● 線形代数学演習問題１正解

問題 **1** $AB = \begin{bmatrix} 13 & 8 & 3 \\ 1 & 23 & -24 \\ -4 & -3 & 11 \\ -6 & 2 & 14 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ -3 & 10 \\ 4 & -9 \\ 8 & -15 \end{bmatrix}, BC = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 9 & -5 \\ 9 & -14 \end{bmatrix}.$

尚，$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ である（念のため）.

問題 **2** $AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 & & & \text{\huge 0} \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & a_nb_n \end{bmatrix}.$

● 線形代数学演習問題２正解

問題 **1** $\det A = 11, \det B = -12, \det C = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$

問題 **2** $\det A = 0, \det B = 2(a+b+c)^3.$

問題 **3** ヒント : 第 1 列に x をかけて第 2 列に加え，第 2 列に x をかけて第 3 列に加え,,,,.

問題 **4** $\det A = 65, \det B = 0.$

● 線形代数学演習問題３正解

問題 **1** $A^{-1} = (ad-bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$

問題 **2** $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -13 & 90 & 67 & 133 \\ -86 & -68 & 153 & 175 \\ 44 & 110 & 22 & -77 \\ 6 & -83 & 52 & 63 \end{bmatrix}, \widetilde{B} = \begin{bmatrix} -62 & -80 & -137 & 123 \\ -294 & -210 & -69 & 51 \\ 208 & 220 & 133 & -207 \\ 254 & 110 & 29 & -141 \end{bmatrix}.$

問題 **3** $(E_n - B)(E_n + B + B^2 + \cdots + B^{m-1})$ を計算してみよ.

問題 **4** 通常の二項定理の証明を参考にせよ.

問題 5 $A=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\6&2&-1&1\\1&3&4&5\\-1&2&3&7\end{bmatrix}$ として $\det A=39$, $A^{-1}=\frac{1}{39}\begin{bmatrix}38&-3&-14&5\\-97&21&46&-22\\47&-15&-5&-1\\13&0&-13&13\end{bmatrix}$.

$$x=\frac{10}{39},\ y=\frac{-5}{39},\ z=\frac{-2}{39},\ w=\frac{2}{3}.$$

- 線形代数学演習問題４正解

問題 1 $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1/2&0&0\\-3/2&2&1\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

問題 2 逆行列は $\begin{bmatrix}-3&-1&1&-1\\-3&-1&0&1\\-4&-1&1&0\\-10&-3&1&1\end{bmatrix}$.

問題 3 $\mathrm{rank}=\begin{cases}1&: x=1,\\ n-1&: x=(1-n)^{-1},\\ n&: x\neq 1,(1-n)^{-1}\end{cases}.$

問題 4 $A=\begin{bmatrix}2&4&1&-1\\1&2&-1&1\\2&1&1&2\\1&3&2&-3\end{bmatrix}$ とおくと $\mathrm{rank}(A)=3$. $b=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\0\end{bmatrix}$ として $\mathrm{rank}(A,b)=3$. よって問題の連立方程式は解をもち，自由に動くパラメータを $4-3=1$ 個もつ.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\-1\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\1\end{bmatrix}\qquad (t:\text{任意定数})$$

問題 5 固有値は $\lambda=-1,1,2$. 夫々に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

の 0 でない定数倍.