線形代数学演習問題 1（後期）

問題 1 $\mathbb{R}$-ベクトル空間 U, V, W に対して，次の問いに答えよ：

1) 直積集合

$$V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$$

は

$$\begin{aligned} \text{ベクトル和} :& (v, w) + (v', w') = (v + v', w + w'), \\ \text{定数倍} :& \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w) \end{aligned}$$

$((v, w), (v', w') \in V \times W,\ \lambda \in \mathbb{R})$ により $\mathbb{R}$-ベクトル空間となることを示せ.

2) $\mathbb{R}$-線形写像

$$f : U \to V, \qquad g : U \to W$$

に対して，写像

$$F : U \to V \times W \quad (u \mapsto (f(u), g(u)))$$

は $\mathbb{R}$-線形写像であることを示せ.

3) $\mathbb{R}$-線形写像

$$f : V \to U, \qquad g : W \to U$$

に対して，写像

$$F : V \times W \to U \quad ((v, w) \mapsto f(v) + g(w))$$

は $\mathbb{R}$-線形写像であることを示せ.

問題 2 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 V, W を

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + 2y + 3z + 4w = 0 \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (x-1)^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \right\}$$

により定義する.

1) V は $\mathbb{R}^4$ の $\mathbb{R}$-ベクトル部分空間であることを示せ.

2) W は $\mathbb{R}^4$ の $\mathbb{R}$-ベクトル部分空間でないことを示せ.

問題 3 $\mathbb{R}$-ベクトル部分空間 $V, W \subset \mathbb{R}^n$ に対して

1) $V \cap W$ は $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}$-ベクトル部分空間であることを示せ.

2) $V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$ は $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}$-ベクトル部分空間であることを示せ.

問題 4 $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ.

問題 5 $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}$ 上一次従属であることを示せ.

問題 6 $\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトル $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$A = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in M_n(\mathbb{R})$$

とおく. $\det A \neq 0$ ならば $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ.

線形代数学演習問題 2（後期）

問題 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -9 & -6 & -15 & 9 \\ -3 & -2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ の階数 (rank) を求めよ.

問題 2 $\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトル $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$A = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in M_n(\mathbb{R})$$

とおく. 次は同値であることを示せ：

1) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}$ 上の基底である.

2) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立である.

3) $\det A \neq 0$.

問題 3 $\mathbb{R}^4$ の $\mathbb{R}$-ベクトル部分空間

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + 2y + 3z + 4w = 0 \right\}$$

の $\mathbb{R}$-上の基底を求めよ.

問題 4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -9 & -6 & -15 & 9 \\ -3 & -2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ に付随する $\mathbb{R}$-線形写像

$$f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x \mapsto Ax)$$

に対して $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f_A)$ と $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f_A)$ を求めよ.

問題 5 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -15 \\ -5 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

に対して $\dim_{\mathbb{R}} \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle_{\mathbb{R}}$ を求めよ.

問題 6 x, y, z, w を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} x + y + 2z - w = & -5 \\ -9x - 6y - 15z + 9w = & 36 \\ -3x - 2y - 5z + 3w = & 12 \end{cases}$$

が解をもつか否かを判定したうえで，一般解を求めよ．

問題 7 $\mathbb{R}$-線形写像

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \qquad (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2\,y + 2\,z + 2\,w \\ 2\,x - 3\,y + 4\,z + 3\,w \\ 4\,x - 7\,y + 8\,z + 7\,w \end{pmatrix})$$

について

1) $f = f_A$ となる $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ を求めよ．

2) $\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ．

問題 8 $\mathbb{R}$-ベクトル部分空間 $V, W \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\dim_{\mathbb{R}}(V + W) = \dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{R}} W - \dim_{\mathbb{R}}(V \cap W)$$

が成り立つことを，$\mathbb{R}$-ベクトル部分空間 $V \cap W, V, W, V + W$ の $\mathbb{R}$-基底を作ることにより証明せよ．

問題 9 $\mathbb{R}$-ベクトル部分空間 $V, W \subset \mathbb{R}^n$ に対して次の問いに答えよ：

1) 直積集合
$$V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$$
は
$$\begin{aligned} \text{ベクトル和 :}&(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w'), \\ \text{定数倍 :}&\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w) \end{aligned}$$
$((v, w), (v', w') \in V \times W,\ \lambda \in \mathbb{R})$ により $\mathbb{R}$-ベクトル空間となることを示せ．

2) 写像

$$f : V \times W \to \mathbb{R}^n \quad ((v, w) \mapsto v + w)$$

は $\mathbb{R}$-線形写像であることを示せ.

3) 次元定理を用いて

$$\dim_{\mathbb{R}}(V + W) = \dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{R}} W - \dim_{\mathbb{R}}(V \cap W)$$

が成り立つことを示せ.

問題 10 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に Schmidt の直交化を行って，$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を求めよ.

問題 11 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする．K-ベクトル空間 V 上の Hermite 内積 $(\ ,\ )$ に関する二つの正規直交系

$$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}, \qquad \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$$

に対して

$$\langle u_1, \cdots, u_k \rangle_K = \langle w_1, \cdots, w_k \rangle_K \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

ならば，$|\varepsilon_i| = 1$ なる $\varepsilon_i \in K$ があって

$$w_i = \varepsilon_i \cdot u_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

となることを示せ.

問題 12 閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数の全体 V は

$$\text{ベクトル和} : (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{定数倍} : (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

により $\mathbb{R}$-ベクトル空間となる．このとき次の事を示せ：

1) $(f, g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ は V 上の Hermite 内積となる.

2) $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)e^{-x}dx$ は V 上の Hermite 内積となる．

問題 13 閉区間 $[-1, 1]$ 上の実数値連続関数全体 V は問題 12 のように $\mathbb{R}$-ベクトル空間である．単項式 $f_n(x) = x^n$ を $[-1, 1]$ 上の連続関数とみれば

$$\{f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subset V$$

は $\mathbb{R}$ 上一次独立である．次の問いに答えよ：

1) V 上の Hermite 内積

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

に関して，$\{f_0, f_{1,2}, f_3, f_4\}$ に Schmidt の直交化を行って，正規直交系を求めよ．

2) V 上の Hermite 内積

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)e^{-x}dx$$

に関して，$\{f_0, f_{1,2}, f_3, f_4\}$ に Schmidt の直交化を行って，正規直交系を求めよ．

問題 14 閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数全体 V は問題 12 のように $\mathbb{R}$-ベクトル空間である．多項式

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\{(x-a)^n(x-b)^n\} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$(P_0(x) = 1)$ を $[a, b]$ 上の連続関数とみて V の元であると考えると

$$\{P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n\}$$

は V 上の Hermite 内積

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

に関して直交系をなすことを示せ．

問題 15 区間 $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数 f で

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x} dx < \infty$$

なるもの全体 V は問題 12 と同様にして $\mathbb{R}$-ベクトル空間となる．次の問いに答えよ：

1) $(f,g) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$ は V 上の Hermite 内積となることを示せ．

2) 実数係数多項式 $f(x)$ に対して

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x} dx < \infty$$

であることを示せ．従って $f(x)$ を $[0,\infty)$ 上の連続関数とみれば $f \in V$ である．

3) 多項式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$(L_0(x) = 1)$ を区間 $[0,\infty)$ に対して

$$\{L_0, L_1, L_2, \cdots, L_n\} \subset V$$

は 1) で定義した V 上の Hermite 内積に関して直交系を成すことを示せ．