル空間 V の有限部分集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ をとったとき，

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \in K^r \text{ に対して } f(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i v_i \in V \tag{5.1}$$

とおくと，K-線形写像 $f : K^r \to V$ が得られる．この線形写像の核は

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \in K^r \;\middle|\; x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_r v_r = o \right\}$$

となるから，定理 5.3.5 の 2) から，$\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ が K 上一次独立であることと(5.1) により定義された K-線形写像 f が単射なることは同値である．

一次独立の定義から，次の様な性質はすぐにわかる；

命題 5.4.2 K-ベクトル空間 V において

1) $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\} \subset V$ が K 上一次独立ならば，$v_i \neq o$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ である．
2) 単独のベクトル $v_1 \in V$ に対して，$\{v_1\}$ が K 上一次独立であることと $v_1 \neq o$ であることは同値である．

[**証明**] 1) 例えば $v_1 = o$ とすると，$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ とおくと $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = o$ たなり，$\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ が K 上一次独立であることに反する．

2) $\{v_1\}$ が K 上一次独立ならば $v_1 \neq o$ であることは既に示した．逆に $v_1 \neq o$ とする．$0 \neq \lambda_1 \in K$ に対して $\lambda_1 v_1 = o$ とすると，両辺に $\lambda^{-1} \in K$ をかけて，$v_1 = o$ となるから，$\{v_1\}$ は K 上一次独立である．■

我々に馴染みの深い $\mathbb{R}^3$ で一次独立性を幾何学的に表現すると次のようになる；

例 5.4.3 $\mathbb{R}$-ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトルに関して

1) 二本のベクトル $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であることと $\{v_1, v_2\}$ が同一直線上にないことは同値である．
2) 三本のベクトル $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であることと $\{v_1, v_2, v_3\}$ が同一平面上にないことは同値である．

一般の場合に戻って，K 上の縦ベクトルからなるベクトル空間では，ベクトルの一次独立性は連立方程式と密接な関係がある．K^n から r 個の縦ベクトル $v_1, v_2, \cdots, v_r$ をとる．各縦ベクトル $v_j \in K^n$ の成分を

$$v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \qquad (a_{ij} \in K)$$

とすると，K の元 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ に関する関係式

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = o$$

は λ_j に関する連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1r}\lambda_r &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2r}\lambda_r &= 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & \;\; \vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{nr}\lambda_r &= 0 \end{cases}$$

と同値である．よって $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ が K 上一次独立であることは，この連立方程式が $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ 以外の解を持たないことと同値となるが，定理 4.4.4 より，これは $\mathrm{rank}(v_1, v_2, \cdots, v_r) = r$ と同値である．よって，次の定理が示された；

定理 5.4.4 $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\} \subset K^n$ が K 上一次独立であるための必要十分条件は $\mathrm{rank}(v_1, v_2, \cdots, v_r) = r$ なることである．ここで $(v_1, v_2, \cdots, v_r)$ は縦ベクトル $v_1, v_2, \cdots, v_r$ を並べて作った (n, r) 行列である．

幾何学的な直感からすると，一次独立なベクトルが沢山取れれば取れるほどベクトル空間はより "広がっている" とみなすことができよう．これを精密に扱うために次のように定義しよう；

定義 5.4.5 K-ベクトル空間 V において，r 個のベクトルからなる K 上一次独立な系が取れるような最大の r を V の K 上の次元と呼び $\dim_K V$ と表す．但し，このような r がいくらでも大きく取れるときには $\dim_K V = \infty$ とする．$\dim_K V < \infty$ なる K-ベクトル空間 V を有限次元 K-ベクトル空間と呼ぶ．

K-ベクトル空間 V がゼロベクトルのみからなるときには $\dim_K V = 0$ とするのである．命題 5.4.2 の 2) に注意すれば，K-ベクトル空間 V がゼロベクトル以外のベクトルを含むならば $\dim_K V \geq 1$ である．次の定理も直感とよく合うものである；

定理 5.4.6 K-ベクトル空間 K^n の K 上の次元は n である；$\dim_K K^n = n$.

[**証明**] K^n の n 個のベクトル

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

をとると，$(e_1, e_2, \cdots, e_n) = I_n$ は単位行列となるから $\mathrm{rank}(e_1, e_2 m \cdots, e_n) = n$ である．よって定理 5.4.4 より $\{e_1.e_2.\cdots.e_n\}$ は K 上一次独立である．よって $\dim_K K^n \geq n$ である．一方，$r > n$ として K^n の任意の r 個のベクトル $v_1, v_2, \cdots, v_r$ をとると，

$$\mathrm{rank}(v_1, v_2, \cdots, v_r) \leq n < r$$

となり，定理 5.4.4 より $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ は K 上一次独立にはなり得ない．よって $\dim_K K^n = n$ である．■

ところでベクトル空間の次元と線形同型とは，次の命題が示すように関連がある．後にこの命題の逆が成り立つ事を，有限次元ベクトル空間の場合に見るであろう．

命題 5.4.7 K-ベクトル空間 V, W と K-線形写像 $f : V \to W$ に対して

1) f が全射ならば $\dim_K V \geq \dim_K W$ である．
2) f が単射ならば $\dim_K V \leq \dim_K W$ である．

よって，特に f が K-線形同型写像ならば $\dim_K V = \dim_K W$ である．

[**証明**] 1) $\{w_1, w_2, \cdots, w_r\} \subset W$ が K 上一次独立でるとする．f は全射だから $f(v_i) = w_i$ なる $v_i \in V$ が存在する．このとき $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\} \subset V$ は K 上一次独立である．実際，$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r = o$ $(\alpha_i \in K)$ とすると，K-線形写像 f で写して $f(o) = o$ に注意すれば $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_r w_r = o$ となり，$\alpha_1 = \alpha_2 =$
$cdots = \alpha_r = 0$ を得る．よって次元の定義から $\dim_K V \geq \dim_K W$ となる．

2) $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\} \subset V$ が K 上一次独立であるとする．$w_i = f(v_i)$ とおくと $\{w_1, w_2, \cdots, w_r\} \subset W$ は K 上一次独立である．実際，$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_r w_r = o$ $(\alpha_i \in K)$ とすると，f が K-線形写像であることから

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r) = o = f(o)$$

となるが，f は単射だから $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r = o$，従って $\alpha_1 = \alpha_2 = cdots = \alpha_r = 0$ をとなる．よって次元の定義から $\dim_K V \leq \dim_K W$ となる．■

5.5 ベクトル空間の基底

定義 5.5.1 K-ベクトル空間 V の部分集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が次の二つの条件を満たすとき，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ を V の K 上の**基底**と呼ぶ；

1) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ は K 上一次独立,
2) $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K$.

まず始めに，このような基底が常に存在することを示しておく；

定理 5.5.2 K-ベクトル空間 V は有限次元かつ o 以外のベクトルを含むとする．このとき V の K 上の基底が存在する．

[**証明**] $\dim_K V = n$ とすると，$n \geq 1$ である．次元の定義から K 上一次独立なベクトルの系 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ が存在する．任意の $v \in V$ に対して，次元の定義から $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, v\}$ は K 上一次独立でない．よって

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v = o$$

なる $\alpha_i \in K$ で，少なくとも一つの番号 i に対しては $\alpha_i \neq 0$ となるものが存在する．ここで $\alpha_{n+1} = 0$ とすると，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が K 上一次独立であることに反するから，$\alpha_{n+1} \neq 0$ である．よって

$$v = (-\alpha_1/\alpha_{n+1})v_1 + \cdots + (-\alpha_n/\alpha_{n+1})v_n$$

となるから $v \in \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K$ となる．よって $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K$ となるから，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が V の K 上の基底となる．■

一般に K-ベクトル空間 V の有限部分集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が与えられたとして，写像

$$f : K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$$

を考えよう．容易に判るように，f は K-ベクトル空間 K^n から V への K-線形写像ある．このとき

$$\mathrm{Im}(f) = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K,$$
$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \; x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = o \right\}$$

である．従って定理 5.3.5 より

1) f が全射であることと $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K$ であることは同値である，
2) f が単射であることと $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が K 上一次独立であることは同値である．

特に

3) f が全単射であることと $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が V の K 上の基底でることは同値である．

即ち，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が V の K 上の基底ならば，K=ベクトル空間 K^n が K-ベクトル空間 V と K 上線形同型となるから，定理 5.4.7 と定理 5.4.6 より $\dim_K V = n$ となる．よって次の定理が示された；

定理 5.5.3 有限次元 K-ベクトル空間 V の基底をなすベクトルの個数は常に一定であって，V の K 上の次元に等しい．

次の定理を示すために，補題を一つ証明しておく；

補題 5.5.4 K-ベクトル空間 V の有限部分集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$ $(n \geq 1)$ に対して，次の二つの命題は同値である；

1) $\langle v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1} \rangle_K = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K$,
2) $v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ なる $\alpha_i \in K$ が存在する．

[**証明**] 1) $\Rightarrow$ 2) $v_{n+1} \in \langle v_1, v_2, \cdots, v_{n+1} \rangle_K = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K$ より明らか．

2) $\Rightarrow$ 1) $\langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K \subset \langle v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1} \rangle_K$ は明らかだから，逆の包含関係を示せば良い．任意の $v \in \langle v_1, \cdots, v_n, v_{n+1} \rangle_K$ をとると

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i \qquad (\lambda_i \in K) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_; + \lambda_{n+1} \alpha_i) v_i \end{aligned}$$

となるから，$v \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle_K$ である．■

さて次の定理は実際に基底を用いて議論を展開する際に便利である；

定理 5.5.5 K-ベクトル空間 V の有限部分集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ に対して，

1) V が K 上有限次元でかつ $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\} \subset V$ が K 上一次独立ならば，これに幾つかのベクトルを追加して，V の K 上の基底 $\{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ を作ることができる．
2) $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_m \rangle_K$ $(v_i \in V)$ ならば，V の K 上の基底を $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ の中から選び出すことが出来る．よって特に V は K 上有限次元である．

[**証明**] 1) $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ を含む V のベクトルの有限集合で，K 上一次独立かつ，そのベクトルの個数が最大のものを $\{v_1, \cdots, v_r, \cdots, v_n\}$ としよう．V の K 上の次元は有限と仮定しているから，そのような有限集合は確かに存在する．このとき，$\{v_1, \cdots, v_r, \cdots, v_n\}$ は V の K 上の基底となる．実際，$V = \langle v_1, \cdots, v_r, \cdots, v_n \rangle_K$ であることを示せばよいが，任意の $v \in V$ に対して，$\{v_1, \cdots, v_r, \cdots, v_n, v\}$ は K 上一次独立ではない．よって

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v = o$$

なる $\alpha_i \in K$ で，少なくとも一つの番号 i に対して $\alpha_i \neq 0$ となるものが存在する．ここで $\alpha_{n+1} = 0$ とすると，$\{v_1, \cdots, v_r, \cdots, v_n\}$ が K 上一次独立であることに反するから，$\alpha_{n+1} \neq 0$ である．すると

$$v = (-\alpha_1/\alpha_{n+1})v_1 + \cdots + (-\alpha_r/\alpha_{n+1})v_r + \cdots + (-\alpha_n/\alpha_{n+1})v_n$$

となるから，$v \in \langle v_1, \cdots, v_r, \cdots, v_n \rangle_K$ となる．

2) $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ の部分集合で K 上 V 全体を張り，かつベクトルの個数が最小のものを S とすると，それが V の K 上の基底を与える．実際，ベクトルの番号を付け替えれば，それを $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ $(n \leq m)$ としても一般性を失わないが，これが K 上一次独立であることを示せば良い．K 上一次独立でないと仮定すると，

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_{=} o$$

なる $\alpha_i \in K$ で，少なくとも一つの番号 i に対して $\alpha_i \neq 0$ であるものが存在する．再びベクトルの番号を付け直して，$\alpha_n \neq 0$ としてよい．このとき

$$v_n = (-\alpha_1/\alpha_n)v_1 + (-\alpha_2/\alpha_n)v_n + \cdot + (-\alpha_{n-1}/\alpha_n)v_{n-1}$$

となり，補題 5.5.4 より $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_{n-1} \rangle_K$ となるが，これは S の最小性に反する．■

特殊な状況の下では，基底になるための条件が緩和される；

定理 5.5.6 n 次元 K-ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が与えられたとき，次の三命題は同値である；

1) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ は V の K 上の基底である．
2) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ は K 上一次独立である．
3) $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K$ である．

[**証明**] 1) が成り立てば 2), 3) が成り立つ事は，基底の定義から明らかである．
2) $\Rightarrow$ 1) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ は K 上一次独立だから，定理 5.5.5 の 1) より，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ に V のベクトルを幾つか追加して V の K 上の基底とすることができる．ところが $n = \dim_K V$ だから，定理 5.5.3 から，実は何も追加する必要はないことがわかる．即ち，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が既に V の K 上の基底である．
3) $\Rightarrow$ 1) 定理 5.5.5 の 2) より $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ の一部分として V の K 上の基底をとることが出来る．ところが $n = \dim_K V$ だから，定理 5.5.3 より，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が V の K 上の基底であることが判る．■

系 5.5.7 K-ベクトル空間の K-ベクトル部分空間 V, W に対して，$W \subset V$ かつ $\dim_K V = \dim_K W < \infty$ ならば，$V = W$ である．

[**証明**] $\dim_K W = \dim_K V = n$ として $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ を W の K 上の基底とすると，定理 5.5.6 より，$\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ は V の K 上の基底となる．よって $V = \langle w_1, w_2, \cdots, w_n \rangle_K = V$ となる．■

最後に K-ベクトル空間 K^n の基底がどのように特徴づけられるかを見ておこう．

定理 5.5.8 K-ベクトル空間 K^n の n 個のベクトル $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が K^n の K 上の基底となるための必要十分条件は，n 次正方行列 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ が正則なること，即ち

$$\det(v_1, v_2, \cdots, v_n) \neq 0$$

なることである．

[**証明**] 定理 5.5.6 より，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が K-ベクトル空間 K^n に K 上の基底なることと $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が K 上一次独立なることは同値である．一方，定理 5.4.4 より，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が K 上一次独立なることと $\mathrm{rank}(v_1, v_2, \cdots, v_n) = n$ なることは同値である．ここで $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ は n 次正方行列だから，$\mathrm{rank}(v_1, v_2, \cdots, v_n) = n$ なることと $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ が正則なることは同値である．■

5.6 次元定理

与えられた線形写像の像の次元と核の次元は密接に関係している．それを述べたのが次の**次元定理**である；

定理 5.6.1 K-ベクトル空間 V から K-ベクトル空間 W への K-線形写像 $f : V \to W$ があって，V は K 上有限次元であるとする．このとき $\mathrm{Im}(f)$ は K 上有限次元で

$$\dim_K \mathrm{Im}(f) = \dim_K V - \dim_K \mathrm{Ker}(f)$$

である．

[**証明**] $\mathrm{Im}(f) = \{o\}$ ならば，$\dim_K \mathrm{Im}(f) = 0$ かつ $\mathrm{Ker}(f) = V$ だから，求める等式は確かに成り立つ．一方，$\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$ ならば，定理 5.3.5 より f は V から $\mathrm{Im}(f)$ への K-線形同型写像を与えるから，命題 5.4.7 より $\dim_K \mathrm{Im}(f) = \dim_K V$ となり，求める等式はやはり成り立つ．そこで $\mathrm{Im}(f) \neq \{o\}$ かつ $\mathrm{Ker}(f) \neq \{o\}$ と仮定する．

V の K 上の基底を $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ とすると，$V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle_K$ だから $\mathrm{Im}(f) = \langle f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n) \rangle_K$ となる．よって定理 5.5.5 の 2) より $\mathrm{Im}(f)$ は K 上有限次元である．そこで $\mathrm{Im}(f)$ の K 上の基底を $\{w_1, \cdots, w_r\}$ とする．$r = \dim_K \mathrm{Im}(f)$ である．$w_i \in \mathrm{Im}(f)$ だから $w_i = f(v_i)$ なる $v_i \in V$ が存在する．一方 $\mathrm{Ker}(f)$ の K 上の基底を $\{u_1, \cdots, u_s\}$ とする．$s = \dim_K \mathrm{Ker}(f)$ である．このとき $\{v_1, \cdots, v_r, u_1, cdots, u_s\}$ は V の K 上の基底となる．実際，$\alpha_i, \beta_j \in K$ に対して

$$\alpha_1 v_1 + \cdot + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s = o \tag{5.2}$$

とすると，これを f で写してみれば，$\sum_{j=1}^{s} \beta_j u_j \in \mathrm{Ker}(f)$ かつ $f(v_i) = w_i$ だから $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i = o$ となるが，$\{w_1, \cdots, w_r\}$ の一次独立性から $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ となる．すると(5.2) から $\sum_{j=1}^{s} \beta_j u_j = o$ となるから，$\{u_1, \cdots, u_s\}$ の一次独立性から $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$ となる．よって $\{v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_s\}$ は K 上一次独立である．一方，任意の $v \in V$ をとると，$f(v) \in \mathrm{Im}(f)$ だから $f(v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i$ なる $\alpha_i \in K$ がとれる．$u = v - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \in V$ とおくと $u \in \mathrm{Ker}(f)$ となることが判るから，$u = \sum_{j=1}^{s} \beta_j u_j$ なる $\beta_j \in K$ がとれる．よって

$$v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j u_j \in \langle v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_s \rangle_K$$

となる．よって $\{v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_s\}$ は V の K 上の基底となるから

$$\dim_K V = r + s = \dim_K \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$$

となり，求める等式を得る．■

ここで 4.4 節で証明した定理 4.4.3 の意味を明らかにしよう．一般に (m,n) 行列 $A \in M_{m,n}(K)$ に付随した K-線形写像 $f_A : K^n \to K^m$ が $f_A(x) = Ax$ により定義されるが（例 5.3.3），$\mathrm{Ker}(f_A) = \mathrm{Ker}(A)$ は明らかである．さて定理 4.4.3 の意味は次の定理に集約される；

定理 5.6.2 (m,n) 行列 $A \in M_{m,n}(K)$ に付随した K-線形写像 f_A に対して

$$\dim_K \mathrm{Ker}(f_A) = n - \mathrm{rank}(A), \qquad \dim_K \mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{rank}(A)$$

である．

[**証明**] $\mathrm{rank}(A) = r$ とおく．$\dim_K \mathrm{Ker}(f_A) = n - r$ が示されれば，K-線形写像 $f_A : K^n \to K^m$ に次元定理を適用して，直ちに $\dim_K \mathrm{Im}(f_A) = r$ が得られる．ここで定理 4.4.3 の記号をそのまま用いることにすると，まず

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \mathrm{Ker}(A) = \langle q_{r+1}, q_{r+2}, \cdots, q_n \rangle_K$$

である．一方 $Q = (q_1, q_, \cdots, q_n)$ は n 次正則行列だから，定理 5.5.8 より $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ は K^n の K 上の基底である．よって特に $\{q_{r+1}, q_{r+2}, \cdots, q_n\}$ は K 上一次独立である．即ち，$\{q_{r+1}, q_{r+2}, \cdots, q_n\}$ は $\mathrm{Ker}(f_A)$ の K 上の基底となる．よって $\dim_K \mathrm{Ker}(f_A) = n - r$ である．■

(m,n)-行列 $A \in M_{m,n}(K)$ が与えられたとき，$\mathrm{Ker}(F_A)$ と $\mathrm{Im}(f_A)$ の K 上の基底を求める方法を考えてみよう．$\mathrm{rank}(A) = r$ とおくと

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なる m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q がとれる．定理 5.6.2 の証明をみれば

$$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n), \qquad (q_i \in K^n)$$

とおくと，$\{q_{r+1}, \cdots, q_n\}$ が $\mathrm{Ker}(f_A)$ の K 上の基底であることがわかる．$\mathrm{Im}(f_A)$ の基底はどうだろうか．

$$f_A(x) = Ax = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}x \qquad (x \in K^n)$$

であるが，$y = Q^{-1}x$ とおくと，Q^{-1} が正則行列であることから，x が K^n 全体を動くとき y は再び K^n 全体を動く．従って

$$P^{-1} = (v_1, v_2, \cdots, v_m) \qquad (v_j \in K^m)$$

とおくと，y の成分を $y_1, \cdots, y_n$ としたとき

$$f_A(x) = P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y = y_1v_1 + \cdots + y_rvr$$

だから $\mathrm{Im}(f_A) = \langle v_1, \cdots, v_r\rangle_K$ となる．一方，P^{-1} は正則行列だから $\{v_1, \cdots, v_r\}$ は K 上一次独立である（定理 5.5.8）から，$\{v_1, \cdots, v_r\}$ が $\mathrm{Im}(f_A)$ の K 上の基底となる．以上をまとめて，次の命題を得る；

命題 5.6.3 (m, n)-行列 $A \in M_{m,n}(K)$ に対して

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (r = \mathrm{rank}(A))$$

なる正則行列 P, Q をとって

$$P^{-1} = (v_1, \cdots, v_m), \qquad Q = (q_1, \cdots, q_n)$$

$(v_j \in K^m, q_i \in K^n)$ とおくと

$\{v_1, \cdots, v_r\}$ が $\mathrm{Im}(f_A)$ の K 上の基底

$\{q_{r+1}, \cdots, q_n\}$ が $\mathrm{Ker}(f_A)$ の K 上の基底

をそれぞれ与える．

上の命題で用いる正則行列 P, Q は命題 4.2.5 を用いて求めることが出来る．

系 5.6.4 K-ベクトル空間 K^n の有限部分集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ に対して

$$\dim_K\langle v_1, v_2, \cdots, v_m\rangle_K = \mathrm{rank}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$$

である．ここで $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ は縦ベクトル $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ を並べて作った (n, m) 行列である．

[**証明**] $A = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in M_{n,m}(K)$ とおくと $\mathrm{Im}(f_A) = \langle v_1, v_2, \cdots, v_m\rangle_K$ となることに注意すれば，定理 5.6.2 から直ちに従う．■

5.7 線形写像の表現行列

有限次元 K-ベクトル空間 V, W 及び K-線形写像 $f : V \to W$ があったとする．V の K 上の基底 $[v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ をとると，K-線形同型写像

$$\varphi : K^n \xrightarrow{\sim} V \quad (\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_jv_j)$$

が得られる．同様に W の K 上の基底 $\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ をとって K-線形同型写像

$$\psi : K^m \xrightarrow{\sim} W \quad (\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{m} y_i w_i)$$

が得られる．そこで K-線形写像 $f : V \to W$ を，K-ベクトル空間 V, W の忠実なコピーともいえる K^n, K^m を通してみるとどのように表現できるかを考えてみよう．$j = 1, \cdots, n$ に対して $f(v_j) \in W$ を $\{w_1, \cdots, w_m\}$ の K 上の一次結合として

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_j \qquad (a_{ij} \in K)$$

と書くことができる．このとき $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in V$ に対して

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \tag{5.3}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) w_i \tag{5.4}$$

となるが，これは行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(K) \tag{5.5}$$

に付随する K-線形写像 $f_A(x) = Ax$ $(x \in K^n)$ を用いれば $f \circ \varphi(x) = \psi \circ f_A(x)$ $(x \in K^n)$ と表される．或いは次のような図式をみるとわかり易いだろう；

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_A} & K^m \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ V & \xrightarrow{f} & W. \end{array}$$

即ち，K-線形写像 $f : V \to W$ のコピーが $f_A : K^n \to K^m$ でるといえるだろう．そこで行列 (5.5) を，基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$, $\{w_1, \cdots, w_m\}$ に関する f の**表現行列**と呼ぶ．f の表現行列は V, W の基底を取り替えると変化することに注意しよう．従って，表現行列という場合には，どのような基底に関する表現行列であるかを明確にしておかねばならない．

ここで線形写像の表現行列の基本的な性質を一つ述べておこう．上の K-線形写像 $f : V \to W$ に加えて，有限次元 K-ベクトル空間 U と K-線形写像

$g: U \to V$ が与えられたときに，合成写像 $f \circ g$ は U から W への K-線形写像となる．そこで U の K-基底 $\{u_1, \cdots, u_l\}$ を一つ決めて，これらの基底に関する f, g 及び $f \circ g$ に表現行列の間の関係を調べるのである．$k = 1, \cdots, l$ に対して

$$g(u_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j \qquad (f \circ g)(u_k) = \sum_{i=1}^{m} c_{ik} w_i \qquad (b_{jk}, c_{ik} \in K) \tag{5.6}$$

とおくと，$g, f \circ g$ の表現行列はそれぞれ $B = (b_{jk})_{j,k} \in M_{nl}(K)$, $C = (c_{ik})_{i,k} \in M_{ml}(K)$ である．ところで

$$\begin{aligned}(f \circ g)(u_k) = f(g(u_k)) &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) w_i\end{aligned}$$

だから，これを (5.6) と比較して $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ を得る．即ち，次の定理が示された；

定理 5.7.1 K-線形写像 $g: U \to V$, $f: V \to W$ の表現行列をそれぞれ A, B とすると，合成写像 $f \circ g: U \to W$ の表現行列は行列の積 AB で与えられる．