

# 線形代数の基礎

高瀬幸一

ver.2020.12.3

コピー及び再配布は自由ですが、  
Web上に公開することは御遠慮下さい。

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>準備</b>	<b>4</b>
1.1	写像の単射性, 全射性 . . . . .	4
1.2	群 . . . . .	5
1.3	環と体 . . . . .	7
<b>第 2 章</b>	<b>行列</b>	<b>9</b>
2.1	行列の定義 . . . . .	9
2.2	行列の和と定数倍 . . . . .	10
2.3	行列の積 . . . . .	10
2.4	正則行列 . . . . .	11
<b>第 3 章</b>	<b>行列式</b>	<b>13</b>
3.1	$n$ 次対称群 . . . . .	13
3.2	行列式の定義と基本的な性質 . . . . .	15
3.3	行列式の展開公式 . . . . .	21
3.4	余因子行列と逆行列 . . . . .	25
3.5	連立一次方程式への応用 (1) . . . . .	27
<b>第 4 章</b>	<b>行列の基本変形</b>	<b>30</b>
4.1	行列の基本変形と行列の階数 . . . . .	30
4.2	基本行列 . . . . .	32
4.3	逆行列の計算法 . . . . .	36
4.4	連立一次方程式への応用 (2) . . . . .	38
4.5	行列の固有値, 固有ベクトル, 固有多項式 . . . . .	45
4.6	掃き出し法 . . . . .	45
<b>第 5 章</b>	<b>ベクトル空間と線形写像</b>	<b>46</b>
5.1	ベクトル空間の定義と例 . . . . .	46
5.2	ベクトル部分空間の定義と例 . . . . .	48
5.3	線形写像の定義と例 . . . . .	49
5.4	ベクトル空間の次元 . . . . .	51
5.5	ベクトル空間の基底 . . . . .	54
5.6	次元定理 . . . . .	58
5.7	連立方程式への応用 (3) . . . . .	61

5.8	線形写像の表現行列 . . . . .	63
<b>第 6 章</b>	<b>内積をもったベクトル空間</b>	<b>66</b>
6.1	内積の定義と例 . . . . .	66
6.2	正規直交系, Schmidt の直交化 . . . . .	67
6.3	共役行列 . . . . .	71
6.4	ユニタリ行列, 直交行列 . . . . .	72
6.5	Hermite 行列, 対称行列 . . . . .	73
6.6	半正定値および正定値 Hermite 行列 . . . . .	77
6.7	ユニタリ行列により対角化できる複素行列 . . . . .	79

# 第1章 準備

この章では、本書で必要となる基本事項について解説する。抽象的で直ちにはわかりにくい所が多いと思うので、一通り目を通したら先に進んで、必要に応じて参照するようにしてもよい。

## 1.1 写像の単射性，全射性

三角関数とか指数関数などの関数という概念を非常に一般化したものとして、写像というものを考えよう。一般に二つの集合  $X$  と  $Y$  があったときに、 $X$  の各元に  $Y$  の元を対応させる規則が定義されるとき、 $X$  から  $Y$  への写像が定義されたといい、その写像を  $f$  と名付けたとすると、

$$f: X \rightarrow Y$$

と表す。いくつか具体的な例を見てみよう。

**例 1.1.1**  $X = Y = \mathbb{R}$  として、 $X$  の元  $x$  に対して  $Y$  の元  $x^2$  を対応させると、写像

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x \mapsto x^2)$$

が定義される。このように写像を定義する規則を明示的に表すのに  $x \mapsto x^2$  などと書く。

**例 1.1.2**  $X$  を実数全体とし  $Y$  を正の実数全体として、 $X$  の元  $x$  に  $Y$  の元  $e^x$  を対応させると、写像

$$f: X \rightarrow Y \quad (x \mapsto e^x)$$

が定義される。

**定義 1.1.3** 写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して

- 1) 任意の  $x, x' \in X$  に対して、 $x \neq x'$  ならば  $f(x) \neq f(x')$  となるとき、 $f$  は単射であるという。
- 2) 任意の  $y \in Y$  に対して  $f(x) = y$  となる  $x \in X$  が存在するとき、 $f$  は全射であるという。
- 3)  $f$  が単射でありかつ全射であるとき、 $f$  は全単射であるという。

## 1.2 群

**定義 1.2.1** 空でない集合  $G$  に二項演算  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  が定義されていて、次の三条件を満たすとき、 $G$  は演算  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  に関して群をなすという；

- 1) 任意の  $x, y, z \in G$  に対して  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  (即ち、結合法則が成り立つ),
- 2) 任意の  $x \in G$  に対して  $x \cdot e = e \cdot x = x$  となるような元  $e \in G$  が存在する,
- 3) 任意の  $x \in G$  に対して、 $x \cdot y = y \cdot x = e$  となる  $y \in G$  が存在する.

群の定義の条件 2) を満たす  $e \in G$  は唯一存在する. 実際、 $e$  と  $e'$  が条件 2) を満たすならば、 $e = e \cdot e' = e'$  となる. そこで、条件 2) を満たす  $e \in G$  を群  $G$  の単位元と呼び、 $1_G$  と書くことにする. 誤解が生じない場合には簡単に  $1$  と書く.

条件 3) を満たす  $y \in G$  は  $x \in G$  に対して唯一存在する. 実際、 $y$  と  $y'$  が条件 3) を満たすとすると、

$$y' = y' \cdot 1_G = y' \cdot (x \cdot y) = (y' \cdot x) \cdot y = 1_G \cdot y = y.$$

そこで、条件 3) を満たす  $y \in G$  を  $x \in G$  の逆元と呼び、 $x^{-1}$  と書くことにする.

**問 1.2.2** 群  $G$  における逆元に関して、次の関係を示せ；

- 1) 任意の  $g \in G$  に対して  $(g^{-1})^{-1} = g$ ,
- 2) 任意の  $g, h \in G$  に対して  $(g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$ .

本書では群について詳しく立ち入ることはしないが、次の幾つかの例を念頭において考えると理解の助けとなるよう；

**例 1.2.3**  $0$  でない実数の全体  $\mathbb{R}^\times$  は、実数の乘法に関して群をなす. 単位元は  $1$  であり、 $x \in \mathbb{R}^\times$  の逆元は  $x$  の逆数  $x^{-1}$  である.

**例 1.2.4** 整数全体

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

は、整数の加法に関して群をなす. 単位元は  $0$  であり、 $x \in \mathbb{Z}$  の逆元は  $-x \in \mathbb{Z}$  である.

**例 1.2.5** 一般に集合  $X$  に対して  $X$  から  $X$  への全単射全体のなす集合を  $S(X)$  と書く.  $S(X)$  の元  $\sigma, \tau$  に対して、その合成写像  $\sigma \circ \tau$  は再び  $X$  から  $X$  への全単射となるから  $S(X)$  の元である. 又  $X$  の恒等写像  $1_X$  は  $S(X)$  の元である. 更に、 $\sigma$  が  $S(X)$  の元ならば、その逆写像  $\sigma^{-1}$  も  $S(X)$  の元である. ここで次の三つの主張が成り立つことは容易に確認できるであろう；

- 1)  $S(X)$  の任意の元  $\sigma, \tau, \rho$  に対して, 結合法則  $(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$  が成り立つ,
- 2)  $S(X)$  の任意の元  $\sigma$  に対して  $\sigma \circ 1_X = 1_X \circ \sigma = \sigma$  である,
- 3)  $S(X)$  の任意の元  $\sigma$  に対して  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1_X$  である.

即ち,  $S(X)$  は写像の合成を演算とする群をなす. 単位元は恒等写像  $1_X$  であり,  $\sigma \in S(X)$  の逆元は  $\sigma$  の逆写像である.

上の例 1.2.5 で特に  $X$  が  $n$  個の元からなる有限集合の場合, 群  $S(X)$  を  $n$  次対称群と呼んで, 第 3 章で行列式を定義するときに重要な働きをする.  $n$  次対称群の詳しい性質は 3.1 節で示すことにして, まず群一般に対して成り立つ性質を示しておく.

**命題 1.2.6** 群  $G$  に対して

- 1)  $x \in G$  にその逆元を対応させる写像  $x \mapsto x^{-1}$  は  $G$  から  $G$  への全単射である.
- 2) 任意の  $g \in G$  を固定したとき,  $G$  から  $G$  への写像  $x \mapsto x \cdot g$  及び  $x \mapsto g \cdot x$  は共に全単射である.

[証明] 1)  $(x^{-1})^{-1} = x$  だから (問 1.2.2) 明らか.

2)  $x, x' \in G$  に対して  $x \cdot g = x' \cdot g$  ならば, 両辺に右から  $g^{-1}$  をかけて,  $x = x'$  を得るから,  $x \mapsto x \cdot g$  は単射である. 一方, 任意の  $y \in G$  に対して,  $x = x \cdot g^{-1} \in G$  とおくと  $x \cdot g = y$  となるから,  $x \mapsto x \cdot g$  は全射だる. よって  $x \mapsto x \cdot g$  は全単射である. 写像  $x \mapsto g \cdot x$  が全単射であることも同様に示される. 詳細は読者に委ねる. ■

本書の内容を理解するのに必須のものではないが, 見通しが良くなることもあろうかと思うので, 群の準同型写像について簡単に触れておく.

**定義 1.2.7**  $G, H$  を群とする. このとき, 任意の  $x, y \in G$  に対して  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$  となる写像  $f: G \rightarrow H$  を, 群  $G$  から  $H$  への群の準同型写像と呼ぶ.

次に群の準同型写像の最も基本的な性質を幾つか示す.

**命題 1.2.8** 群の準同型写像  $f: G \rightarrow H$  に対して

- 1)  $f(1_G) = 1_H$ . 即ち, 単位元は自動的に単位元に写される.
- 2) 任意の  $x \in G$  に対して  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ . 即ち, 逆元は自動的に逆元に写される.

[証明] 1)  $1_G \cdot 1_G = 1_G$  だから, 両辺を  $f$  で写すと,  $f(1_G) \cdot f(1_G) = f(1_G)$  となる. 両辺に右から  $f(1_G)^{-1}$  をかければ,  $f(1_G) = f(1_G)^{-1} \cdot f(1_G) = 1_H$  となる.

2)  $x \cdot x^{-1} = 1_G$  の両辺を  $f$  で写せば, 1) より

$$f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(1_G) = 1_H.$$

よって両辺に左から  $f(x)^{-1}$  をかけて,  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$  となる. ■

### 1.3 環と体

**定義 1.3.1** 集合  $A$  の元  $a, b \in A$  に対して, その和  $a + b \in A$  と積  $ab \in A$  が定義されていて, 次の諸条件を満たすとき,  $A$  は環であるという;

- 1)  $A$  は加法  $(a, b) \mapsto a + b$  に関して可換群となる. 単位元を  $0$  で表す.
- 2) 積に関して結合法則が成り立つ, 即ち, 任意の  $a, b, c \in A$  に対して  $a(bc) = (ab)c$  となる.
- 3) 或元  $1 \in A$  があって, 任意の  $a \in A$  に対して  $1a = a1 = a$  となる.
- 4) 積に関して交換法則が成り立つ, 即ち, 任意の  $a, b \in A$  に対して  $ab = ba$  となる.
- 5) 分配法則が成り立つ, 即ち, 任意の  $a, b, c \in A$  に対して  $a(b+c) = ab+ac$  となる.

上の定義で, 条件 3) で存在を仮定した特別な元  $1 \in A$  は唯一存在することは容易にわかる. 又  $0a = (0+0)a = 0a+0a$  より全ての  $a \in A$  に対して  $0a = 0$  となる. よって, もしも  $1 = 0$  ならば  $A = \{0\}$  となるので, 以下,  $1 \neq 0$  である環のみを考えることにする.

**例 1.3.2** 整数の全体

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

は整数の加法と整数の乗法に関して環をなす. 又, 有理数の全体  $\mathbb{Q}$ , 実数の全体  $\mathbb{R}$ , 複素数の全体  $\mathbb{C}$  はそれぞれ有理数, 実数, 複素数の加法と乗法に関して環をなす.

**例 1.3.3** 環  $A$  と変数  $X$  に対して

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \quad (a_i \in A, n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

の形の有限和の全体を  $A[X]$  と書いて,  $f(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i, g(X) = \sum_{i \geq 0} b_i X^i \in A[X]$  の和  $f(X) + g(X) \in A[X]$  と積  $f(X)g(X) \in A[X]$  をそれぞれ

$$f(X) + g(X) = \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) X^i, \quad f(X)g(X) = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k$$

により定義すると,  $A[X]$  は環となる. 環  $A[X]$  を  $A$ -係数の一変数多項式環と呼ぶ.

**例 1.3.4**  $i$  を虚数単位として

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

とおくと,  $\mathbb{Z}[i]$  は複素数の加法と乗法に関して環となる.

**定義 1.3.5** 環  $A$  に元  $a \in A$  に対して,  $ab = 1$  となるような元  $b \in A$  が存在するとき,  $a$  は  $A$  可逆元であるという. 環  $A$  の可逆元全体の集合を  $A^\times$  と書くと, これは  $A$  の乗法に関して可換群となる.  $A^\times$  を環  $A$  乗法群と呼ぶ.

**例 1.3.6** 例 1.3.2 や例 1.3.4 で定義した環  $\mathbb{Z}$  や  $\mathbb{Z}[i]$  に対して

$$\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}, \quad \mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$$

である. 又, 一般に環  $A$  を係数とする一変数多項式環  $A[X]$  に対して  $A[X]^\times = A^\times$  である.

**定義 1.3.7** 環  $A$  が  $A^\times = \{0 \neq a \in A\}$  を満たすとき, 即ち,  $A$  の  $0$  以外の全ての元が可逆元であるとき, 環  $A$  を体と呼ぶ.

**例 1.3.8** 有理数の全体  $\mathbb{Q}$ , 実数の全体  $\mathbb{R}$ , 複素数の全体  $\mathbb{C}$  は体である. 又, 虚数単位  $i$  に対して

$$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

は複素数の加法と乗法に関して体をなす. 整数の全体  $\mathbb{Z}$  は体ではない.



## 第2章 行列

この章を通して  $K$  は一般の環であるとする. 一般の環に馴染のない読者は,  $K$  は有理数の全体  $\mathbb{Q}$ , 実数の全体  $\mathbb{R}$  又は複素数の全体  $\mathbb{C}$  であるとして読んでかまわない.

### 2.1 行列の定義

二重に番号付けられた  $K$  の元  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) を  $m$  行  $n$  列に並べたもの

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を,  $K$  の元を成分にもつ  $(m, n)$ -行列と呼び,  $a_{ij}$  を行列  $A$  の  $(i, j)$ -成分と呼ぶ. 上から  $i$  番目の横の一並び  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  を行列  $A$  の第  $i$  行と呼び, 左から  $j$  番目の縦の一並び  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$  を行列  $A$  の第  $j$  列と呼ぶ. これから行列の成分に対する様々な計算を行う際に, 表記を簡潔に行うために, 行列  $A$  の  $(i, j)$ -成分を  $A_{ij}$  と書く事にする.  $K$  の元を成分にもつ  $(m, n)$ -行列全体のなす集合を  $M_{m,n}(K)$  と表す. 成分がすべて 0 である  $(m, n)$ -行列を  $O_{m,n}$  と書き, 零行列と呼ぶ.

$(n, n)$ -行列, 即ち  $n$  行  $n$  列の行列を  $n$  次正方行列と呼ぶ.  $n$  次正方行列  $A$  の成分  $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$  を  $A$  の対角成分と呼ぶ. 対角成分が全て 1, その他の成分が全て 0 である  $n$  次正方行列を,  $n$  次単位行列と呼び,  $I_n$  と表す;

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

環  $K$  の元を成分とする  $n$  次正方行列の全体を  $M_n(K)$  と表す.

## 2.2 行列の和と定数倍

$(n, m)$ -行列  $A, B \in M_{m,n}(K)$  の和  $A + B \in M_{m,n}(K)$  を

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$$

により定義する. 即ち  $A + B$  の  $(i, j)$ -成分は  $A$  の  $(i, j)$ -成分と  $B$  の  $(i, j)$ -成分の和である. 次の性質を示す事は容易である;

- 1) 任意の  $A, B, C \in M_{m,n}(K)$  に対して  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,
- 2) 任意の  $A, B \in M_{m,n}(K)$  に対して  $A + B = B + A$ ,
- 3) 任意の  $A \in M_{m,n}(K)$  に対して  $A + 0_{mn} = A$ .

$\lambda \in K$  と  $A \in M_{m,n}(K)$  に対して,  $A$  の  $\lambda$  倍  $\lambda \cdot A \in M_{m,n}(K)$  を

$$(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$$

により定義する. 即ち  $\lambda \cdot A$  は  $A$  の各成分を一斉に  $\lambda$  倍したものである. 次の性質を示す事は容易である;

- 1) 任意の  $\lambda \in K$  と  $A, B \in M_{m,n}(K)$  に対して  $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ ,
- 2) 任意の  $\lambda, \mu \in K$  と  $A \in M_{m,n}(K)$  に対して  $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ ,
- 3) 任意の  $A \in M_{mn}(K)$  に対して  $0 \cdot A = 0_{mn}$ .

## 2.3 行列の積

二つの行列  $A \in M_{lm}(K)$  と  $B \in M_{mn}(K)$  の積  $AB \in M_{ln}(K)$  を

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, n)$$

により定義する. 夫々の行列のサイズに注意しよう.  $A$  は  $(l, m)$ -行列,  $B$  は  $(m, n)$ -行列であるときに限り積  $AB$  が定義されて,  $AB$  は  $(l, n)$ -行列となる. 行列の積は次の性質をもつ;

- 定理 2.3.1** 1) 三つの行列  $A, B, C$  に対して, 積  $AB$  及び  $BC$  が定義されるならば  $(AB)C = A(BC)$ ,
- 2) 任意の  $A \in M_{m,n}(K)$  に対して  $I_m A = A I_n = A$ ,
  - 3) 任意の  $A \in M_{lm}(K)$  と  $B, C \in M_{mn}(K)$  に対して  $A(B + C) = AB + AC$ ,

特に  $n$  次正方行列の集合  $M_n(K)$  では, 任意の  $A, B \in M_n(K)$  に対して和  $A+B \in M_n(K)$  と積  $AB \in M_n(K)$  が定義されて, 積の交換法則を除けば環の公理を全て満たす. ここで, 行列の積に関しては一般には積の交換法則は成り立たない事に注意しよう. 実際, 例えば  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  に対して

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

となり,  $AB \neq BA$  である.

**問 2.3.2**  $(m, n)$ -行列  $A$  の行と列を入れ替えた行列を  $A$  の転置行列と呼び  ${}^tA$  と書く. 即ち  ${}^tA$  は  $(n, m)$ -行列で,  ${}^tA$  の  $(i, j)$ -成分は  $A$  の  $(j, i)$ -成分である.  $(l, m)$ -行列  $A$  と  $(m, n)$ -行列  $B$  に対して  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$  であることを示せ.

**問 2.3.3**  $n$  次正方行列で, 対角成分の下側の成分が全て 0 である行列を,  $n$  次上三角行列と呼ぶ. 同様に対角成分の上側の成分が全て 0 である行列を下三角行列と呼ぶ;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : \text{上三角行列.}$$

二つの  $n$  次上三角行列の積は上三角行列であることを示せ. 又, 二つの  $n$  次下三角行列の積は下三角行列であることを示せ.

## 2.4 正則行列

**定義 2.4.1**  $n$  次正方行列  $A \in M_n(K)$  に対して,

$$AB = BA = I_n$$

なる  $n$  次正方行列  $B \in M_n(K)$  が存在するとき,  $A$  を  $n$  次正則行列と呼ぶ.

$A \in M_n(K)$  を  $n$  次正則行列とすると,

$$AB = BA = I_n \tag{2.1}$$

なる  $n$  次正方行列  $B \in M_n(K)$  は  $A$  に対して唯一存在する. 実際,  $n$  次正方行列  $B' \in M_n(K)$  が  $AB' = B' = I_n$  を満たすならば,

$$B' = B' I_n = B'(AB) = (B'A)B = I_n B = B$$

となる. そこで  $B$  を  $A$  の逆行列と呼び,  $A^{-1}$  と表す.

**定理 2.4.2** 1) 単位行列  $I_n \in M_n(K)$  は正則行列で,  $I_n^{-1} = I_n$  である.

2) 正則行列  $A \in M_n(K)$  に対して, 逆行列  $A^{-1} \in M_n(K)$  は正則行列で  $(A^{-1})^{-1} = A$  である.

3) 正則行列  $A, B \in M_n(K)$  に対して, 積  $AB \in M_n(K)$  は正則行列で  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  である.

正方行列の正則性は, 成分の属する環  $K$  を特定して始めて意味を成すことに注意しよう. 例えば

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

は  $M_2(\mathbb{Q})$  の元としては正則で  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  となるが,  $M_2(\mathbb{Z})$  の元としては正則ではない.

**問 2.4.3**  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  は  $M_2(\mathbb{Z})$  の元としては正則でないことを示せ.

**問 2.4.4**  $n$  次正方行列  $A \in M_n(K)$  に対して

$$AX = YA = I_n$$

なる  $n$  次正方行列  $X, Y \in M_n(K)$  が存在するならば,  $A$  は正則行列で  $X = Y = A^{-1}$  である事を示せ.

**問 2.4.5**  $n$  次正方行列  $X$  をとって  $A = I_n - X$  とおく. ある正の整数  $m$  に対して  $X^m = 0$  ならば,  $A$  は正則行列で

$$A^{-1} = I_n + X + X^2 + \cdots + X^{m-1}$$

であることを示せ.

## 第3章 行列式

この章を通して  $K$  は一般の環であるとする。一般の環に馴染のない読者は、 $K$  は有理数の全体  $\mathbb{Q}$ 、実数の全体  $\mathbb{R}$  又は複素数の全体  $\mathbb{C}$  であるとして読んでかまわない。

### 3.1 $n$ 次対称群

**命題 3.1.1** 1)  $\tau \in S(X)$  を固定したとき、 $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$  と  $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$  はそれぞれ  $S(X)$  から  $S(X)$  への全単射を与える。

2)  $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$  は  $S(X)$  から  $S(X)$  への全単射を与える。

[証明] 1)  $\sigma, \sigma' \in S(X)$  に対して  $\sigma \circ \tau = \sigma' \circ \tau$  とすると、両辺に右から  $\tau^{-1}$  を合成して  $(\sigma \circ \tau) \circ \tau^{-1} = (\sigma' \circ \tau) \circ \tau^{-1}$ 。ここで結合法則から

$$(\sigma \circ \tau) \circ \tau^{-1} = \sigma \circ (\tau \circ \tau^{-1}) = \sigma \circ 1_X = \sigma.$$

同様に  $(\sigma' \circ \tau) \circ \tau^{-1} = \sigma'$  となるから  $\sigma = \sigma'$  となり、写像  $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$  は単射である。一方、任意の  $\rho \in S(X)$  に対して、 $\alpha = \rho \circ \tau^{-1} \in S(X)$  とおくと、再び結合法則から

$$\sigma \circ \tau = (\rho \circ \tau^{-1}) \circ \tau = \rho \circ (\tau \circ \tau^{-1}) = \rho \circ 1_X = \rho$$

となるから、写像  $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$  は全射である。同様にして写像  $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$  が全単射であることもわかる。

2) 任意の  $\sigma \in S(X)$  に対して  $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$  である。よって  $\sigma, \sigma' \in S(X)$  に対して  $\sigma^{-1} = \sigma'^{-1}$  ならば  $\sigma = \sigma'$  となる。又任意の  $\rho \in S(X)$  に対して  $\sigma = \rho^{-1} \in S(X)$  とおくと  $\sigma^{-1} = \rho$  となるから、 $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$  は全単射である。

■

正の整数  $n$  に対して  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  であるとき、 $S(X)$  を  $S_n$  と書いて、 $n$  次対称群と呼ぶのである。 $n$  次対称群  $S_n$  の元  $\sigma$  は  $1, 2, 3, \dots, n$  における値によって決まるのだから、 $\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \sigma(3) = i_3, \dots, \sigma(n) = i_n$  であるときに

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

と表すことにする.  $\sigma$  は  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  から  $X$  への全単射だから,  $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$  は  $(1, 2, 3, \dots, n)$  の並べ替えである. 逆に  $(1, 2, 3, \dots, n)$  の並べ替え  $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$  に対して (3.1) なる  $S_n$  の元  $\sigma$  が定まる. 特に  $S_n$  の元の個数は  $n!$  である. (3.1) で, 上下の対応を乱さない限りは, 並べる順序は自由に変えてもよい. そこで  $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$  の順序を  $(1, 2, 3, \dots, n)$  に並べ替えて

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

となったとすると,  $\sigma$  の逆写像は

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

と表される. 恒等写像  $1_X$  を  $1_n$  と書くことにすると

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

である. (3.1) のような表し方を用いれば合成写像の計算も容易である. 例え

ば  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$  に対して

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

である. この例からもわかる通り,  $n$  次対称群  $S_n$  では一般には  $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$  である. 即ち交換法則は一般には成り立たない.

行列式の定義で用いるために,  $S_n$  の元の '符号' を定義しよう. そのために  $n$  個の変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の多項式  $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$  を

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$$

により定義する. 即ち

$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, \dots, X_n) &= (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_1 - X_4) \cdots (X_1 - X_n) \\ &\quad (X_2 - X_3)(X_2 - X_4) \cdots (X_2 - X_n) \\ &\quad (X_3 - X_4) \cdots (X_3 - X_n) \\ &\quad \vdots \\ &\quad (X_{n-1} - X_n) \end{aligned}$$

とおく. この式を見てわかるように, 任意の二つの変数を交換すると多項式  $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$  は  $-1$  倍される. 従って任意の  $\sigma \in S_n$  に対して

$$P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot P(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

なる  $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$  が定まる. これを  $\sigma$  の符号と呼ぶ.

**命題 3.1.2** 1) 任意の  $\sigma, \tau \in S_n$  に対して  $\text{sign}(\sigma \circ \tau) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)$  である.

2)  $\text{sign}(1_n) = 1$ .

3) 任意の  $\sigma \in S_n$  に対して  $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$  である.

[証明] 1) 定義から  $P(X_{\sigma \circ \tau(1)}, \dots, X_{\sigma \circ \tau(n)}) = \text{sign}(\sigma \circ \tau)P(X_1, \dots, X_n)$  である. 一方

$$\begin{aligned} P(X_{\sigma \circ \tau(1)}, \dots, X_{\sigma \circ \tau(n)}) &= P(X_{\sigma(\tau(1))}, \dots, X_{\sigma(\tau(n))}) \\ &= \text{sign}(\sigma)P(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(n)}) \\ &= \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)P(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

よって  $\text{sign}(\sigma \circ \tau) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)$  となる.

2) 明らか.

3)  $\sigma \circ \sigma^{-1} = 1_n$  だから 2) より  $\text{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \text{sign}(1_n) = 1$ . 一方 1) より  $\text{sign}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\sigma^{-1})$ . よって  $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)^{-1} = \text{sign}(\sigma)$  となる. ■

**例 3.1.3** 小さい  $n$  に対して  $n$  次対称群の各元の符号は次の通りである.  $n = 2$  のとき

$$\begin{array}{c|cc} \sigma & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \text{sign}(\sigma) & 1 & -1 \end{array}$$

$n = 3$  のとき

$$\begin{array}{c|ccc} \sigma & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \text{sign}(\sigma) & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \sigma & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline \text{sign}(\sigma) & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

## 3.2 行列式の定義と基本的な性質

**定義 3.2.1**  $n$  次正方行列  $A \in M_n(K)$  に対して

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) A_{1, \sigma(1)} A_{2, \sigma(2)} \cdots A_{n, \sigma(n)}$$

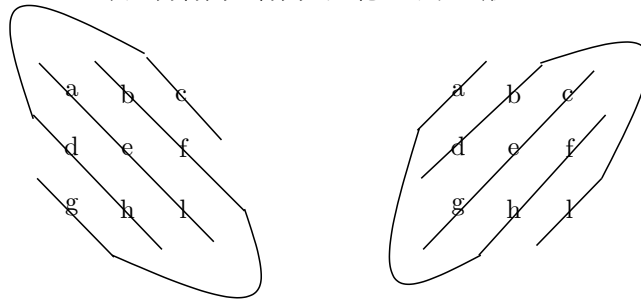
と定義して、これを  $A$  の行列式と呼ぶ。

例 3.1.3 を用いて 2 次及び 3 次正方行列の行列式を定義に基づいて書き下すと

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc, \quad (3.2)$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix} = ael - bdl - ceg - afh + bfg + cdh \quad (3.3)$$

となる。2 次正方行列の行列式は覚えやすい形である。3 次正方行列の行列式は



上の左の図で線上にある各成分をかけて加えたものから右の図で線上にある各成分をかけて加えたものを引いた形になっている。

以下、一般の  $n$  次正方行列の行列式の性質を幾つか証明しよう。まず

**定理 3.2.2**  $n$  次正方行列  $A$  の転置行列  ${}^t A$  の行列式は  $A$  の行列式に等しい； $\det({}^t A) = \det A$ 。言い換えれば

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n}$$

となる。

[証明]  $\sigma \in S_n$  を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

と書くと、 $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$  と書けるから

$$\begin{aligned} A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{n,\sigma(n)} &= A_{1,i_1} A_{2,i_2} \cdots A_{n,i_n} \\ &= A_{j_1,1} A_{j_2,2} \cdots A_{j_n,n} \\ &= A_{\sigma^{-1}(1),1} A_{\sigma^{-1}(2),2} \cdots A_{\sigma^{-1}(n),n} \end{aligned}$$



となる。ところで命題 3.1.1 より  $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$  は  $S_n$  から  $S_n$  への全単射である。即ち  $\sigma$  が  $S_n$  の上をもれなく動くとき  $\tau = \sigma^{-1}$  はやはり  $S_n$  の上をもれなく動く。更に命題 3.1.2 より  $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1})$  だから

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sign}(\tau) A_{\tau(1),1} A_{\tau(2),2} \cdots A_{\tau(n),n} \end{aligned}$$

となる。■

さて、行列式の基本的な性質を能率良く表現するために、次のような略記法を用いよう。 $n$  次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

の各行を  $n$  次横ベクトルと見做して

$$a'_i = [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}] \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

とおいて

$$A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

と表す。同様に  $A$  の各列を  $n$  次縦ベクトルと見做して

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

とおいて  $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$  と表すのである。

**定理 3.2.3** 1)  $\lambda \in K$  に対して

$$\det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ \lambda a_r \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a_r \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} .$$

即ち、 $n$  次正方行列のある行が一斉に  $\lambda$  倍されておれば、その行列式は、もとの正方行列の行列式の  $\lambda$  倍となる。

2)

$$\det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a'_r + a''_r \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a'_r \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a''_r \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

即ち、 $n$  次正方行列のある行の成分が一斉に和になっておれば、その行列式は対応する二つの行列式の和となる。

[証明] 1)  $n$  次正方行列 (3.4) の第  $r$  行の成分が  $\lambda a_{rj}$  となっているから、行列式の定義から

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots \lambda a_{r,\sigma(r)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{r,\sigma(r)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

となる。

2)  $n$  次正方行列 (3.4) の第  $r$  行の成分が  $a_{rj} = a'_{rj} + a''_{rj}$  となっているから、行列式の定義から

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{r,\sigma(r)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{r,\sigma(r)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a''_{r,\sigma(r)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

となる。■

**定理 3.2.4** 任意の  $\tau \in S_n$  に対して

$$\det[a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \dots, a_{\tau(n)}] = \text{sign}(\tau) \det[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

である。即ち、行列式の列の順序を  $\tau$  に従って交換すると、行列式は  $\tau$  の符号倍される。

[証明] 行列  $[a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \dots, a_{\tau(n)}]$  の  $(i, j)$ -成分は  $a_{i, \tau(j)}$  であるから行列式の定義から

$$\text{左辺} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1, \tau \circ \sigma(1)} a_{2, \tau \circ \sigma(2)} \cdots a_{n, \tau \circ \sigma(n)} \quad (3.5)$$

である. 命題 3.1.1 より  $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$  は  $S_n$  から  $S_n$  への全単射を与えるから,  $\sigma$  が  $S_n$  の上をもれなく重複なく動くとき  $\rho = \tau \circ \sigma$  も  $S_n$  の上をもれなく重複なく動く. よって  $\sigma = \tau^{-1} \circ \rho$  に注意すれば, (3.5) の右辺の和は

$$\sum_{\rho \in S_n} \text{sign}(\tau^{-1} \circ \rho) a_{1, \rho(1)} a_{2, \rho(2)} \cdots a_{n, \rho(n)} \quad (3.6)$$

に等しい. ここで命題 3.1.2 より  $\text{sign}(\tau^{-1} \circ \sigma) = \text{sign}(\tau) \text{sign}(\sigma)$  だから, 和 (3.6) は

$$\text{sign}(\tau) \sum_{\rho \in S_n} a_{1, \rho(1)} a_{2, \rho(2)} \cdots a_{n, \rho(n)}$$

に等しく, これは行列式の定義から, 求める等式の右辺に等しい. ■

定理 3.2.2 を用いて, 行列式で行と列の立場を交換してみれば, 定理 3.2.3 と定理 3.2.4 から直ちに次の二つの系が得られる;

系 3.2.5 1)  $\lambda \in K$  に対して

$$\begin{aligned} & \det[a_1, \dots, a_{r-1}, \lambda a_r, a_{r+1}, \dots, a_n] \\ &= \lambda \det[a_1, \dots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n]. \end{aligned}$$

即ち,  $n$  次正方行列のある列が一斉に  $\lambda$  倍されておれば, その行列式は, もとの正方行列の行列式の  $\lambda$  倍となる.

2)

$$\begin{aligned} & \det[a_1, \dots, a_{r-1}, a'_r + a''_r, a_{r+1}, \dots, a_n] \\ &= \det[a_1, \dots, a_{r-1}, a'_r, a_{r+1}, \dots, a_n] + \det[a_1, \dots, a_{r-1}, a''_r, a_{r+1}, \dots, a_n]. \end{aligned}$$

即ち,  $n$  次正方行列のある列の成分が一斉に和になっておれば, その行列式は対応する二つの行列式の和となる.

系 3.2.6 任意の  $\tau \in S_n$  に対して

$$\det \begin{bmatrix} a_{\tau(1)} \\ a_{\tau(2)} \\ \vdots \\ a_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \text{sign}(\tau) \det \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

である. 即ち, 行列式の行の順序を  $\tau$  に従って交換すると, 行列式は  $\tau$  の符号倍される.

次の定理も行列式の基本的な性質の一つである。

**定理 3.2.7**  $n$  次正方行列  $A$  において、相異なる 2 行又は相異なる 2 列が一致するならば  $\det A = 0$  である。

[証明]  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  行が等しいとしよう。  $i < j$  とする。  $\tau \in S_n$  を

$$\tau(k) = \begin{cases} k & k \neq i, j \text{ のとき} \\ j & k = i \text{ のとき} \\ i & k = j \text{ のとき} \end{cases}$$

により定義する。つまり  $\tau$  は番号  $i$  と  $j$  を交換し、その他の番号は動かさないとするのである。すると  $\text{sign}(\tau) = -1$  である。よって  $\text{sign}(\sigma) = 1$  なる  $\sigma \in S_n$  の全体を  $A_n$  と書くと、  $\sigma(\rho) = -1$  なる  $\rho \in S_n$  の全体は  $\{\sigma \circ \tau \mid \sigma \in A_n\}$  となる。この集合を  $A_n \circ \tau$  と書くと、命題 3.1.1 より  $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$  は  $A_n$  から  $A_n \circ \tau$  への全単射を与える。  $S_n$  は  $A_n$  と  $A_n \circ \tau$  の合併集合で  $A_n \cap A_n \circ \tau = \emptyset$  だから、行列式の定義から

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in A_n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in A_n} \text{sign}(\sigma \circ \tau) a_{1,\sigma \circ \tau(1)} a_{2,\sigma \circ \tau(2)} \cdots a_{n,\sigma \circ \tau(n)} \end{aligned}$$

となる。第二の和の各項で、積の順序を交換すると

$$a_{1,\sigma \circ \tau(1)} a_{2,\sigma \circ \tau(2)} \cdots a_{n,\sigma \circ \tau(n)} = a_{\tau^{-1}(1),\sigma(1)} a_{\tau^{-1}(2),\sigma(2)} \cdots a_{\tau^{-1}(n),\sigma(n)}$$

となるが、 $A$  の第  $i$  行と第  $j$  行が等しいことと  $\tau$  の定義から、これは  $a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$  に等しい。よって

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in A_n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &\quad - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。定理 3.2.2 を用いれば列に関する主張が成り立つ。 ■

最後に行列の積と行列式の関係述べる。

**定理 3.2.8**  $n$  次正方行列  $A, B$  に対して  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  である。

[証明]  $n$  次正方行列  $A, B$  を次のように表しておく；

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

$b_i$  は行列  $B$  の第  $i$  行である。さて行列の積  $AB$  の定義から

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k_1=1}^n a_{1,k_1} b_{k_1} \\ \sum_{k_2=1}^n a_{2,k_2} b_{k_2} \\ \vdots \\ \sum_{k_n=1}^n a_{n,k_n} b_{k_n} \end{bmatrix}$$

と書けるから、行列式の性質（定理 3.2.3）から

$$\det(AB) = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_n=1}^n a_{1,k_1} a_{2,k_2} \cdots a_{n,k_n} \det \begin{bmatrix} b_{k_1} \\ b_{k_2} \\ \vdots \\ b_{k_n} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

となる。ここで  $k_1, k_2, \dots, k_n$  のなかに同じ番号があれば、定理 3.2.7 から

$$\det \begin{bmatrix} b_{k_1} \\ b_{k_2} \\ \vdots \\ b_{k_n} \end{bmatrix} = 0$$

であるから、(3.7) 式は

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \times \det \begin{bmatrix} b_{\sigma(1)} \\ b_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ b_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

と書ける。これは、系 3.2.6 と行列式の定義から、

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \times \det B = \det A \times \det B$$

に等しい。■

### 3.3 行列式の展開公式

3 次正方行列の式 (3.3) を、第一行の成分  $a, b, c$  でまとめてみると

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & l \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & l \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

となる．同じ式を第二列の成分  $b, e, h$  についてまとめてみると

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix} = -b \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & l \end{bmatrix} + e \det \begin{bmatrix} a & c \\ g & l \end{bmatrix} - h \det \begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$$

となる．同様に各行，各列の三つの成分についてまとめると，

$$(i, j)\text{-成分} \times \det(i \text{ 行と } j \text{ 列を取り除いた } (2, 2)\text{-行列})$$

という項を足したり引いたりした形となり，各項の符号は

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

となっていることがわかる．本節の目標は，同様のことが一般の  $n$  次正方行列の行列式においても成り立つことを示すことにある．まず特殊な形の行列の行列式から始めよう；

### 命題 3.3.1

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \times a_{nn}.$$

又

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \times a_{nn}.$$

である．

[証明] 定理 3.2.2 より，第二の等式は第一の等式から従うので，第一の等式を証明する．右辺に現れた  $n$  次正方行列を  $A$  と書くと，行列式の定義から

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n-1,\sigma(n-1)} A_{n,\sigma(n)}$$

となるが， $A_{n,\sigma(n)} \neq 0$  となるのは  $\sigma(n) = n$  の場合に限るから

$$\det A = \sum_{\sigma}' \text{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n-1,\sigma(n-1)} \times a_{nn}$$

となる. ここで  $\sum_{\sigma'}'$  は  $\sigma(n) = n$  なる  $\sigma \in S_n$  の上をわたる和である. そのような  $\sigma$  は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} & n \end{pmatrix} \in S_n$$

と書けて,  $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$  は  $(1, 2, \dots, n-1)$  の並べ替えだから,

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} \end{pmatrix} \in S_{n-1}$$

とおく.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \times \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n)$$

に注意すれば  $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma')$  であることがわかる. 又,  $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$  は  $(1, 2, \dots, n-1)$  の全ての並べ替えを生ずるから

$$\det A = \sum_{\tau \in S_{n-1}} \text{sign}(\tau) A_{1,\tau(1)} \cdots A_{n-1,\tau(n-1)} \times a_{nn}$$

となり, これは求める等式の右辺に等しい. ■

この命題を繰り返し用いれば, 次の系が直ちに得られる;

**系 3.3.2** 上または下三角行列の行列式は, 対角成分の積に等しい;

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

さて一般の  $n$  次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

の第  $n$  列を

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

と書くと, 系 3.2.5 より

$$\det A = \sum_{i=1}^n \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n-1} & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

となる. ここで, 第  $i$  行を第  $i+1$  行と交換し, 第  $i+1$  行を第  $i+2$  行と交換し, と続けると, 相異なる二行を交換するたびに行列式は  $-1$  倍されるのだから (系 3.2.6),

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n-1} & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{n-i} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n-1} & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. よって命題 3.3.1 を用いると

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} a_{in} \det \left( \begin{array}{c} A \text{ から第 } i \text{ 行, 第 } n \text{ 列} \\ \text{を除いた行列} \end{array} \right) \quad (3.8)$$



となる。ここでは  $n$  次正方行列  $A$  の第  $n$  列に注目したが、途中の第  $k$  列に注目するとどうなるであろうか。その場合、第  $k$  列と第  $k+1$  列を交換し、第  $k+1$  列と第  $k+2$  列を交換し、と続けて、注目した第  $k$  列を第  $n$  列に持ってくる事ができるであろう。その際、行列式は  $(-1)^{n-k}$  倍される。そのように変形した行列に、公式 (3.8) を適用すれば

$$\det A = (-1)^{n-k} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} a_{ik} \det \left( \begin{array}{c} A \text{ から第 } i \text{ 行, 第 } k \text{ 列} \\ \text{を除いた行列} \end{array} \right)$$

となる。この式を少し整理して、次の定理を得る；

**定理 3.3.3**  $n$  次正方行列  $A$  に対して、 $1 \leq k \leq n$  を固定すると、

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} A_{ik} \det \left( \begin{array}{c} A \text{ から第 } i \text{ 行, 第 } k \text{ 列} \\ \text{を除いた行列} \end{array} \right)$$

である。

上の定理を転置行列に適用すれば、次の系を得る；

**系 3.3.4**  $n$  次正方行列  $A$  に対して、 $1 \leq k \leq n$  を固定すると、

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} A_{kj} \det \left( \begin{array}{c} A \text{ から第 } k \text{ 行, 第 } j \text{ 列} \\ \text{を除いた行列} \end{array} \right)$$

である。

定理 3.3.3 と系 3.3.4 をそれぞれ、第  $k$  列、第  $k$  行に関する行列式の展開公式と呼ぶ。行列式の展開公式を用いれば、 $n$  次正方行列の計算は  $n-1$  次正方行列の計算に帰着されるので、これを繰り返せば具体的に与えられた行列の行列式を計算することが出来るであろう。

### 3.4 余因子行列と逆行列

$n$  次正方行列  $A \in M_n(K)$  が正則ならば、 $AB = BA = I_n$  なる  $n$  次正方行列  $B \in M_n(K)$  が存在する。そこで  $AB = I_n$  の両辺の行列式をとって、定理 3.2.8 を用いると、

$$\det A, \det B \in K, \quad \det A \cdot \det B = 1$$

となり、 $\det A$  は環  $K$  の可逆元でなければならない。この逆は成り立つだろうか。それを調べるために、まず余因子行列を定義する。

**定義 3.4.1**  $n$  次正方行列  $A \in M_n(K)$  に対して,  $n$  次正方行列  $\tilde{A} \in M_n(K)$  を

$$(\tilde{A})_{ij} = (-1)^{i+j} \det \left( \begin{array}{c} A \text{ から第 } j \text{ 行, 第 } i \text{ 列} \\ \text{を除いた行列} \end{array} \right) \\ (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

により定義する.  $\tilde{A}$  を  $A$  の余因子行列と呼ぶ.

$A$  の余因子行列の成分は,  $A$  展開公式に現れる因子と同様の形をしていることに気付くであろう. ただし,  $A$  から取り除く行番号と列番号が逆転していることに注意しよう. さて, 余因子行列の基本的な性質は次の定理である;

**定理 3.4.2**  $n$  次正方行列  $A \in M_n(K)$  の余因子行列  $\tilde{A} \in M_n(K)$  に対して

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I_n$$

が成り立つ.

[証明] 行列の積  $A\tilde{A}$  の  $(i, j)$ -成分を定義に従って書くと

$$(A\tilde{A})_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}(\tilde{A})_{kj} \\ = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} A_{ik} \det \left( \begin{array}{c} A \text{ から第 } j \text{ 行, 第 } k \text{ 列} \\ \text{を除いた行列} \end{array} \right)$$

となる. これを第  $j$  行に関する  $A$  の展開公式と比較すると, 行列  $A$  の第  $j$  行に第  $i$  行を代入した行列の行列式に等しいことがわかる. ところで  $i \neq j$  ならば, 相異なる二行が一致するから, 行列式は 0 となり,  $i = j$  ならばもとの行列  $A$  の行列式に他ならないから,

$$(A\tilde{A})_{ij} = \begin{cases} \det A & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. これは  $A\tilde{A} = (\det A)I_n$  を意味する. 同様に

$$(\tilde{A}A)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\tilde{A})_{ik}A_{kj} \\ = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} A_{kj} \det \left( \begin{array}{c} A \text{ から第 } k \text{ 行, 第 } i \text{ 列} \\ \text{を除いた行列} \end{array} \right) \\ = \det(A \text{ の第 } i \text{ 列に第 } j \text{ 列を代入した行列}) \\ = \begin{cases} \det A & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$



と表し,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  を成分とする  $n$  次縦ベクトルを

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

とおく. すると, 連立方程式 (3.9) の解の公式として, 次の Cramer の公式が成り立つ;

**定理 3.5.1**  $\det A$  が環  $K$  の可逆元ならば, 連立方程式 (3.9) の解は

$$x_r = (\det A)^{-1} \det[a_1, \dots, a_{r-1}, b, a_{r+1}, \dots, a_n] \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

により与えられる.

[証明] 縦ベクトルの定数倍及び和を考えれば, 連立方程式 (3.9) は

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$$

と同値である. 従って

$$\begin{aligned} & \det[a_1, \dots, a_{r-1}, b, a_{r+1}, \dots, a_n] \\ &= \det \left[ a_1, \dots, a_{r-1}, \sum_{k=1}^n x_k a_k, a_{r+1}, \dots, a_n \right] \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \det[a_1, \dots, a_{r-1}, a_k, a_{r+1}, \dots, a_n] \end{aligned}$$

となる. ここで  $k \neq r$  ならば, 相異なる二列が一致するから

$$\det[a_1, \dots, a_{r-1}, a_k, a_{r+1}, \dots, a_n] = 0$$

である. よって

$$\det[a_1, \dots, a_{r-1}, b, a_{r+1}, \dots, a_n] = x_r \cdot \det A$$

となる. 従って  $\det A$  が環  $K$  の可逆元ならば, 両辺に  $(\det A)^{-1}$  をかけて, 求める公式を得る. ■

上の Cramer の公式を用いれば, 連立方程式 (3.9) の解を求めることができるが, 別の見方をしてみよう. 未知数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を成分とする  $n$  次縦ベクトルを

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

とにおいて,  $n$  次正方行列と  $n$  次縦ベクトルの積を考えれば, 連立方程式 (3.9) は

$$Ax = b \quad (3.10)$$

と同値である. そこで,  $A$  が正則行列であるとき, 即ち, 定理 3.4.3 より,  $\det A$  が環  $K$  の可逆元るとき,  $A$  の逆行列  $A^{-1} \in M_n(K)$  を (3.10) の両辺に左からかけて  $A^{-1}Ax = I_n x = x$  に注意すれば,  $x = A^{-1}b$  となる. ここで定理 3.4.3 にある逆行列の公式を代入すれば

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\det A)^{-1} \tilde{A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

を得る. このようにして再び連立方程式 (3.9) の解の公式が得られた. 実は公式 (3.11) と Cramer の公式は実質的に同じものである. 実際, Cramer の公式に現れる行列式

$$\det[a_1, \dots, a_{r-1}, b, a_{r+1}, \dots, a_n]$$

に定理 3.3.3 を適用して第  $r$  列に関して展開すると

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+r} b_r \det \left( \begin{array}{c} A \text{ から第 } i \text{ 行, 第 } r \text{ 列} \\ \text{を除いた行列} \end{array} \right)$$

となるが, これは  $n$  次縦ベクトル

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

の第  $r$  成分に等しいのである.

## 第4章 行列の基本変形

この章を通して  $K$  は一般の体であるとする。一般の体に馴染のない読者は、 $K$  は有理数の全体  $\mathbb{Q}$ 、実数の全体  $\mathbb{R}$  又は複素数の全体  $\mathbb{C}$  であるとして読んでかまわない。

### 4.1 行列の基本変形と行列の階数

$(m, n)$ -行列  $A \in M_{m,n}(K)$  に関して次のような操作を考えよう；

- 行 I)  $A$  の一つの行を 0 でない定数倍する,
- 行 II)  $A$  の一つの行の定数倍を別の行に加える,
- 列 I)  $A$  の一つの列を 0 でない定数倍する,
- 列 II)  $A$  の一つの列の定数倍を別の列に加える.

これらの操作を、行列  $A$  に対する基本変形と呼ぶ。基本変形の重要なところは、基本変形を繰り返すことにより、行列  $A$  を簡単な形の行列に変形できて、そこからもとの行列  $A$  の情報を引き出すことが出来るということにある。まず、基本変形を繰り返して、行列  $A$  の任意の二つの行、又は任意の二つの列を交換することが出来ることを示そう。 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  と書いておいて、第 1 列と第 2 列を交換してみよう。次のようにすれば良い；

$$\begin{array}{c} (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \\ \downarrow \text{第 2 列を第 1 列に加える} \\ (a_1 + a_2, a_2, a_3, \dots, a_n) \\ \downarrow \text{第 2 列から第 1 列を引く} \\ (a_1 + a_2, -a_1, a_3, \dots, a_n) \\ \downarrow \text{第 2 列を第 1 列に加える} \\ (a_2, -a_1, a_3, \dots, a_n) \\ \downarrow \text{第 2 列を } -1 \text{ 倍する} \\ (a_2, a_1, a_3, \dots, a_n). \end{array}$$

他の列、あるいは行に関しても同様である。次の定理が基本的である；

**定理 4.1.1**  $(m, n)$ -行列  $A \in M_{m,n}(K)$  に基本変形を繰り返し行って

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

の形、即ち、対角成分に 1 が  $r$  個並び、その他の成分は全て 0 である行列に変形することが出来る。  $r = 0$  という事も有り得る。

[証明]  $A$  が 0-行列であるときは  $r = 0$  として定理が成り立つ。  $A$  が 0-行列でないとする。行と列を適当に交換して、 $A$  の 0 でない成分を  $(1, 1)$ -成分にもってきた上で、第 1 行を  $(1, 1)$  でわると、行列  $A$  は基本変形を繰り返し行って

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

の形に変形出来ることがわかる。ここで第 1 列を夫々  $b_{12}$  倍、 $b_{13}$  倍、 $\cdots$   $b_{1n}$  倍して第 2 列、第 3 列、 $\cdots$  第  $n$  列から引き、更に第 1 行を夫々  $b_{21}$  倍、 $b_{31}$  倍、 $\cdots$   $b_{m1}$  倍して第 2 行、第 3 行、 $\cdots$  第  $m$  行から引くと、行列 (4.2) は

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array} \right] \quad (4.3)$$

の形に変形される。  $C$  は  $(m-1, n-1)$ -行列であるから、行列のサイズに関する帰納法を用いれば、 $C$  に基本変形を繰り返し行って (4.1) の形の行列

列  $\begin{bmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  に変形できる。即ち行列 (4.3) に基本変形を繰り返し行えば  $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  の形に変形出来る。 ■

行列 (4.1) に現れる 1 の個数  $r$  は行列  $A$  に行った基本変形の如何によらず  $A$  自身によって決まる。このことを見るために、一般に  $(m, n)$ -行列  $A \in M_{m,n}(K)$  に対して、 $A$  の任意の  $l$  行  $l$  列を取り出して作った  $l$  次正方行列を  $A$  の  $l$  次小行列と呼び、その行列式を  $A$  の  $l$  次小行列式と呼ぶ。すると次の定理が成り立つ；

**定理 4.1.2**  $(m, n)$ -行列  $A \in M_{m,n}(K)$  に基本変形を繰り返し行って (4.1) の形に変形出来たとする。このとき  $A$  の任意の  $r+1$  次小行列式は 0 であり、 $A$  の  $r$  次小行列式で 0 でないものが存在する。

[証明]  $(m, n)$ -行列に関して「任意の  $r+1$  次小行列式は 0 であり,  $r$  次小行列式で 0 でないものが存在する」という性質を, 性質  $(P_r)$  と呼ぼう. さて, 行列  $A$  の第  $i$  行を 0 でない定数  $\lambda$  倍した行列  $B$  の  $l$  次小行列  $C$  をとると,  $C$  が  $B$  の第  $i$  行を含んでいなければ  $\det C$  は  $A$  の或  $l$  次小行列式に等しいし,  $C$  が  $B$  の第  $i$  行を含んでいれば  $\det C$  は  $A$  の或  $l$  次小行列式の  $\lambda$  倍に等しい. 或いは,  $A$  の第  $i$  行の  $\lambda$  倍を第  $j$  行 ( $i \neq j$ ) に加えた行列を  $B$  として,  $B$  の  $l$  次小行列  $C$  をとると,  $C$  が  $B$  の第  $j$  行を含まない, 或いは第  $i$  行と第  $j$  行を共に含むならば  $\det C$  は  $A$  の或  $l$  次小行列式に等しく,  $C$  が  $B$  の第  $j$  行を含み第  $i$  行を含まないならば  $\det C$  は  $A$  の一つの  $l$  次小行列式と  $A$  の別の  $l$  次小行列式の  $\lambda$  倍との和である. 列に関しても同様である. よって  $A$  の  $l$  次小行列式が全て 0 ならば,  $A$  に基本変形を行って生ずる行列  $B$  の  $l$  次小行列式も全て 0 である. ところで  $B$  に逆の基本変形を行えば  $A$  になるから,  $A$  に基本変形を行って行列  $B$  が生ずるとき,  $A$  の  $l$  次小行列式が全て 0 となる必要十分条件は  $B$  の  $l$  次小行列式が全て 0 となることである. 言い換えれば,  $A$  に基本変形を行って生ずる行列  $B$  が性質  $(P_r)$  をもてば,  $A$  が性質  $(P_r)$  をもつ. ところで行列 (4.1) の任意の  $r+1$  次小行列は, 成分が全て 0 である行又は列を含むから, 行列 (4.1) は性質  $(P_r)$  をもつ. よって行列  $A$  も性質  $(P_r)$  をもつ. ■

上の二つの定理をふまえて, 次のように定義しよう;

**定義 4.1.3**  $(m, n)$ -行列  $A \in M_{m,n}(K)$  に基本変形を繰り返し行って (4.1) の形に変形したとき, 現れる 1 の個数  $r$  を行列  $A$  の階数と呼び  $\text{rank}(A)$  と書く.

これから詳しく見るように, 行列の階数はその行列の最も基本的な性格を表しているものである.

## 4.2 基本行列

$(i, j)$ -成分が 1 である他は全ての成分が 0 である  $n$  次正方行列を  $E_{ij}^{(n)} \in M_n(K)$  と書いて, 特殊な形の正方行列を定義する. まず, 0 でない定数  $\lambda \in K$





1) 0 でない定数  $\lambda \in K$  に対して

$$\begin{aligned} E_i^{(m)}(\lambda)A &= \text{行列 } A \text{ の第 } i \text{ 行を } \lambda \text{ 倍した行列,} \\ AE_i^{(n)}(\lambda) &= \text{行列 } A \text{ の第 } i \text{ 列を } \lambda \text{ 倍した行列} \end{aligned}$$

である.

2) 定数  $\lambda \in K$  に対して

$$\begin{aligned} E_{ij}^{(m)}(\lambda)A &= \text{行列 } A \text{ の第 } i \text{ 行に第 } j \text{ 行の } \lambda \text{ 倍を加えた行列,} \\ AE_{ij}^{(n)}(\lambda) &= \text{行列 } A \text{ の第 } j \text{ 列に第 } i \text{ 列の } \lambda \text{ 倍を加えた行列} \end{aligned}$$

となる. 即ち, 行列  $A$  に対する基本変形は基本行列を  $A$  の左右から掛けることにより実現される.

[証明] 夫々の行列の積を実行してみればすぐに分かる. 各自で確かめてほしい. ■

ここで, 行列の階数及び基本行列を用いて, 正則行列の次のような特徴づけが得られる;

**定理 4.2.2**  $n$  次正方行列  $A \in M_n(K)$  に対して次の三命題は同値である;

- 1)  $A$  は正則行列である,
- 2)  $\det A \neq 0$ ,
- 3)  $\text{rank}(A) = n$  である,
- 4)  $A$  は幾つかの基本行列の積である.

[証明] 1)  $\Leftrightarrow$  2)  $K$  は体だから,  $K$  の可逆元とは 0 でない元のことである. よって定理 3.4.3 より,  $A$  が正則行列であることと  $\det A \neq 0$  は同値である.

4)  $\Rightarrow$  1) 基本行列は正則行列だから, その積も正則行列である.

1)  $\Rightarrow$  3)  $A$  が正則行列ならば,  $K$  は体だから, 定理 3.4.3 より  $\det A \neq 0$  である. よって定理 4.1.2 より  $\text{rank}(A) = n$  となる.

3)  $\Rightarrow$  4)  $\text{rank}(A) = n$  とすると,  $A$  に基本変形を繰り返して, 単位行列  $I_n$  に変形出来る. 定理 4.2.1 から, 基本変形は基本行列を左右から掛けることにより実現されるから, 適当な基本行列  $P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_s$  をとって

$$P_1 \cdots P_r A Q_1 \cdots Q_s = I_n$$

となることを意味する. 左から  $P_1, \dots, P_r$  の逆行列を掛け, 右から  $Q_s, \dots, Q_1$  の逆行列を掛ければ

$$A = P_r^{-1} \cdots P_1^{-1} Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$$

となるが、基本行列の逆行列は基本行列なのだから、これは  $A$  が幾つかの基本行列の積であることを意味する。■

基本行列は行列の基本変形を実現する行列という意味で基本的な行列であるが、その積によって全ての正則行列を生み出すという意味でも基本的な行列であると言える。

定理 4.1.1, 定理 4.2.1 及び定理 4.2.2 から、次の系が示される；

**系 4.2.3**  $(m, n)$  行列  $A, B \in M_{m,n}(K)$  に対して次は同値である；

- 1)  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ ,
- 2)  $A$  に基本変形を繰り返し行って  $B$  に変形できる,
- 3)  $PAQ = B$  なる  $m$  次正則行列  $P$  と  $n$  次正則行列  $Q$  が存在する.

特に

**系 4.2.4**  $(m, n)$ -行列  $A \in M_{m,n}(K)$  に対して、 $\text{rank}(A) = r$  であるための必要十分条件は

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なる  $m$  次正則行列  $P$  と  $n$  次正則行列  $Q$  が存在することである。

系 4.2.3 にあるように、 $(m, n)$  行列  $A, B \in M_{m,n}(K)$  に対して、 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$  ならば  $B = PAQ$  なる正則行列  $P, Q$  が存在するが、このような  $P, Q$  を具体的に求めるにはどうすれば良いだろうか。  $m+n$  次正方行列の次の様な計算に注目しよう；

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PAQ & P \\ Q & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & P \\ Q & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで  $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$  と  $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$  はともに  $m+n$  次正則行列であるが、これを左右から掛けることは、基本変形の言葉で表現すれば、 $m+n$  次正方行列

$$\begin{bmatrix} A & I_m \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

の最初の  $m$  行と最初の  $n$  列のみに基本変形を繰り返し行うことである。これをまとめて述べれば、次の命題が得られる；

**命題 4.2.5**  $(m, n)$  行列  $A, B \in M_{m,n}(K)$  に対して、 $A$  に基本変形を繰り返し行って  $B$  に変形出来るとき、 $A$  に単位行列を追加して拡大した  $m+n$  次正方行列 (4.4) の最初の  $m$  行と最初の  $n$  列のみに基本変形を繰り返し行って

$$\begin{bmatrix} B & P \\ Q & 0 \end{bmatrix}$$

なる行列に変形できる. このとき  $P, Q$  はそれぞれ  $m$  次,  $n$  次の正則行列で  $B = PAQ$  となる.

### 4.3 逆行列の計算法

正則行列の逆行列は, 定理 3.4.3 から余因子行列を用いて書き下すことが出来るが, 余因子行列の計算には多数の行列式を計算せねばならず, あまり実用的ではない. ところで定理 4.2.2 を用いて, 具体的に与えられた正則行列の逆行列を実用的に計算する方法がわかるので, それを説明しよう.

$A \in M_n(K)$  を  $n$  次正則行列とする. 定理 4.2.2 から  $A$  は幾つかの基本行列の積となるから

$$A = P_1 P_2 \cdots P_r$$

( $P_i$  は基本行列) とおく. このとき

$$A^{-1} = P_r^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$$

だから, 行列  $A$  の右側に単位行列  $I_n$  を追加した  $(n, 2n)$ -行列  $(A, I_n)$  に対して

$$P_r^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} (A, I_n) = (I_n, A^{-1}) \quad (4.5)$$

となる. ここで  $P_i^{-1}$  は再び基本行列となるから, (4.5) は  $(A, I_n)$  に行に関する基本変形のみを行って,  $(I_n, A^{-1})$  の形に変形できることを示している. このようにして, 行に関する基本変形のみを用いて, 正則行列  $A$  の逆行列を計算することができるのである. 具体的な例で計算してみよう.

#### 例 4.3.1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して

$$\begin{aligned}
 (A, I_3) &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\quad \downarrow \text{第 2 行から第 3 行を引く} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\quad \downarrow \text{第 1 行と第 3 行を交換する} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 &\quad \downarrow \text{第 2 行を第 1 行と第 3 行に足す} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 &\quad \downarrow \text{第 3 行の } 1/2 \text{ 倍を第 1 行と第 2 行から引く} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 &\quad \downarrow \text{第 2 行を } -1 \text{ 倍し第 3 行を } 1/2 \text{ 倍する} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

よって  $A$  の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

である.



[証明] 連立方程式 (4.6) が解

$$x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_n = \lambda_n$$

をもったとする.  $A$  の各列を一つの縦ベクトルで表して  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  と書くと

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = b$$

だから,  $(A, b)$  の第 1 列から第  $n$  列に夫々  $\lambda_1$  から  $\lambda_n$  を掛けて第  $n+1$  列から引くと, 第  $n+1$  列は 0 となる. 即ち,  $(A, b)$  に基本変形を行って  $(A, 0)$  に変形できる. ここで  $\text{rank}(A) = r$  とすると,  $A$  に基本変形を行って

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] (m, n)\text{-行列}$$

の形に変形できるから, 同様の基本変形を  $(A, 0)$  の  $A$  の部分に行えば,  $(A, 0)$  は

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] (m, n+1)\text{-行列}$$

の形に変形される. よって  $\text{rank}(A, b) = r = \text{rank}(A)$  となる.

逆に  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A) = r$  と仮定する. 系 4.2.4 より

$$PAQ = \left[ \begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

なる  $m$  次正則行列  $P$  と  $n$  次正則行列  $Q$  が存在する. ここで

$$\left[ \begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} Q & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right]$$

は  $n+1$  次正則行列で

$$P(A, b) \left[ \begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = [PAQ, Pb] = \left[ \begin{array}{c|c|c} E_r & 0 & Pb \\ \hline 0 & 0 & \end{array} \right] \quad (4.8)$$

となる. ところで

$$Pb = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

とおくと,  $i > r$  に対しては  $c_i = 0$  である. 実際,  $c_i \neq 0$  となる番号  $r < i \leq m$  があったとすると, (4.8) の第  $i$  行を  $c_i$  で割り, 更に各  $j \neq i$  に対して第  $j$

行から第  $i$  行の  $c_j$  倍を引いた上で、第  $i$  行と第  $r+1$  行を交換し、第  $r+1$  列と第  $n+1$  列を交換すると、 $(A, b)$  が基本変形により

$$\begin{bmatrix} E_{r+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

に変形されるが、これは  $\text{rank}(A, b) = r+1$  であることを意味し、仮定  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A)$  に反する。そこで

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$$

とおいて

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$PAx = PAQQ^{-1}x = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = Pb$$

となるから、両辺に左から  $P^{-1}$  を掛けて  $Ax = b$  を得る。よって連立方程式 (4.6) は解をもつ。■

次に連立方程式 (4.6) の解の多様性を検討してみよう。その為に、 $Av = 0$  となる  $n$  次縦ベクトル  $v$  の全体を  $\text{Ker}(A)$  と書いて、 $(m, n)$ -行列  $A$  の核と呼ぼう；

$$\text{Ker}(A) = \left\{ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \mid Av = 0 \right\}. \quad (4.9)$$

さて

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

を連立方程式 (4.6) の二つの解であるとする、

$$A(x' - x) = Ax' - Ax = b - b = 0$$

となる。即ち  $x' - x = v \in \text{Ker}(A)$  となるから、

$$x' = x + v \quad (v \in \text{Ker}(A))$$



である。逆に

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

を連立方程式 (4.6) に一つの解として、任意の  $v \in \text{Ker}(A)$  をとって

$$x' = x + v = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

とおくと

$$Ax' = A(x + v) = Ax + Av = b$$

となり、 $x'$  も連立方程式 (4.6) の解となる。よって次の定理が示された；

**定理 4.4.2**

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

を連立方程式 (4.6) の一つの解とすると、連立方程式 (4.6) の解全体の集合は

$$\{x + v \mid v \in \text{Ker}(A)\}$$

で与えられる。

$(m, n)$ -行列  $A \in M_{m,n}(K)$  の核  $\text{Ker}(A)$  が次の性質をもつことは容易にわかる；

- 1)  $\text{Ker}(A)$  は零ベクトル  $0$  を含む,
- 2) 任意の  $v \in \text{Ker}(A)$  と  $\lambda \in K$  に対して  $\lambda v \in \text{Ker}(A)$  である,
- 3) 任意の  $u, v \in \text{Ker}(A)$  に対して  $u + v \in \text{Ker}(A)$  である.

$\text{Ker}(A)$  の更に詳しい構造として、次の定理を示そう；

**定理 4.4.3**  $\text{rank}(A) = r$  とすると、 $n$  次正則行列

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in GL_n(K) \quad (q_k \in K^n)$$

が存在して

$$\text{Ker}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n-r} \lambda_k q_{r+k} \mid \lambda_k \in K \text{ は任意} \right\}$$

と書ける.  $\text{Ker}(A)$  の元を  $\lambda_1 q_{r+1} + \cdots + \lambda_{n-r} q_n$  ( $\lambda_i \in K$ ) と表す表し方は唯一通りである. 但し,  $r = n$  のときには  $\text{Ker}(A) = \{0\}$  である.

[証明]  $\text{rank}(A) = r$  だから, 系 4.2.4 より

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なる  $m$  次正則行列  $P$  と  $n$  次正則行列  $Q$  が存在する. 右から  $Q^{-1}$  を掛けて

$$PA = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \quad (4.10)$$

となる.  $P$  は正則行列だから,  $n$  次縦ベクトル  $v$  に対して, 条件  $Av = 0$  は  $PAv = 0$  と同値. よって (4.10) より,  $y = Q^{-1}v$  とおけば

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

と同値である. ここで

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{とおくと} \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

だから, 結局  $n$  次縦ベクトル  $v$  に関する条件  $Av = 0$  は

$$v = Qy, \quad y = \left. \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{bmatrix} \right\} r \text{ 個}$$

と同値である. ここで  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$  は  $K$  の任意の元である. よって  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  と表しておけば

$$v = Qy = \lambda_1 q_{r+1} + \lambda_2 q_{r+2} + \cdots + \lambda_{n-r} q_n$$

となる. 最後に

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i = \sum_{i=1}^n \mu_i q_i \quad (\lambda_i, \mu_i \in K) \quad (4.11)$$

ならば

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$$

となる (逆は明らか). 実際,  $n$  次縦ベクトル  $u, v$  を

$$u = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

と定義すると, 等式 (4.11) は  $Qu = Qv$  と同値である. ここで  $Q$  は正則行列だから, 両辺左から  $Q^{-1}$  を掛ければ  $u = v$  を得る. ■

上の定理にある正則行列  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  は, 命題 4.2.5 を用いれば計算することができる. 或いは, ここで必要な部分のみを切り出して述べれば次のようにして求めればよい. 定理の証明にあるように,

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (r = \text{rank}(A))$$

なる正則行列  $P \in GL_m(K)$ ,  $Q \in GL_n(K)$  が問題である. これを

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline & Q \end{bmatrix}$$

と書き直すことができる. 即ち,  $(m, n)$  行列  $A \in M_{m,n}(K)$  の下に  $n$  次単位行列  $I_n$  を付け加えてできた  $(m+n, n)$  行列

$$\begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix}$$

に, 全ての列及び, 最初の  $m$  行のみに基本変形を施して

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline & Q \end{bmatrix}$$

の形に変形することができて, そのときの  $Q$  は  $n$  次正則行列となり, これが定理 4.4.3 で必要な  $n$  次正則行列である.

定理 4.4.3 によって  $(m, n)$  行列  $A \in M_{m,n}(K)$  の核  $\text{Ker}(A)$  の構造は一応明らかとなったのだが, その意味するところを十分に理解するには次の章で展開されるベクトル空間の一般論が必要である. そのような一般論を十分理解した後には再びこの問題に立ち返ることにしよう (5.7 節参照).



## 4.5 行列の固有値, 固有ベクトル, 固有多項式

以下,  $n$  次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(K)$$

を一つ固定して考える.

**定義 4.5.1**  $\lambda \in K$  に対して

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0$$

なる  $n$  次縦ベクトル  $v$  が存在するとき,  $\lambda$  を行列  $A$  の固有値と呼び,  $n$  次縦ベクトル  $v$  を固有値  $\lambda$  に対する  $A$  の固有ベクトルと呼ぶ.

**定義 4.5.2**  $t$  を変数として,  $t$  の多項式を成分とする  $n$  次正方行列  $tI_n - A \in M_n(K[t])$  の行列式

$$\chi_A(t) = \det(tI_n - A)$$

を  $A$  の固有多項式と呼ぶ.

次の定理が示すように, 正方行列の固有値は固有多項式によって特徴づけられる;

**定理 4.5.3**  $\lambda \in K$  が  $A$  の固有値であるための必要十分条件は,  $\lambda$  が  $A$  の固有多項式の根となることである.

[証明]  $\lambda$  が固有値となることは,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の連立方程式

$$(A - \lambda I_n)x = 0, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

が自明でない解を持つことと同値である. 定理 4.4.4 より, これは  $\text{rank}(A - \lambda I_n) < n$  と同値である. ここで  $A - \lambda I_n$  は  $n$  次正方行列だから, 定理 4.2.2 より, これは  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  と同値である.  $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$  だから, これは  $\chi_A(\lambda) = 0$  と同値である. ■

## 4.6 掃き出し法

## 第5章 ベクトル空間と線形写像

この章を通して  $K$  は一般の体であるとする。一般の体に馴染のない読者は、 $K$  は有理数の全体  $\mathbb{Q}$ 、実数の全体  $\mathbb{R}$  又は複素数の全体  $\mathbb{C}$  であるとして読んでかまわない。

### 5.1 ベクトル空間の定義と例

大雑把に言って，“ベクトル和”と“定数倍”が定義された集合をベクトル空間と呼ぶのである。厳密には次のように定義する；

**定義 5.1.1** 空でない集合  $V$  が次の諸条件を満たすとき、 $V$  を  $K$  上のベクトル空間（簡単に  $K$ -ベクトル空間）と呼ぶ；

- 1) 任意の  $u, v \in V$  に対して、そのベクトル和  $u + v \in V$  が定義されて、次の条件を満たす；
  - (a) 任意の  $u, v \in V$  に対して  $u + v = v + u$  である、
  - (b) 任意の  $u, v, w \in V$  に対して  $(u + v) + w = u + (v + w)$  である、
  - (c) 全ての  $u \in V$  に対して  $u + o = u$  となるような  $o \in V$  が存在する、
  - (d) 任意の  $u \in V$  に対して  $u + u' = o$  となるような  $u' \in V$  が存在する。
- 2) 任意の  $\alpha \in K$  と  $u \in V$  に対して、 $u$  の  $\alpha$  倍  $\alpha u \in V$  が定義されて、次の条件を満たす；
  - (a) 任意の  $\alpha, \beta \in K$  と  $u \in V$  に対して  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$  である、
  - (b) 任意の  $u \in V$  に対して  $1u = u$  である、
  - (c) 任意の  $\alpha, \beta \in K$  と  $u \in V$  に対して  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$  である、
  - (d) 任意の  $\alpha \in K$  と  $u, v \in V$  に対して  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$  である。

$V$  が  $K$ -ベクトル空間であるとき、 $V$  の元をベクトルと呼ぶ。ところで、上の条件 1) の (c) で存在を仮定したベクトル  $o \in V$  は実は唯一存在する。実際、 $o' \in V$  が条件 1) の (c) を満たすならば、 $o' = o' + o = o + o' = o$  と

なるからである。そこで条件 1) の (c) で仮定した  $o \in V$  を  $K$ -ベクトル空間  $V$  の零ベクトルと呼ぶ。更に、条件 1) の (d) で仮定した  $u' \in V$  は  $u \in V$  に対して唯一定まる。実際、 $u'' \in V$  が条件 1) の (d) を満たすならば

$$u'' = u'' + o = u'' + (u + u') = (u'' + u) + u' = (u + u'') + u' = o + u' = u'$$

となるからである。そこで  $u' \in V$  を  $u \in V$  の逆ベクトルと呼び  $-u$  と書くことにする。

$$u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0 \cdot u = o$$

より  $-u = (-1)u$  である。

### 例 5.1.2 集合

$$K^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in K \right\}$$

は  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in K^n$  及び  $\alpha \in K$  に対して、 $x, y$  のベクトル和  $x + y$ , 及び  $x$  の  $\alpha$  倍  $\alpha x$  をそれぞれ

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad \alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

により定義すると、 $K$ -ベクトル空間となる。

例 5.1.3  $K$  の元を成分とする  $(m, n)$  行列の全体  $M_{m,n}(K)$  は、行列の和をベクトル和とし、行列の定数倍をベクトルの定数倍とすることにより、 $K$ -ベクトル空間となる。 $K^n = M_{n,1}(K)$  とみれば、例 5.1.2 はこの例の特殊な場合である。

例 5.1.4 実数の区間  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上の実数値連続関数の全体を  $C([a, b])$  と書く。このとき  $\varphi, \psi \in C([a, b])$  の和  $\varphi + \psi \in C([a, b])$ , 及び  $\varphi \in C([a, b])$  の  $\lambda \in \mathbb{R}$  倍  $\lambda\varphi \in C([a, b])$  を夫々

$$(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t), \quad (\lambda\varphi)(t) = \lambda \cdot \varphi(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

により定義すると、 $C([a, b])$  は  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間となる。

## 5.2 ベクトル部分空間の定義と例

**定義 5.2.1**  $K$ -ベクトル空間  $V$  の部分集合  $W \subset V$  が次の条件を満たすとき,  $W$  を  $V$  の  $K$ -ベクトル部分空間と呼ぶ;

- 1)  $W$  は空集合ではない,
- 2) 任意の  $w, w' \in W$  に対して  $w + w' \in W$  である,
- 3) 任意の  $\alpha \in K$  と  $w \in W$  に対して  $\alpha w \in W$  である.

定義から次の命題はすぐにわかる;

**命題 5.2.2**  $K$ -ベクトル空間  $V$  に対して

- 1)  $V$  自身, 及びゼロベクトルのみからなる集合  $\{0\}$  は  $V$  の  $K$ -ベクトル部分空間である.
- 2)  $W$  が  $V$  の  $K$ -ベクトル部分空間ならば,  $V$  のゼロベクトルは  $W$  に含まれる.

[証明] 1) 明らか.

2)  $W$  は空集合ではないから, ベクトル  $w \in W$  を含む. すると定数  $0 \in K$  に対して  $0 = 0 \cdot w \in W$  となる. ■

$W$  が  $K$ -ベクトル空間  $V$  の  $K$ -ベクトル部分空間ならば,  $V$  におけるベクトル和と定数倍を  $W$  に制限することにより,  $W$  は  $K$ -ベクトル空間となる. 命題 5.2.2 の 2) より  $W$  のゼロベクトルは  $V$  のゼロベクトルと一致し,  $w \in W$  の逆ベクトルは  $-w = (-1)w$  より  $V$  における  $w$  の逆ベクトルと一致する.

ベクトル部分空間の重要な例として

**命題 5.2.3**  $K$ -ベクトル空間  $V$  の有限部分集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  をとると,

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle_K = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in K \right\}$$

は  $V$  の  $K$ -ベクトル部分空間である.

[証明] 明らかに  $W = \langle v_1, \dots, v_r \rangle_K$  は  $V$  の空でない部分集合である. 任意の  $v, w \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle_K$  をとって

$$v = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^r \beta_i v_i \quad (\alpha_i, \beta_i \in K)$$



とおくと,

$$v + w = \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) v_i \in W$$

となる. 又, 任意の  $\alpha \in K$  に対して

$$\alpha v = \sum_{i=1}^r (\alpha \alpha_i) v_i \in W$$

となる. ■

### 5.3 線形写像の定義と例

**定義 5.3.1**  $K$ -ベクトル空間  $V$  から  $K$ -ベクトル空間  $W$  への写像

$$f: V \rightarrow W$$

が次の条件を満たすとき,  $f$  を  $V$  から  $W$  への  $K$ -線形写像と呼ぶ;

- 1) 任意の  $v, v' \in V$  に対して  $f(v + v') = f(v) + f(v')$  である,
- 2) 任意の  $\alpha \in K$  と  $v \in V$  に対して

このとき, 次のことは定義からすぐわかる;

- 1)  $f(o) = o$ . 即ち,  $K$ -線形写像  $f$  により,  $V$  のゼロベクトルは必ず  $W$  のゼロベクトルに対応する,
- 2) 任意の  $v \in V$  に対して  $f(-v) = -f(v)$ . 即ち,  $K$  線形写像により, 逆ベクトルは逆ベクトルに対応する.

実際, 任意の  $v \in V$  に対して  $0 \cdot v = o$  だから

$$f(o) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = o$$

となる. 又,  $-v = (-1)v$  だから

$$f(-v) = f((-1)v) = (-1)f(v) = -f(v)$$

となる.

**例 5.3.2**  $(m, n)$  行列  $A \in M_{m,n}(K)$  が与えられたとき, 写像  $f_A: K^n \rightarrow K^m$  を  $f_A(x) = Ax$  により定義すると,  $f_A$  は  $K$ -ベクトル空間  $K^n$  から  $K$ -ベクトル空間  $K^m$  への  $K$ -線形写像となる.  $f_A$  を行列  $A$  に付随した  $K$ -線形写像と呼ぶ.

例 5.3.3  $n$  個の  $m$  次縦ベクトル  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset K^m$  に対して

$$f : K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^n x_j v_j \in K^m$$

は  $K$ -線形写像である。

問 5.3.4 例 5.3.2 と例 5.3.3 を確かめよ。

定理 5.3.5  $K$ -ベクトル空間  $V$  から  $K$ -ベクトル空間  $W$  への  $K$ -線形写像  $f : V \rightarrow W$  に対して

$$\text{Im}(f) = \{f(v) \in W \mid v \in V\}, \quad \text{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = o\}$$

とおくと,  $\text{Im}(f)$  は  $W$  の  $K$ -ベクトル部分空間となり,  $\text{Ker}(f)$  は  $V$  の  $K$ -ベクトル部分空間となる.  $\text{Im}(f)$ ,  $\text{Ker}(f)$  をそれぞれ  $K$ -線形写像  $f$  の像, 核と呼ぶ.

[証明] まず  $\text{Im}(f)$  は  $W$  の空でない部分集合である. 任意の  $w, w' \in \text{Im}(f)$  をとると,  $w = f(v)$ ,  $w' = f(v')$  となる  $v, v' \in V$  が存在する. すると  $f(v+v') = w+w'$  となるから  $w+w' \in \text{Im}(f)$  である. 又, 任意の  $\alpha \in K$  に対して  $f(\alpha v) = \alpha w$  だから  $\alpha w \in \text{Im}(f)$  である. よって  $\text{Im}(f)$  は  $W$  の  $K$ -ベクトル部分空間となる.

一方, 既に見たように  $f(o) = o$  だから  $V$  ゼロベクトルは  $\text{Ker}(f)$  に含まれる. よって  $\text{Ker}(f)$  は  $V$  の空でない部分集合である. 任意の  $v, v' \in \text{Ker}(f)$  をとると,  $f(v) = f(v') = o$  である. よって  $f(v+v') = o$  となるから  $v+v' \in \text{Ker}(f)$  である. 又, 任意の  $\alpha \in K$  に対して  $f(\alpha v) = \alpha f(v) = o$  となるから  $\alpha v \in \text{Ker}(f)$  である. よって  $\text{Ker}(f)$  は  $V$  の  $K$ -ベクトル部分空間となる. ■

次の定理が示すように線形写像の像と核は, それぞれ線形写像の性質を反映している;

定理 5.3.6  $K$ -ベクトル空間  $V$  から  $K$ -ベクトル空間  $W$  への  $K$ -線形写像  $f : V \rightarrow W$  に対して

- 1)  $f$  が全射となるための必要十分条件は  $\text{Im}(f) = W$  なることである,
- 2)  $f$  が単射となるための必要十分条件は  $\text{Ker}(f) = \{o\}$  なることである.

[証明] 1) は明らかであるから, 2) を証明しよう.  $f$  が単射であるとする. 任意の  $v \in \text{Ker}(f)$  をとると,  $f(v) = o$  であるが, 線形写像では常に  $f(o) = o$

だから  $f(v) = f(o)$  となる.  $f$  は単射だから  $v = o$  を得る. 即ち,  $\text{Ker}(f)$  の元はゼロベクトルのみである. 逆に  $\text{Ker}(f) = \{o\}$  とする. 任意の  $v, v' \in V$  に対して  $f(v) = f(v')$  とすると

$$f(v' - v) = f(v') - f(v) = o$$

だから  $v' - v \in \text{Ker}(f)$  となる. ところが  $\text{Ker}(f)$  の元はゼロベクトルのみから  $v' - v = o$ , 即ち  $v' = v$  となる. よって  $f$  は単射である. ■

**定義 5.3.7**  $K$ -ベクトル空間  $V$  から  $K$ -ベクトル空間  $W$  への  $K$ -線形写像  $f: V \rightarrow W$  が全単射であるとき,  $f$  を  $V$  から  $W$  への  $K$ -線形同型写像と呼び,  $f: V \xrightarrow{\sim} W$  と表す. このとき  $K$ -ベクトル空間  $V, W$  は  $K$  上線形同型であるという.

$K$ -線形同型写像  $f: V \xrightarrow{\sim} W$  があつたとすると, 写像  $f$  は全単射だから, その逆写像  $f^{-1}: W \rightarrow V$  が定義できる. このとき逆写像  $f^{-1}$  は  $K$ -線形写像となる. 従つて  $V, W$  が  $K$  上線形同型となるには, 二つの互いに逆向きの  $K$ -線形写像

$$f: V \rightarrow W, \quad g: W \rightarrow V$$

があつて  $f \circ g = \text{id}_W, g \circ f = \text{id}_V$  となることが必要十分である.

## 5.4 ベクトル空間の次元

**定義 5.4.1**  $K$ -ベクトル空間  $V$  の有限部分集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  に対して

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r = o$$

となる  $\lambda_i \in K$  は  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$  に限るとき,  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  は  $K$  上一次独立であるという.  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  が  $K$  上一次独立でないとき,  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  は  $K$  上一次従属であるという.

$K$ -ベクトル空間  $V$  の有限部分集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  をとつたとき,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \in K^r \text{ に対して } f(x) = \sum_{i=1}^r x_i v_i \in V \quad (5.1)$$

とおくと,  $K$ -線形写像  $f: K^r \rightarrow V$  が得られる. この線形写像の核は

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \in K^r \mid x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r = o \right\}$$

となるから、定理 5.3.6 の 2) から、 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  が  $K$  上一次独立であることと (5.1) により定義された  $K$ -線形写像  $f$  が単射なることは同値である。一次独立の定義から、次の様な性質はすぐにわかる；

**命題 5.4.2**  $K$ -ベクトル空間  $V$  において

- 1)  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$  が  $K$  上一次独立ならば、 $v_i \neq o$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) である。
- 2) 単独のベクトル  $v_1 \in V$  に対して、 $\{v_1\}$  が  $K$  上一次独立であることと  $v_1 \neq o$  であることは同値である。

[証明] 1) 例えば  $v_1 = o$  とすると、 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$  とおくと  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r = o$  となり、 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  が  $K$  上一次独立であることに反する。

2)  $\{v_1\}$  が  $K$  上一次独立ならば  $v_1 \neq o$  であることは既に示した。逆に  $v_1 \neq o$  とする。  $0 \neq \lambda_1 \in K$  に対して  $\lambda_1 v_1 = o$  とすると、両辺に  $\lambda^{-1} \in K$  をかけて、 $v_1 = o$  となるから、 $\{v_1\}$  は  $K$  上一次独立である。 ■

我々に馴染みの深い  $\mathbb{R}^3$  で一次独立性を幾何学的に表現すると次のようになる；

**例 5.4.3**  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間  $\mathbb{R}^3$  のベクトルに関して

- 1) 二本のベクトル  $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^3$  が  $\mathbb{R}$  上一次独立であることと  $\{v_1, v_2\}$  が同一直線上にないことは同値である。
- 2) 三本のベクトル  $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$  が  $\mathbb{R}$  上一次独立であることと  $\{v_1, v_2, v_3\}$  が同一平面上にないことは同値である。

一般の場合に戻って、 $K$  上の縦ベクトルからなるベクトル空間では、ベクトルの一次独立性は連立方程式と密接な関係がある。 $K^n$  から  $r$  個の縦ベクトル  $v_1, v_2, \dots, v_r$  をとる。各縦ベクトル  $v_j \in K^n$  の成分を

$$v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (a_{ij} \in K)$$

とすると、 $K$  の元  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  に関する関係式

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r = o$$



て  $\dim_K K^n \geq n$  である. 一方,  $r > n$  として  $K^n$  の任意の  $r$  個のベクトル  $v_1, v_2, \dots, v_r$  をとると,

$$\text{rank}(v_1, v_2, \dots, v_r) \leq n < r$$

となり, 定理 5.4.4 より  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  は  $K$  上一次独立にはなり得ない. よって  $\dim_K K^n = n$  である. ■

ところでベクトル空間の次元と線形同型とは, 次の命題が示すように関連がある. 後にこの命題の逆が成り立つ事を, 有限次元ベクトル空間の場合に見るであろう.

**命題 5.4.7**  $K$ -ベクトル空間  $V, W$  と  $K$ -線形写像  $f: V \rightarrow W$  に対して

- 1)  $f$  が全射ならば  $\dim_K V \geq \dim_K W$  である.
- 2)  $f$  が単射ならば  $\dim_K V \leq \dim_K W$  である.

よって, 特に  $f$  が  $K$ -線形同型写像ならば  $\dim_K V = \dim_K W$  である.

[証明] 1)  $\{w_1, w_2, \dots, w_r\} \subset W$  が  $K$  上一次独立でるとする.  $f$  は全射だから  $f(v_i) = w_i$  なる  $v_i \in V$  が存在する. このとき  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$  は  $K$  上一次独立である. 実際,  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = o$  ( $\alpha_i \in K$ ) とすると,  $K$ -線形写像  $f$  で写して  $f(o) = o$  に注意すれば  $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_r w_r = o$  となり,  $\alpha_1 = \alpha_2 =$

$\dots = \alpha_r = 0$  を得る. よって次元の定義から  $\dim_K V \geq \dim_K W$  となる.

2)  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$  が  $K$  上一次独立であるとする.  $w_i = f(v_i)$  とおくと  $\{w_1, w_2, \dots, w_r\} \subset W$  は  $K$  上一次独立である. 実際,  $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_r w_r = o$  ( $\alpha_i \in K$ ) とすると,  $f$  が  $K$ -線形写像であることから

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r) = o = f(o)$$

となるが,  $f$  は単射だから  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = o$ , 従って  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$  をとなる. よって次元の定義から  $\dim_K V \leq \dim_K W$  となる. ■

## 5.5 ベクトル空間の基底

**定義 5.5.1**  $K$ -ベクトル空間  $V$  の部分集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が次の二つの条件を満たすとき,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  を  $V$  の  $K$  上の**基底**と呼ぶ;

- 1)  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  は  $K$  上一次独立,

$$2) V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K.$$

まず始めに、このような基底が常に存在することを示しておく；

**定理 5.5.2**  $K$ -ベクトル空間  $V$  は有限次元かつ  $0$  以外のベクトルを含むとする。このとき  $V$  の  $K$  上の基底が存在する。

[証明]  $\dim_K V = n$  とすると、 $n \geq 1$  である。次元の定義から  $K$  上一次独立なベクトルの系  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  が存在する。任意の  $v \in V$  に対して、次元の定義から  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$  は  $K$  上一次独立でない。よって

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v = 0$$

なる  $\alpha_i \in K$  で、少なくとも一つの番号  $i$  に対しては  $\alpha_i \neq 0$  となるものが存在する。ここで  $\alpha_{n+1} = 0$  とすると、 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $K$  上一次独立であることに反するから、 $\alpha_{n+1} \neq 0$  である。よって

$$v = (-\alpha_1/\alpha_{n+1})v_1 + \dots + (-\alpha_n/\alpha_{n+1})v_n$$

となるから  $v \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K$  となる。よって  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K$  となるから、 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $V$  の  $K$  上の基底となる。■

一般に  $K$ -ベクトル空間  $V$  の有限部分集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が与えられたとして、写像

$$f: K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i \in V$$

を考えよう。容易に判るように、 $f$  は  $K$ -ベクトル空間  $K^n$  から  $V$  への  $K$ -線形写像ある。このとき

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K, \\ \text{Ker}(f) &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0 \right\} \end{aligned}$$

である。従って定理 5.3.6 より

- 1)  $f$  が全射であることと  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K$  であることは同値である、
- 2)  $f$  が単射であることと  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $K$  上一次独立であることは同値である。

特に

- 3)  $f$  が全単射であることと  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $V$  の  $K$  上の基底であることは同値である。

即ち,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $V$  の  $K$  上の基底ならば,  $K$ -ベクトル空間  $K^n$  が  $K$ -ベクトル空間  $V$  と  $K$  上線形同型となるから, 定理 5.4.7 と定理 5.4.6 より  $\dim_K V = n$  となる. よって次の定理が示された;

**定理 5.5.3** 有限次元  $K$ -ベクトル空間  $V$  の基底をなすベクトルの個数は常に一定であって,  $V$  の  $K$  上の次元に等しい.

次の定理を示すために, 補題を一つ証明しておく;

**補題 5.5.4**  $K$ -ベクトル空間  $V$  の有限部分集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$  ( $n \geq 1$ ) に対して, 次の二つの命題は同値である;

- 1)  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} \rangle_K = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K$ ,
- 2)  $v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  なる  $\alpha_i \in K$  が存在する.

[証明] 1)  $\Rightarrow$  2)  $v_{n+1} \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} \rangle_K = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K$  より明らか.

2)  $\Rightarrow$  1)  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K \subset \langle v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} \rangle_K$  は明らかだから, 逆の包含関係を示せば良い. 任意の  $v \in \langle v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \rangle_K$  をとると

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i \quad (\lambda_i \in K) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda_{n+1} \alpha_i) v_i \end{aligned}$$

となるから,  $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$  である. ■

さて次の定理は実際に基底を用いて議論を展開する際に便利である;

**定理 5.5.5**  $K$ -ベクトル空間  $V$  の有限部分集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  に対して,

- 1)  $V$  が  $K$  上有限次元でかつ  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$  が  $K$  上一次独立ならば, これに幾つかのベクトルを追加して,  $V$  の  $K$  上の基底  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  を作る事ができる.
- 2)  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle_K$  ( $v_i \in V$ ) ならば,  $V$  の  $K$  上の基底を  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  の中から選び出す事が出来る. よって特に  $V$  は  $K$  上有限次元である.

[証明] 1)  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  を含む  $V$  のベクトルの有限集合で,  $K$  上一次独立かつ, そのベクトルの個数が最大のものを  $\{v_1, \dots, v_r, \dots, v_n\}$  としよう.  $V$



の  $K$  上の次元は有限と仮定しているから、そのような有限集合は確かに存在する。このとき、 $\{v_1, \dots, v_r, \dots, v_n\}$  は  $V$  の  $K$  上の基底となる。実際、 $V = \langle v_1, \dots, v_r, \dots, v_n \rangle_K$  であることを示せばよいが、任意の  $v \in V$  に対して、 $\{v_1, \dots, v_r, \dots, v_n, v\}$  は  $K$  上一次独立ではない。よって

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v = 0$$

なる  $\alpha_i \in K$  で、少なくとも一つの番号  $i$  に対して  $\alpha_i \neq 0$  となるものが存在する。ここで  $\alpha_{n+1} = 0$  とすると、 $\{v_1, \dots, v_r, \dots, v_n\}$  が  $K$  上一次独立であることに反するから、 $\alpha_{n+1} \neq 0$  である。すると

$$v = (-\alpha_1/\alpha_{n+1})v_1 + \dots + (-\alpha_r/\alpha_{n+1})v_r + \dots + (-\alpha_n/\alpha_{n+1})v_n$$

となるから、 $v \in \langle v_1, \dots, v_r, \dots, v_n \rangle_K$  となる。

2)  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  の部分集合で  $K$  上  $V$  全体を張り、かつベクトルの個数が最小のものを  $S$  とすると、それが  $V$  の  $K$  上の基底を与える。実際、ベクトルの番号を付け替えれば、それを  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ( $n \leq m$ ) としても一般性を失わないが、これが  $K$  上一次独立であることを示せば良い。  $K$  上一次独立でないとは仮定すると、

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

なる  $\alpha_i \in K$  で、少なくとも一つの番号  $i$  に対して  $\alpha_i \neq 0$  であるものが存在する。再びベクトルの番号を付け直して、 $\alpha_n \neq 0$  としてよい。このとき

$$v_n = (-\alpha_1/\alpha_n)v_1 + (-\alpha_2/\alpha_n)v_2 + \dots + (-\alpha_{n-1}/\alpha_n)v_{n-1}$$

となり、補題 5.5.4 より  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle_K$  となるが、これは  $S$  の最小性に反する。■

特殊な状況の下では、基底になるための条件が緩和される；

**定理 5.5.6**  $n$  次元  $K$ -ベクトル空間  $V$  の  $n$  個のベクトル  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が与えられたとき、次の三命題は同値である；

- 1)  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  は  $V$  の  $K$  上の基底である。
- 2)  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  は  $K$  上一次独立である。
- 3)  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K$  である。

[証明] 1) が成り立てば 2), 3) が成り立つ事は、基底の定義から明らかである。

2)  $\Rightarrow$  1)  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  は  $K$  上一次独立だから、定理 5.5.5 の 1) より、 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  に  $V$  のベクトルを幾つか追加して  $V$  の  $K$  上の基底とすることができる。ところが  $n = \dim_K V$  だから、定理 5.5.3 から、実は何も追

加する必要はないことがわかる。即ち、 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が既に  $V$  の  $K$  上の基底である。

3)  $\Rightarrow$  1) 定理 5.5.5 の 2) より  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  の一部分として  $V$  の  $K$  上の基底をとることが出来る。ところが  $n = \dim_K V$  だから、定理 5.5.3 より、 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $V$  の  $K$  上の基底であることが判る。■

**系 5.5.7**  $K$ -ベクトル空間の  $K$ -ベクトル部分空間  $V, W$  に対して、 $W \subset V$  かつ  $\dim_K V = \dim_K W < \infty$  ならば、 $V = W$  である。

[証明]  $\dim_K W = \dim_K V = n$  として  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  を  $W$  の  $K$  上の基底とすると、定理 5.5.6 より、 $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  は  $V$  の  $K$  上の基底となる。よって  $V = \langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle_K = V$  となる。■

最後に  $K$ -ベクトル空間  $K^n$  の基底がどのように特徴づけられるかを見ておこう。

**定理 5.5.8**  $K$ -ベクトル空間  $K^n$  の  $n$  個のベクトル  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $K^n$  の  $K$  上の基底となるための必要十分条件は、 $n$  次正方行列  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  が正則なること、即ち

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$$

なることである。

[証明] 定理 5.5.6 より、 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $K$ -ベクトル空間  $K^n$  に  $K$  上の基底なることと  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $K$  上一次独立なることは同値である。一方、定理 5.4.4 より、 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $K$  上一次独立なることと  $\text{rank}(v_1, v_2, \dots, v_n) = n$  なることは同値である。ここで  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  は  $n$  次正方行列だから、 $\text{rank}(v_1, v_2, \dots, v_n) = n$  なることと  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  が正則なることは同値である。■

## 5.6 次元定理

与えられた線形写像の像の次元と核の次元は密接に関係している。それを述べたのが次の次元定理である；

**定理 5.6.1**  $K$ -ベクトル空間  $V$  から  $K$ -ベクトル空間  $W$  への  $K$ -線形写像  $f: V \rightarrow W$  があって、 $V$  は  $K$  上有限次元であるとする。このとき  $\text{Im}(f)$  は  $K$  上有限次元で

$$\dim_K \text{Im}(f) = \dim_K V - \dim_K \text{Ker}(f)$$

である。

[証明]  $\text{Im}(f) = \{o\}$  ならば,  $\dim_K \text{Im}(f) = 0$  かつ  $\text{Ker}(f) = V$  だから, 求める等式は確かに成り立つ. 一方,  $\text{Ker}(f) = \{o\}$  ならば, 定理 5.3.6 より  $f$  は  $V$  から  $\text{Im}(f)$  への  $K$ -線形同型写像を与えるから, 命題 5.4.7 より  $\dim_K \text{Im}(f) = \dim_K V$  となり, 求める等式はやはり成り立つ. そこで  $\text{Im}(f) \neq \{o\}$  かつ  $\text{Ker}(f) \neq \{o\}$  と仮定する.

$V$  の  $K$  上の基底を  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  とすると,  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K$  だから  $\text{Im}(f) = \langle f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n) \rangle_K$  となる. よって定理 5.5.5 の 2) より  $\text{Im}(f)$  は  $K$  上有限次元である. そこで  $\text{Im}(f)$  の  $K$  上の基底を  $\{w_1, \dots, w_r\}$  とする.  $r = \dim_K \text{Im}(f)$  である.  $w_i \in \text{Im}(f)$  だから  $w_i = f(v_i)$  なる  $v_i \in V$  が存在する. 一方  $\text{Ker}(f)$  の  $K$  上の基底を  $\{u_1, \dots, u_s\}$  とする.  $s = \dim_K \text{Ker}(f)$  である. このとき  $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$  は  $V$  の  $K$  上の基底となる. 実際,  $\alpha_i, \beta_j \in K$  に対して

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s = o \quad (5.2)$$

とすると, これを  $f$  で写してみれば,  $\sum_{j=1}^s \beta_j u_j \in \text{Ker}(f)$  かつ  $f(v_i) = w_i$  だから  $\sum_{i=1}^r \alpha_i w_i = o$  となるが,  $\{w_1, \dots, w_r\}$  の一次独立性から  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$  となる. すると (5.2) から  $\sum_{j=1}^s \beta_j u_j = o$  となるから,  $\{u_1, \dots, u_s\}$  の一次独立性から  $\beta_1 = \dots = \beta_s = 0$  となる. よって  $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$  は  $K$  上一次独立である. 一方, 任意の  $v \in V$  をとると,  $f(v) \in \text{Im}(f)$  だから  $f(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i$  なる  $\alpha_i \in K$  がとれる.  $u = v - \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \in V$  とおくと  $u \in \text{Ker}(f)$  となることが判るから,  $u = \sum_{j=1}^s \beta_j u_j$  なる  $\beta_j \in K$  がとれる. よって

$$v = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^s \beta_j u_j \in \langle v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s \rangle_K$$

となる. よって  $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s\}$  は  $V$  の  $K$  上の基底となるから

$$\dim_K V = r + s = \dim_K \text{Im}(f) + \dim_K \text{Ker}(f)$$

となり, 求める等式を得る. ■

ここで 4.4 節で証明した定理 4.4.3 の意味を明らかにしよう. 一般に  $(m, n)$  行列  $A \in M_{m,n}(K)$  に付随した  $K$ -線形写像  $f_A : K^n \rightarrow K^m$  が  $f_A(x) = Ax$  により定義されるが (例 5.3.4),  $\text{Ker}(f_A) = \text{Ker}(A)$  は明らかである. さて定理 4.4.3 の意味は次の定理に集約される;

**定理 5.6.2**  $(m, n)$  行列  $A \in M_{m,n}(K)$  に付随した  $K$ -線形写像  $f_A$  に対して

$$\dim_K \text{Ker}(f_A) = n - \text{rank}(A), \quad \dim_K \text{Im}(f_A) = \text{rank}(A)$$

である.

[証明]  $\text{rank}(A) = r$  とおく.  $\dim_K \text{Ker}(f_A) = n - r$  が示されれば,  $K$ -線形写像  $f_A: K^n \rightarrow K^m$  に次元定理を適用して, 直ちに  $\dim_K \text{Im}(f_A) = r$  が得られる. ここで定理 4.4.3 の記号をそのまま用いることにすると, まず

$$\text{Ker}(f_A) = \text{Ker}(A) = \langle q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_n \rangle_K$$

である. 一方  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  は  $n$  次正則行列だから, 定理 5.5.8 より  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  は  $K^n$  の  $K$  上の基底である. よって特に  $\{q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_n\}$  は  $K$  上一次独立である. 即ち,  $\{q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_n\}$  は  $\text{Ker}(f_A)$  の  $K$  上の基底となる. よって  $\dim_K \text{Ker}(f_A) = n - r$  である. ■

$(m, n)$ -行列  $A \in M_{m,n}(K)$  が与えられたとき,  $\text{Ker}(f_A)$  と  $\text{Im}(f_A)$  の  $K$  上の基底を求める方法を考えてみよう.  $\text{rank}(A) = r$  とおく

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なる  $m$  次正則行列  $P$  と  $n$  次正則行列  $Q$  がとれる. 定理 5.6.2 の証明をみれば

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (q_i \in K^n)$$

とおくと,  $\{q_{r+1}, \dots, q_n\}$  が  $\text{Ker}(f_A)$  の  $K$  上の基底であることがわかる.  $\text{Im}(f_A)$  の基底はどうだろうか.

$$f_A(x) = Ax = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}x \quad (x \in K^n)$$

であるが,  $y = Q^{-1}x$  とおくと,  $Q^{-1}$  が正則行列であることから,  $x$  が  $K^n$  全体を動くとき  $y$  は再び  $K^n$  全体を動く. 従って

$$P^{-1} = (v_1, v_2, \dots, v_m) \quad (v_j \in K^m)$$

とおくと,  $y$  の成分を  $y_1, \dots, y_n$  としたとき

$$f_A(x) = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y = y_1 v_1 + \dots + y_r v_r$$

だから  $\text{Im}(f_A) = \langle v_1, \dots, v_r \rangle_K$  となる. 一方,  $P^{-1}$  は正則行列だから  $\{v_1, \dots, v_r\}$  は  $K$  上一次独立である (定理 5.5.8) から,  $\{v_1, \dots, v_r\}$  が  $\text{Im}(f_A)$  の  $K$  上の基底となる. 以上をまとめて, 次の命題を得る;

**命題 5.6.3**  $(m, n)$ -行列  $A \in M_{m,n}(K)$  に対して

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (r = \text{rank}(A))$$

なる正則行列  $P, Q$  をとって

$$P^{-1} = (v_1, \dots, v_m), \quad Q = (q_1, \dots, q_n)$$

( $v_j \in K^m, q_i \in K^n$ ) とおくと

$\{v_1, \dots, v_r\}$  が  $\text{Im}(f_A)$  の  $K$  上の基底

$\{q_{r+1}, \dots, q_n\}$  が  $\text{Ker}(f_A)$  の  $K$  上の基底

をそれぞれ与える.

上の命題で用いる正則行列  $P, Q$  は命題 4.2.5 を用いて求めることができる.

系 5.6.4  $K$ -ベクトル空間  $K^n$  の有限部分集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  に対して

$$\dim_K \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle_K = \text{rank}(v_1, v_2, \dots, v_m)$$

である. ここで  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  は縦ベクトル  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  を並べて作った  $(m, n)$  行列である.

[証明]  $A = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in M_{m,n}(K)$  とおくと  $\text{Im}(f_A) = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle_K$  となることに注意すれば, 定理 5.6.2 から直ちに従う. ■

## 5.7 連立方程式への応用 (3)

ここまでの議論を連立方程式に応用してみよう. 連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (5.3)$$

( $a_{ij} \in K, b_i \in K, x_j \in K$ ) を考えよう.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(K), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in K^m$$

とおくと連立方程式 (5.3) は  $Ax = b$  と書くことができる. 更に  $A \in M_{m,n}(K)$  に付随した  $K$ -線形写像

$$f_A : K^n \ni x \mapsto Ax \in K^m \quad (5.4)$$

を考えれば連立方程式 (5.3) は  $f_A(x) = b$  と書くことができる. ところで

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in K^m$$

とおけば

$$f_A : K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^n x_j a_j \in K^m$$

と書けるから  $\text{Im}(f_A) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle_K$  である. 従って

$$\begin{aligned} & \text{連立方程式 (5.3) は解をもつ} \\ \Leftrightarrow & f_A(x) = b \text{ なる } x \in K^n \text{ がある, 即ち } b \in \text{Im}(f_A) \\ \Leftrightarrow & b \in \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle_K \end{aligned}$$

である. ここで  $b \in \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle_K$  で

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle_K \subset \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle_K$$

だから, 系 5.5.7 と系 5.6.4 より次は同値である;

- 1)  $b \in \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle_K$ ,
- 2)  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle_K = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle_K$ ,
- 3)  $\dim_K \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle_K = \dim_K \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle_K$ ,
- 4)  $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ .

よって次の定理を得る (参照)

**定理 5.7.1** 連立方程式 (5.3) が解をもつための必要十分条件は

$$\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A)$$

なることである.

これは定理 4.4.1 の再証明を与えたものだが, 証明は格段に明瞭なものであることに注意しよう.

さて連立方程式 (5.3) が解をもつことが判ったら, その一般解の構造についても我々の線形代数の方法が有効に働くことをみてみよう. 連立方程式 (5.3) の一つの解を

$$x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_n = u_n$$

をして

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in K^n$$

とおく. 一般に  $x \in K^n$  が連立方程式 (5.3) の解となる, 即ち  $f_A(x) = b$  となる必要十分条件は

$$f_A(x - u) = f_A(x) - f_A(u) = f_A(x) - b = 0$$

即ち  $x - u = v \in \text{Ker}(f_A)$  なることである. ここで  $\text{rank}(A) = r$  とすれば  $\dim_K \text{Ker}(f_A) = n - r$  だから,  $\text{Ker}(f_A)$  の  $K$  上の基底を  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-r}\}$  とおけば, 連立方程式 (5.3) の一般解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r} \quad (\lambda_i \in K)$$

となる. 即ち一般解は独立な  $n - r$  個の独立なパラメータを含む. これが定理 4.4.2 と定理 4.4.3 で述べたことである.

## 5.8 線形写像の表現行列

有限次元  $K$ -ベクトル空間  $V, W$  及び  $K$ -線形写像  $f: V \rightarrow W$  があつたとする.  $V$  の  $K$  上の基底  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  をとると,  $K$ -線形同型写像

$$\varphi: K^n \xrightarrow{\sim} V \quad \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^n x_j v_j \right)$$

が得られる. 同様に  $W$  の  $K$  上の基底  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  をとって  $K$ -線形同型写像

$$\psi: K^m \xrightarrow{\sim} W \quad \left( \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^m y_i w_i \right)$$

が得られる. そこで  $K$ -線形写像  $f: V \rightarrow W$  を,  $K$ -ベクトル空間  $V, W$  の忠実なコピーともいえる  $K^n, K^m$  を通してみるとどのように表現できるか

を考えてみよう.  $j = 1, \dots, n$  に対して  $f(v_j) \in W$  を  $\{w_1, \dots, w_m\}$  の  $K$  上の一次結合として

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad (a_{ij} \in K)$$

と書くことができる. このとき  $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j \in V$  に対して

$$f(v) = \sum_{j=1}^n x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad (5.5)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) w_i \quad (5.6)$$

となるが, これは行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(K) \quad (5.7)$$

に付随する  $K$ -線形写像  $f_A(x) = Ax$  ( $x \in K^n$ ) を用いれば  $f \circ \varphi(x) = \psi \circ f_A(x)$  ( $x \in K^n$ ) と表される. 或いは次のような図式をみるとわかり易いだろう;

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_A} & K^m \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ V & \xrightarrow{f} & W. \end{array}$$

即ち,  $K$ -線形写像  $f: V \rightarrow W$  のコピーが  $f_A: K^n \rightarrow K^m$  であるといえるだろう. そこで行列 (5.7) を, 基底  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  に関する  $f$  の表現行列と呼ぶ.  $f$  の表現行列は  $V, W$  の基底を取り替えると変化することに注意しよう. 従って, 表現行列という場合には, どのような基底に関する表現行列であるかを明確にしておかねばならない.

ここで線形写像の表現行列の基本的な性質の一つ述べておこう. 上の  $K$ -線形写像  $f: V \rightarrow W$  に加えて, 有限次元  $K$ -ベクトル空間  $U$  と  $K$ -線形写像  $g: U \rightarrow V$  が与えられたときに, 合成写像  $f \circ g$  は  $U$  から  $W$  への  $K$ -線形写像となる. そこで  $U$  の  $K$ -基底  $\{u_1, \dots, u_l\}$  を一つ決めて, これらの基底に関する  $f, g$  及び  $f \circ g$  に表現行列の間の関係を調べるのである.  $k = 1, \dots, l$  に対して

$$g(u_k) = \sum_{j=1}^n b_{jk} v_j \quad (f \circ g)(u_k) = \sum_{i=1}^m c_{ik} w_i \quad (b_{jk}, c_{ik} \in K) \quad (5.8)$$



とおくと,  $g, f \circ g$  の表現行列はそれぞれ  $B = (b_{jk})_{j,k} \in M_{nl}(K)$ ,  $C = (c_{ik})_{i,k} \in M_{ml}(K)$  である. ところで

$$\begin{aligned} (f \circ g)(u_k) &= f(g(u_k)) = \sum_{j=1}^n b_{jk} f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{jk} \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) w_i \end{aligned}$$

だから, これを (5.8) と比較して  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$  を得る. 即ち, 次の定理が示された;

**定理 5.8.1**  $K$ -線形写像  $g: U \rightarrow V$ ,  $f: V \rightarrow W$  の表現行列をそれぞれ  $A, B$  とすると, 合成写像  $f \circ g: U \rightarrow W$  の表現行列は行列の積  $AB$  で与えられる.

## 第6章 内積をもったベクトル空間

この章では  $K = \mathbb{R}$  又は  $\mathbb{C}$  として、初めの節では  $\mathbb{R}$  と  $\mathbb{C}$  で共通に成り立つ性質を扱い、後のほうで、それぞれに固有の性質を扱う。

### 6.1 内積の定義と例

**定義 6.1.1**  $K$ -ベクトル空間  $V$  に対して、関数  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$  が次の三条件を満たすとき、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の内積と呼ぶ；

1) 任意の  $u, v, v' \in V$  と  $\lambda \in K$  に対して

$$\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle, \quad \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle,$$

2) 任意の  $u, v \in V$  に対して  $\overline{\langle u, v \rangle} = \langle v, u \rangle$ ,

3) 任意の  $v \in V$  に対して  $\langle v, v \rangle \geq 0$  であって、 $\langle v, v \rangle = 0$  ならば  $v = o$  である。

$K$ -ベクトル空間  $V$  上の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  に対して、条件 1), 2) より任意の  $u, u', v \in V$  と  $\lambda \in K$  に対して

$$\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle, \quad \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

となる。又、条件 3) に注意して、 $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  をベクトル  $v \in V$  の長さと呼ぶ。条件 1) は次のように言い換える事が出来る；任意の  $u \in V$  に対して  $V$  から  $K$  への写像  $v \mapsto \langle u, v \rangle$  は  $K$ -線形写像である。

**例 6.1.2** 縦ベクトル  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in K^n$  に対して

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$$

とおくと、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $K$ -ベクトル空間  $K^n$  上の内積となる。

例 6.1.3 実数の区間  $[0, 1]$  上の実数値連続関数  $\varphi, \psi$  に対して

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)dt$$

とおくと,  $\langle, \rangle$  は  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間  $C([0, 1])$  (例 5.1.4 参照) 上の内積となる.

定理 6.1.4  $K$ -ベクトル空間  $V$  上の内積  $\langle, \rangle$  に対し

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v| \quad (u, v \in V)$$

である. これを **Schwartz の不等式** と呼ぶ.

[証明]  $v = 0$  の場合には  $\langle u, v \rangle = 0, |v| = 0$  だから, 不等式は明らかに成り立つ.

$v \neq 0$  とする. 任意の  $\alpha, \beta \in K$  に対して

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v \rangle \\ &= \alpha \bar{\alpha} \langle u, u \rangle - \alpha \bar{\beta} \langle u, v \rangle - \bar{\alpha} \beta \langle v, u \rangle + \beta \bar{\beta} \langle v, v \rangle \\ &= |\alpha|^2 |u|^2 - \alpha \bar{\beta} \langle u, v \rangle - \bar{\alpha} \beta \overline{\langle u, v \rangle} + |\beta|^2 |v|^2 \end{aligned}$$

である. 特に  $\alpha = |v|^2, \beta = \langle u, v \rangle$  とおくと

$$0 \leq |v|^4 |u|^2 - |v|^2 |\langle u, v \rangle|^2 - |v|^2 |\langle u, v \rangle|^2 + |\langle u, v \rangle|^2 |v|^2$$

となるから, 全体を  $|v|^2 \neq 0$  で割れば, 求める不等式を得る. ■

例 6.1.5 例 6.1.3 の内積に上の定理を適用すると, 区間  $[0, 1]$  上の実数値連続関数  $\varphi, \psi$  に対して

$$\left| \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx \right| \leq \left( \int_0^1 \varphi(x)^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_0^1 \psi(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

となる.

## 6.2 正規直交系, Schmidt の直交化

$K$ -ベクトル空間  $V$  は内積  $\langle, \rangle$  をもっているとしよう.

定義 6.2.1  $V$  のベクトル  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

をみたすとき,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  は正規直交系をなすという.

正規直交系に関して、まず次の命題が基本的である；

**命題 6.2.2**  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が  $V$  の正規直交系ならば、 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  は  $K$  上一次独立である。

[証明] 定数  $\lambda_i \in K$  に対して  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = o$  とする。任意の  $1 \leq j \leq n$  に対して  $v_j$  との内積を考えると

$$0 = \left\langle v_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle = \lambda_j$$

となるから、 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  となる。■

逆に一次独立なベクトルから正規直交系を作ることが出来る；

**定理 6.2.3**  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  が  $K$  上一次独立ならば、 $V$  の正規直交系  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  で、任意の  $1 \leq k \leq n$  に対して

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle_K = \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle_K$$

となるものが存在する。

[証明] まず  $u_1 = |v_1|^{-1}v_1$  とおくと、 $|u_1| = 1$  かつ

$$\langle v_1 \rangle_K = \langle u_1 \rangle_K$$

である。そこで  $1 \leq k < n$  に対して、

$$\langle u_1, \dots, u_k \rangle_K = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_K$$

なる正規直交系  $\{u_1, \dots, u_k\}$  が出来たとする。

$$v'_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle u_j, v_{k+1} \rangle u_j$$

とおくと  $v'_{k+1} \neq o$  である。実際、 $v'_{k+1} = o$  とすると

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^k \langle u_i, v_{k+1} \rangle u_i \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle_K = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle_K$$

となり、 $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$  が  $K$  上一次独立であることに反する。そこで  $u_{k+1} = |v'_{k+1}|^{-1}v'_{k+1}$  とおくと、 $|u_{k+1}| = 1$  かつ

$$\begin{aligned} \langle u_1, \dots, u_k, u_{k+1} \rangle_K &= \langle u_1, \dots, u_k, v'_{k+1} \rangle_K \\ &= \langle u_1, \dots, u_k, v_{k+1} \rangle_K \\ &= \langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \rangle_K \end{aligned}$$

である. 更に  $1 \leq i \leq k$  に対して

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_{k+1} \rangle &= |v'_{k+1}|^{-1} \langle u_i, v'_{k+1} \rangle \\ &= |v'_{k+1}|^{-1} \left( \langle u_i, v_{k+1} \rangle - \sum_{j=1}^k \langle u_j, v_{k+1} \rangle \cdot \langle u_i, u_j \rangle \right) \\ &= |v'_{k+1}|^{-1} (\langle u_i, v_{k+1} \rangle - \langle u_i, v_{k+1} \rangle) = 0 \end{aligned}$$

だから,  $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$  は正規直交系となる. ■

上の定理の証明は, 定理に述べたような正規直交系が存在するという事だけにとどまらず, そのような正規直交系を作り出す方法も与えている. 即ち,  $K$  上一次独立なベクトル  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が与えられたら, まず  $u_1 = |v_1|^{-1}v_1$  とおき,

$$v'_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$

を求めて  $u_2 = |v'_2|^{-1}v'_2$  とおき,

$$v'_3 = v_3 - \langle u_1, v_3 \rangle u_1 - \langle u_2, v_3 \rangle u_2$$

を求めて  $u_3 = |v'_3|^{-1}v'_3$  とおき, と以下同様に繰り返すのである. こうして得られた  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  が定理 6.2.3 で述べた正規直交系である. これを **Schmidt** の直交化という.

**定義 6.2.4**  $V$  は内積  $\langle, \rangle$  をもつ有限次元  $K$  ベクトル空間とする.  $V$  の基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  が同時に正規直交系であるとき,  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  を  $V$  の  $K$  上の正規直交基底と呼ぶ.

**定理 6.2.5** 内積をもつ有限次元  $K$  ベクトル空間には常に正規直交基底が存在する.

[証明]  $V$  を内積  $\langle, \rangle$  をもつ有限次元  $K$  ベクトル空間とする. 定理 5.5.2 より  $V$  の  $K$  上の基底  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  が存在する.  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  は  $K$  上一次独立だから, 定理 6.2.3 より正規直交系  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  で

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_K = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle_K$$

なるものが存在する. このとき  $n = \dim_K V$  だから, 定理 5.5.6 より  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  は  $V$  の  $K$  上の基底となる. 即ち  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  は  $V$  の正規直交基底となる. ■

上の定理で述べたように, 有限次元  $K$ -ベクトル空間  $V$  が内積  $\langle, \rangle$  をもつとき,  $V$  は正規直交基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  をもつ. そこで,  $V$  の  $K$  上の基

底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  から生ずる  $K$ -ベクトル空間の自然な同型

$$\varphi : K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i u_i \in V$$

を通して  $V$  の内積  $\langle, \rangle$  を見ると,  $K^n$  上ではどのようなようになるだろうか.  $K^n$  のベクトル

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in K^n$$

に対して  $u = \varphi(x), v = \varphi(y) \in V$  とおくと,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n y_j u_j \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \bar{x}_i y_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \end{aligned}$$

となる. 即ち, 同型  $\varphi$  を通して  $V$  上の内積  $\langle, \rangle$  から誘導される  $K^n$  上の内積は例 6.1.2 で定義した  $K^n$  上の内積に一致する.

**定理 6.2.6**  $K$ -ベクトル空間  $V$  が内積  $\langle, \rangle$  をもつとき,  $K$ -ベクトル部分空間  $W \subset V$  に対して

$$W^\perp = \{v \in V \mid \text{任意の } w \in W \text{ に対して } \langle w, v \rangle = 0\}$$

は  $V$  の  $K$ -ベクトル部分空間となる.  $W, W^\perp$  の正規直交基底をそれぞれ  $\{w_1, \dots, w_m\}, \{u_1, \dots, u_n\}$  とすると

$$\{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_n\}$$

は  $V$  の正規直交基底となる.

[証明]  $\{w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_n\}$  が正規直交系となることは明らかである. 任意の  $v \in V$  に対して

$$u = v - \sum_{k=1}^m \langle w_k, v \rangle \cdot w_k$$

とおくと,  $i = 1, 2, \dots, m$  に対して

$$\begin{aligned} \langle w_i, u \rangle &= \langle w_i, v \rangle - \sum_{k=1}^m \langle w_k, v \rangle \cdot \langle w_i, w_k \rangle \\ &= \langle w_i, v \rangle - \langle w_i, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

だから  $u \in W^\perp = \langle u_1, \dots, u_n \rangle_K$  となり

$$v \in \langle w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_n \rangle_K$$

となる. よって  $V = \langle w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_n \rangle_K$ . ■

### 6.3 共役行列

**定義 6.3.1**  $A \in M_{m,n}(K)$  にたいして,  $A$  の各成分の共役複素数をとった行列を  $\bar{A} \in M_{m,n}(K)$  とおいて

$$A^* = {}^t \bar{A} \in M_{n,m}(K)$$

を  $A$  の共役行列と呼ぶ.

共役行列の次のような性質は定義から直ちに判る:

- 1)  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,
- 2)  $(\lambda \cdot A)^* = \bar{\lambda} \cdot A^*$  ( $\lambda \in K$ ),
- 3)  $(AB)^* = B^* A^*$  ( ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$  に注意すればよい).

更に縦ベクトル  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n$  に対して

$$x^* = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) : \text{横ベクトル}$$

となるから, 縦ベクトル  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in K^n$  に対して

$$x^* \cdot y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i = \langle x, y \rangle \quad (6.1)$$

となって, 内積の関係する計算をするときに便利である.

**命題 6.3.2**  $A \in M_{m,n}(K)$  に対して

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad (x \in K^n, y \in K^m)$$

である.

[証明] 内積を (6.1) のように書けば

$$\begin{aligned}\langle Ax, y \rangle &= (Ax)^* \cdot y = (x^* A^*) \cdot y \\ &= x^* \cdot (A^* y) = \langle x, A^* y \rangle\end{aligned}$$

となる. ■

## 6.4 ユニタリ行列, 直交行列

**定義 6.4.1**  $n$  次正方行列  $U \in M_n(K)$  が  $U^* U = I_n$  を満たすとき,  $U$  をユニタリ行列と呼ぶ.

$A, B \in M_{m,n}(K)$  の各列を一文字で表して

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad B = [b_1, b_2, \dots, b_n] \quad (a_i, b_j \in K^m : m \text{ 次縦ベクトル})$$

とおくと,  $A^* \in M_{n,m}(K)$  だから

$$(A^* B)_{ij} = \sum_{k=1}^m \overline{A_{ki}} B_{kj} = \langle a_i, b_j \rangle$$

となる. 即ち

$$A^* B = \begin{bmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle & \langle a_1, b_2 \rangle & \cdots & \langle a_1, b_n \rangle \\ \langle a_2, b_1 \rangle & \langle a_2, b_2 \rangle & \cdots & \langle a_2, b_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n, b_1 \rangle & \langle a_n, b_2 \rangle & \cdots & \langle a_n, b_n \rangle \end{bmatrix}$$

となる. よって  $n$  次正方行列  $U \in M_n(K)$  の各列を一文字で表して

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (u_i \in K^n : n \text{ 次縦ベクトル})$$

とおくと

$$\begin{aligned}U : \text{ユニタリ行列} &\Leftrightarrow \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & : i = j, \\ 0 & : i \neq j \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \{u_1, u_2, \dots, u_n\} : \text{正規直交系}\end{aligned}$$

となる.

**注意 6.4.2** 正確に言うと, ユニタリ行列は複素数係数の行列の場合の呼び名であって, 実数係数の行列の場合には, これを直交行列と呼ぶ. 即ち  $P \in M_n(\mathbb{R})$  に対して,  $P^* = {}^t P$  だから,

$${}^t P P = I_n$$



のとき  $P$  を  $n$  次直交行列と呼ぶ. しかし, 実数係数の場合と複素数係数の場合の議論は多くの部分が並行しているので, それを同時に進めるために, 混乱が生じない場合には実数係数の場合も含めてユニタリ行列と呼ぶことにする.

## 6.5 Hermite 行列, 対称行列

**定義 6.5.1**  $A \in M_n(K)$  に対して  $A^* = A$  のとき,  $A$  を **Hermite 行列**と呼ぶ.

**注意 6.5.2** 正確に言うと, Hermite 行列は複素係数の行列の場合の呼び名であって, 実係数の行列の場合には, これを対称行列と呼ぶ. 即ち  $A \in M_n(\mathbb{R})$  に対して,  $A^* = {}^t A$  だから

$${}^t A = A$$

のとき  $A$  を  $n$  次対称行列と呼ぶ. しかし, 実数係数の場合と複素数係数の場合の議論は多くの部分が並行しているので, それを同時に進めるために, 混乱が生じない場合には実数係数の場合も含めて Hermite 行列と呼ぶことにする.

**定理 6.5.3**  $n$  次 Hermite 行列  $A \in M_n(\mathbb{C})$  の固有値は全て実数である. 即ち, 固有多項式  $\chi_A(t) = \det(I_n - tA)$  の根は全て実数である.

[証明]  $\lambda \in \mathbb{C}$  を  $A$  の固有値とする. 固有値  $\lambda$  に対する  $A$  の固有ベクトルを  $v \in \mathbb{C}^n$  とすると

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0$$

である. よって

$$\begin{aligned} \langle Av, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle, \\ &\parallel \\ \langle vA^*v \rangle &= \langle vA, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

よって  $\langle v, v \rangle = |v|^2 \neq 0$  だから,  $\bar{\lambda} = \lambda$ . よって  $\lambda$  は実数である. ■

**定理 6.5.4**  $n$  次 Hermite 行列  $A \in M_n(K)$  に対して

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ 対角行列}$$

となるユニタリ行列  $U \in M_n(K)$  が存在する. このとき

$$\chi_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$$

となる. 即ち対角成分  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  は  $A$  の固有値である.

[証明] 定理の後半部分をまず証明する. まず

$$\begin{aligned} \det(t \cdot I_n - U^*AU) &= \det \begin{bmatrix} t - \lambda_1 & & & \\ & t - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t - \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n) \end{aligned}$$

となるが,  $U^*U = I_n$  だから

$$\begin{aligned} \det(t \cdot I_n - U^*AU) &= \det U^*(t \cdot I_n - A)U \\ &= \det U^* \cdot \det(t \cdot I_n - A) \cdot \det U = \det(t \cdot I_n - A) \end{aligned}$$

となる.

定理の前半は  $n$  に関する数学的帰納法により示す.

i)  $n = 1$  のとき.  $A$  は対角行列とみなせるので, 明らかに成り立つ.

ii)  $n$  より小さいサイズの Hermite 行列に対して成り立つと仮定して,  $n > 1$  のとき. 定理 6.5.3 より,  $A$  の固有値  $\lambda \in \mathbb{R} \subset K$  に対する固有ベクトルを  $v$  とする:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq o.$$

$v \neq o$  だから  $\{v\}$  は  $K$  上一次独立, 従って Schmidt の直交化により,  $K^n$  の正規直交基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  で

$$u_1 = |v|^{-1}v$$

なるものが存在する. このとき  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in M_n(K)$  はユニタリ行列で

$$AU = (Au_1, Au_2, \dots, Au_n)$$

である. よって

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \langle u_1, Au_1 \rangle & \langle u_1, Au_2 \rangle & \cdots & \langle u_1, Au_n \rangle \\ \langle u_2, Au_1 \rangle & \langle u_2, Au_2 \rangle & \cdots & \langle u_2, Au_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, Au_1 \rangle & \langle u_n, Au_2 \rangle & \cdots & \langle u_n, Au_n \rangle \end{bmatrix}$$

となる. ここで  $Au_1 = \lambda u_1$  に注意すると

$$\langle u_1, Au_1 \rangle = \lambda \langle u_1, u_1 \rangle = \lambda.$$

$1 < i \leq n$  に対して

$$\langle u_i, Au_1 \rangle = \langle u_i, \lambda u_1 \rangle = \lambda \langle u_i, u_1 \rangle = 0$$

となり,  $1 < j \leq n$  に対して

$$\begin{aligned} \langle u_1, Au_j \rangle &= \langle A^* u_1, u_j \rangle = \langle Au_1, u_j \rangle \\ &= \langle \lambda u_1, u_j \rangle = \bar{\lambda} \langle u_1, u_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

となる. よって

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad B \in M_{n-1}(K)$$

となる. 両辺の共役行列をとると

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B^* \end{bmatrix} = U^*A^*U = U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

だから  $B^* = B$  である. よって帰納法の仮定から

$$P^*BP = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

なるユニタリ行列  $P \in M_{n-1}(K)$  が存在する. このとき

$$Q = U \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \in M_n(K)$$

はユニタリ行列となり

$$\begin{aligned} Q^*AQ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^* \end{bmatrix} U^*AU \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & P^*BP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. ■

**定理 6.5.5**  $n$  次実正方行列  $A \in M_n(\mathbb{R})$  に対して, 次は同値である :

- 1)  ${}^tPAP$  が対角行列となる  $n$  次直交行列  $P \in M_n(\mathbb{R})$  が存在する.

- 2)  $A$  の固有ベクトルからなる  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底が存在する.  
 3)  $A$  は対称行列である.

[証明] 3)  $\Rightarrow$  1) 定理 6.5.4 の  $K = \mathbb{R}$  の場合である.

1)  $\Rightarrow$  3) 直交行列  $P \in M_n(\mathbb{R})$  があって

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

が対角行列になるとする. 左から  $P$ , 右から  ${}^tP$  をかければ,  $P{}^tP = I_n$  だから

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} {}^tP$$

となる. よって

$${}^tA = P \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix} {}^tP = A$$

となる.

1)  $\Rightarrow$  2)  $P = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ( $u_i \in \mathbb{R}^n$ ) とおくと,  $P$  が直交行列だから  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  は  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底である.

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} A(u_1, u_2, \dots, u_n) &= (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n) \end{aligned}$$

だから  $Au_i = \lambda_i u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) となる.

2)  $\Rightarrow$  1)  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  は  $A$  の固有ベクトルからなるとして,  $Au_i = \lambda_i u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とおく.  $P = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in M_n(\mathbb{R})$  は直交行列で

$$\begin{aligned} AP &= (Au_1, Au_2, \dots, Au_n) \\ &= (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n) = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

だから, 左から  ${}^t P$  をかければ

$${}^t P A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる. ■

## 6.6 半正定値および正定値 Hermite 行列

Hermite 行列  $A \in M_n(K)$  に対して

$$\overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle x, Ax \rangle = \langle A^* x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle \quad (x \in K^n)$$

だから, 任意の  $x \in K^n$  に対して  $\langle Ax, x \rangle$  は実数である. そこで

**定義 6.6.1** Hermite 行列  $A \in M_n(K)$  に対して

- 1) 任意の  $x \in K^n$  に対して  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  となるとき,  $A$  は半正定値であるという.
- 2) 任意の  $0 \neq x \in K^n$  に対して  $\langle Ax, x \rangle > 0$  となるとき,  $A$  は正定値であるという.

半正定値あるいは正定値 Hermite 行列は次のように特徴づけられる:

**定理 6.6.2** Hermite 行列  $A \in M_n(K)$  に対して, 次は同値である:

- 1)  $A$  は半正定値,
- 2)  $A$  の固有値は正または 0,
- 3)  $A = B^* B$  なる  $B \in M_n(K)$  が存在する.

[証明] 1)  $\Leftrightarrow$  2)  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  とすると, 定理 6.5.4 より

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ 対角行列} \quad (6.2)$$

なるユニタリ行列  $U \in M_n(K)$  が存在する. このとき任意の  $y \in K^n$  に対して  $x = Uy \in K^n$  とおくと

$$\langle Ax, x \rangle = \langle AUy, Uy \rangle = \langle U^*AUy, y \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad (6.3)$$

となる. よって

$$\begin{aligned} A : \text{半正定値} &\Leftrightarrow \langle Ax, x \rangle \geq 0 \text{ for } \forall x \in K^n \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \geq 0 \text{ for } \forall y \in K^n \\ &\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

となる.

2)  $\Rightarrow$  3) (6.2) から

$$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} U^*$$

である.  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) だから

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^* \in M_n(K)$$

とおくと  $A = B^*B$  となる.

3)  $\Rightarrow$  1)  $A = B^*B$  だから, 任意の  $x \in K^n$  に対して

$$\langle Ax, x \rangle = \langle B^*Bx, x \rangle = \langle Bx, Bx \rangle \geq 0$$

となる. ■

**定理 6.6.3** Hermite 行列  $A \in M_n(K)$  に対して, 次は同値である :

1)  $A$  は正定値,

- 2)  $A$  の固有値は全て正,  
 3)  $A = B^*B$  なる  $B \in GL_n(K)$  が存在する.

[証明] 1)  $\Leftrightarrow$  2) 定理 6.6.2 の証明の (6.3) を用いて

$$o \neq y \in K^n \Leftrightarrow x = Uy \neq o$$

に注意すると

$$\begin{aligned} A: \text{正定値} &\Leftrightarrow \langle Ax, x \rangle \geq 0 \text{ for } \forall o \neq x \in K^n \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \geq 0 \text{ for } \forall o \neq y \in K^n \\ &\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

となる.

- 2)  $\Rightarrow$  3) 定理 6.6.2 の証明で,  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とすると

$$\det B = \det U \cdot (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)^{1/2} \neq 0$$

だから,  $B \in GL_n(K)$  となる.

3)  $\Rightarrow$  1) 定理 6.6.2 の証明で,  $B \in GL_n(K)$  ならば  $0 \neq x \in K^n \Leftrightarrow Bx \neq o$  に注意すれば, 任意の  $0 \neq x \in K^n$  に対して

$$\langle Ax, x \rangle = \langle B^* Bx, x \rangle = \langle Bx, Bx \rangle > 0$$

となる. ■

## 6.7 ユニタリ行列により対角化できる複素行列

**定義 6.7.1**  $n$  次正方行列  $A \in M_n(\mathbb{C})$  に対して,  $AA^* = A^*A$  のとき,  $A$  を正規行列と呼ぶ.

**定理 6.7.2**  $n$  次正方行列  $A \in M_n(\mathbb{C})$  に対して, 次は同値である:

- 1)  $U^*AU$  が対角行列となる  $n$  次ユニタリ行列  $U$  が存在する.
- 2)  $A$  の固有ベクトルからなる  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底が存在する.
- 3)  $A$  は正規行列である.

[証明] 1)  $\Rightarrow$  2)  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ( $u_i \in \mathbb{C}^n$ ) とおくと,  $U$  がユニタリ行列だから  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  は  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底である.

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} A(u_1, u_2, \dots, u_n) &= (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n) \end{aligned}$$

だから  $Au_i = \lambda_i u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) となる.

2)  $\Rightarrow$  1)  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  は  $A$  の固有ベクトルからなるとして,  $Au_i = \lambda_i u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とおく.  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in M_n(\mathbb{C})$  はユニタリ行列で

$$\begin{aligned} AU &= (Au_1, Au_2, \dots, Au_n) \\ &= (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n) = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

だから, 左から  $U^*$  をかければ

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる.

1)  $\Rightarrow$  3) ユニタリ行列  $U \in M_n(\mathbb{C})$  があって

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

が対角行列になるとする. 左から  $U$ , 右から  $U^*$  をかければ,  $UU^* = I_n$  だから

$$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} U^*$$



となる．両辺の共役行列をとると

$$A^* = U \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix} U^*$$

だから

$$AA^* = U \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix} U^* = A^*A$$

となる．

3)  $\Rightarrow$  1)  $n$  に関する数学的帰納法により示す．

i)  $n = 1$  のときには， $A$  は対角行列をみなされるから，成り立つ．

ii)  $n$  より小さい場合に成り立つと仮定して， $n > 1$  のとき． $\lambda \in \mathbb{C}$  を  $A$  の固有値とすると

$$W = \{w \in \mathbb{C}^n \mid Aw = \lambda w\}$$

は  $\mathbb{C}^n$  の部分  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間となる．定理 6.2.6 より， $W, W^\perp$  の正規直交基底をそれぞれ  $\{w_1, \dots, w_r\}, \{u_1, \dots, u_s\}$  とすると

$$\{w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s\}$$

は  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底となる．従って  $r + s = n$  となって  $r > 0$  だから  $s < n$  である．まず

$$U = (w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s) \in M_n(\mathbb{C})$$

はユニタリ行列となる．ここで

$$\begin{aligned} w \in W &\Rightarrow AA^*w = A^*Aw = A^*(\lambda w) = \lambda A^*w \\ &\Rightarrow A^*w \in W \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} u \in W^\perp &\Rightarrow \langle Au, w \rangle = \langle u, A^*w \rangle = 0 \text{ for } \forall w \in W \\ &\Rightarrow Au \in W^\perp \end{aligned}$$

となる．よって

$$Au_j = \sum_{i=1}^s b_{ij}u_j \quad (b_{ij} \in \mathbb{C})$$

と書ける. よって

$$\begin{aligned} AU &= (Aw_1, \dots, Aw_r, Au_1, \dots, Au_s) \\ &= (w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s) \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ \hline & & & & & B \end{array} \right] \end{aligned}$$

となる. ここで  $B = (b_{ij})_{i,j=1,2,\dots,s} \in M_s(\mathbb{C})$  である. よって

$$U^*AU = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ \hline & & & & & B \end{array} \right]$$

となり, 両辺の共役行列をとると

$$U^*A^*U = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ \hline & & & & & B^* \end{array} \right]$$

となり

$$U^*AA^*U = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ \hline & & & & & BB^* \end{array} \right], \quad U^*A^*AU = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ \hline & & & & & B^*B \end{array} \right]$$

だから,  $AA^* = A^*A$  より  $BB^* = B^*B$  となる.  $s < n$  だから帰納法の仮定から  $P^*BP$  が対角行列となるユニタリ行列  $P \in M_s(\mathbb{C})$  が存在する. ここで

$$Q = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

はユニタリ行列で

$$\begin{aligned} Q^*AQ &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P^* \end{bmatrix} U^*AU \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & P^*BP \end{bmatrix} = \text{対角行列} \end{aligned}$$

となる. ■