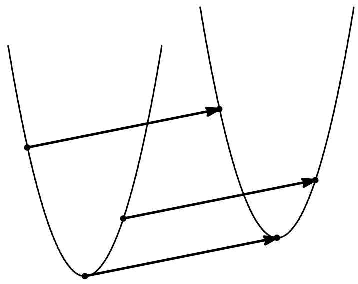
第 1 章　平面上のベクトル

1.1　ベクトルとその演算

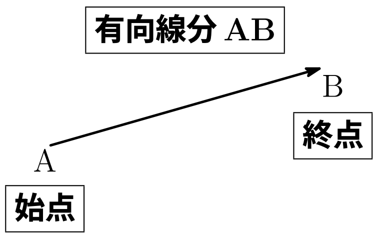
1.1.1　ベクトル

平面上で図形の移動は，右の図のように向きをつけた線分で表すことができる．線分につけた矢印の向きで移動する向きを表し，線分の長さで移動する距離を表すのである．
ここでは，向きのある線分に着目してみよう．



A 有向線分とベクトル

向きをつけた線分を**有向線分**という．
有向線分 AB では，A をその**始点**，B をその**終点**といい，その**向き**は A から B へ向かう向きとする．
また，線分 AB の長さを，有向線分 AB の**大きさ**という．



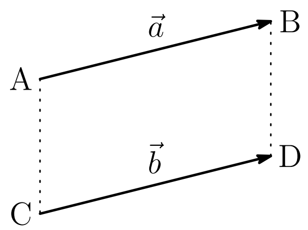
平面上で図形の平行移動を示す有向線分は，いくつも図示できるが，それらは位置が違うだけで，向きと大きさは同じである．
有向線分の位置の違いを無視して，その向きと大きさだけに着目したものを**ベクトル**という[1]．ベクトルは，向きと大きさをもつ量である．
たとえば，物体に働く力や速度などは，ベクトルである．

[1] 本章では平面上の有向線分で表されるベクトルを考える．空間の有向線分で表されるベクトルは，第 2 章で扱う．

B ベクトルの表記

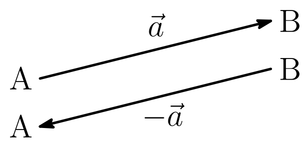
有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ で表す．また，ベクトルを $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ などで表すこともある．ベクトル $\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは，それぞれ $|\vec{\boldsymbol{a}}|$, $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$ で表す．

向きが同じで大きさの等しい 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は**等しい**といい，$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ と書く．



たとえば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき，有向線分 AB を平行移動して有向線分 CD に重ね合わせることができる．

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトルを，$\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{\boldsymbol{a}}$ で表す．

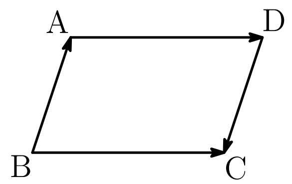


$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき，$-\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ である．

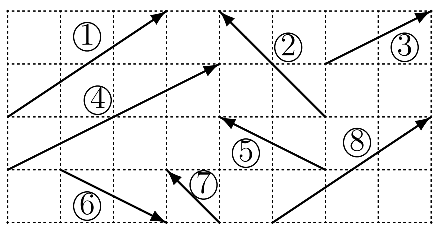
すなわち　　$\overrightarrow{\mathbf{BA}} = -\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

例 1.1 右の図の平行四辺形 ABCD について，次のことがいえる．

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$



練習 1.1 右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ．



(1) 向きが同じベクトル

(2) 互いに等しいベクトル

(3) 互いに逆ベクトル

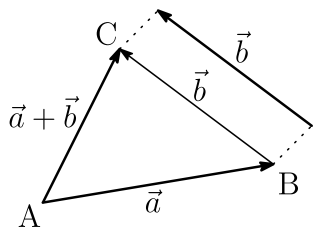
1.1.2　ベクトルの演算

向きと大きさをもつベクトルについて，加法と減法を定義しよう．さらに，実数倍についても考えてみよう．

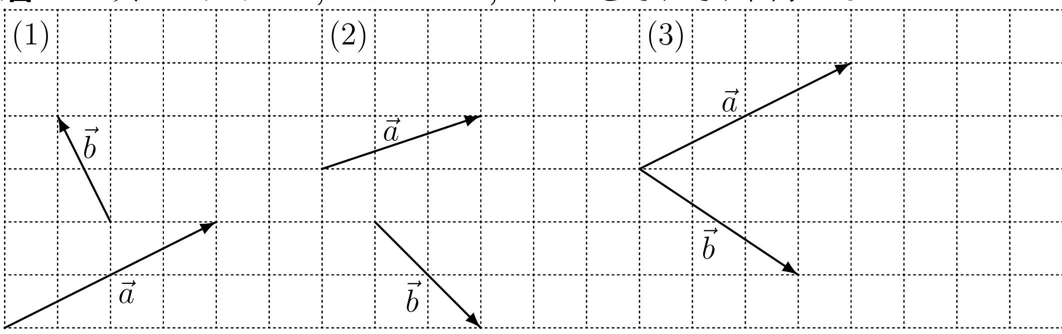
A ベクトルの加法

ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\vec{b}$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ となるように点Cをとる．このようにして定まるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**といい，$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$ と書く．
すなわち，次のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$



練習 1.2 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ．

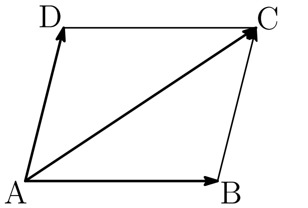


平行四辺形を使って，ベクトルの和を図示することもできる．

右の図の平行四辺形ABCDにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，図からわかるように，次のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

平行四辺形を使ったベクトルの和



ベクトルの加法について，次のことが成り立つ．

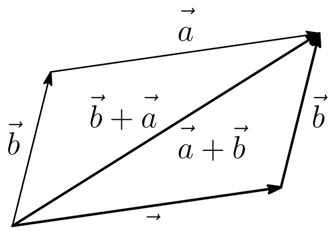
ベクトルの加法の性質

1　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　交換法則

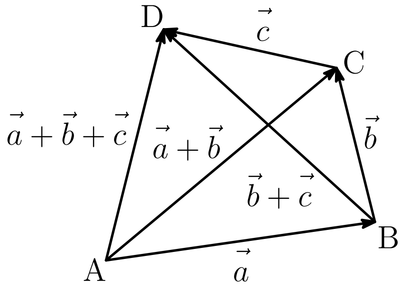
2　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　結合法則

性質 **1**，**2** が成り立つことは，次の図を用いて確かめられる．

[1]



[2]



結合法則が成り立つので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の和を単に $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書く．

例 1.2　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})+\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

練習 1.3 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

B 零ベクトル

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき，$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$$

となる．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は始点と終点が一致した特別な有向線分で表されるベクトルと考え，その大きさは 0 であるとする．

大きさが 0 のベクトルを**零ベクトル**といい，$\vec{\mathbf{0}}$ で表す．零ベクトルの向きは考えない．零ベクトルに関して，次のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathbf{AA}} = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \vec{\boldsymbol{a}} + (-\vec{\boldsymbol{a}}) = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\boldsymbol{a}}$$

練習 1.4 次の等式が成り立つことを示せ．

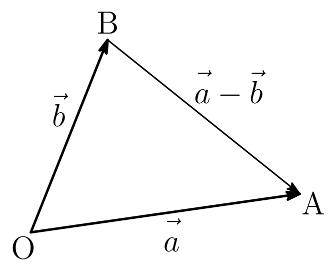
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0}$$

C ベクトルの減法

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ を満たすベクトル $\vec{c}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**差**といい，$\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}$ と書く．

一般に，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから，次のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}} - \overrightarrow{\mathbf{OB}} = \overrightarrow{\mathbf{BA}}$$

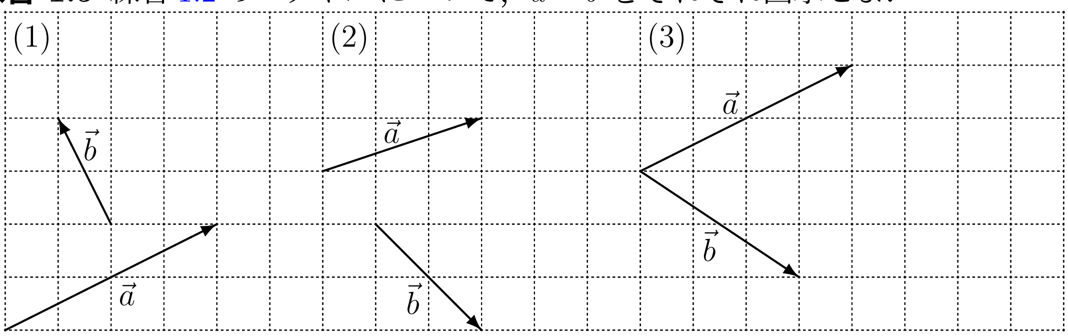


$\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，次のことが成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{OB}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}}$$

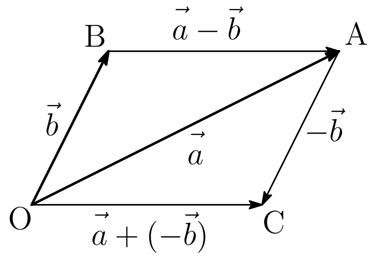
練習 1.5 練習 1.2 のベクトルについて，$\vec{a} - \vec{b}$ をそれぞれ図示せよ．



ベクトルの減法について，次の等式が成り立つ．**1** が成り立つことは，右の図を用いて確かめられる．

1　$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

2　$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$



D ベクトルの実数倍

実数 k とベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}$ の k 倍のベクトル $k\vec{\boldsymbol{a}}$ を次のように定める．

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき

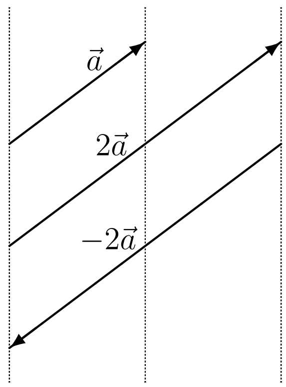
［1］ $k>0$ ならば，$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル．

とくに　$1\vec{a}=\vec{a}$

［2］ $k<0$ ならば，$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル．

とくに　$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

［3］ $k=0$ ならば，$\vec{0}$ とする．



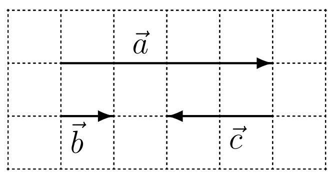
$\vec{a}=\vec{0}$ のとき　どんな k に対しても $k\vec{0}=\vec{0}$ とする．

［注意］ $(-2)\vec{a}=-(2\vec{a})$ が成り立つので，これらを単に $-2\vec{a}$ と書く．

例 1.3 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について，

$$\vec{a}=4\vec{b},\qquad \vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{a}$$

である．



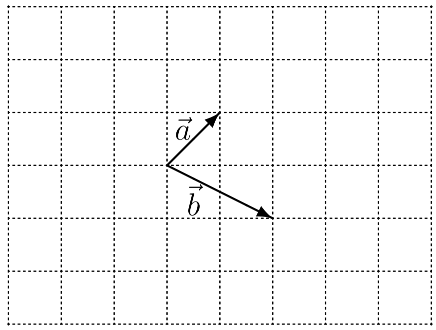
練習 1.6 例 1.3 のベクトルについて，次の (　　) に適する実数を求めよ．

(1) $\vec{b}=($　　$)\vec{a}$　　(2) $\vec{a}=($　　$)\vec{c}$　　(3) $\vec{b}=($　　$)\vec{c}$

練習 1.7 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ．

(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-2\vec{b}$

(3)　$2\vec{a}+\vec{b}$　　(4)　$\vec{a}-2\vec{b}$



E ベクトルの計算

ベクトルの実数倍について，次の法則が成り立つ．

ベクトルの実数倍の法則

k，l は実数とする．

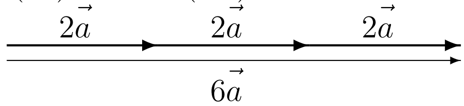
1　$\boldsymbol{k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}}$

2　$\boldsymbol{(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}}$

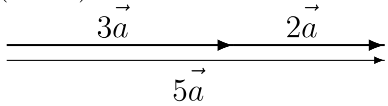
3　$\boldsymbol{k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}}$

これらの法則が成り立つことは，次の図で確かめることができる．

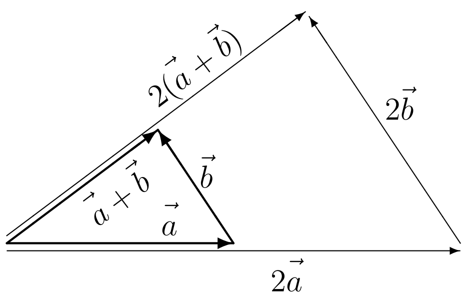
[1]　$3(2\vec{a})=6\vec{a}=(3\cdot2)\vec{a}$



[2]　$(3+2)\vec{a}=5\vec{a}=3\vec{a}+2\vec{a}$



[3]　$2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$



上で示した法則からわかるように，ベクトルの加法，減法，実数倍の計算では，$\vec{a}$，$\vec{b}$ などの式を文字式と同じように扱うことができる．

例 1.4 (1) $3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}=(3+4-2)\vec{a}=5\vec{a}$

(2)
$$\begin{aligned}2(\vec{a}+5\vec{b})+3(2\vec{a}-\vec{b})&=2\vec{a}+10\vec{b}+6\vec{a}-3\vec{b}\\&=(2+6)\vec{a}+(10-3)\vec{b}\\&=8\vec{a}+7\vec{b}\end{aligned}$$

練習 1.8 次の計算をせよ．

(1) $\vec{a}+3\vec{a}-2\vec{a}$　　(2) $3\vec{a}+7\vec{b}-5\vec{a}-2\vec{b}$

(3) $3(2\vec{a}+\vec{b})+4(\vec{a}-2\vec{b})$　　(4) $2(\vec{a}-3\vec{b})-3(3\vec{a}-2\vec{b})$

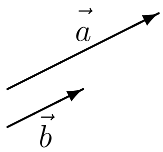
(5) $\dfrac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})+\dfrac{2}{3}(\vec{a}-\vec{b})$　　(6) $\dfrac{1}{2}(-\vec{a}+2\vec{b})-\dfrac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$

F ベクトルの平行

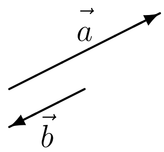
$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は，向きが同じか反対のとき，**平行**であるといい，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ と書く．

ベクトルの実数倍の定義により，次のことが成り立つ．

同じ向きに平行



反対向きに平行



ベクトルの平行条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\boldsymbol{\vec{a}/\!/\vec{b}} \iff \boldsymbol{\vec{b}=k\vec{a}}$ **となる実数 k がある**

例 1.5 $|\vec{a}|=2$ とする．$\vec{a}$ と平行で大きさが1のベクトルは

$$\frac{1}{2}\vec{a} \text{ と } -\frac{1}{2}\vec{a}$$

[注意] $\dfrac{1}{2}\vec{a}$ を $\dfrac{\vec{a}}{2}$ と書くこともある．

大きさが1のベクトルを**単位ベクトル**という．

練習 1.9 $\vec{e}$を単位ベクトルとする．$\vec{e}$と平行で大きさが4のベクトルを，$\vec{e}$を用いて表せ．また，$|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ．

G ベクトルの分解

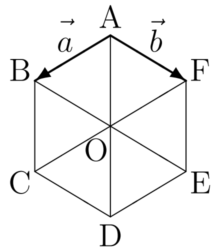
2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，他のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表してみよう．

応用例題 1.1 正六角形 ABCDEF において，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$$

とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$



考え方　$\overrightarrow{○□}=\overrightarrow{○▲}+\overrightarrow{▲□}$ のように分解することができる．

【解】 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}$
$=\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}$
$=-\vec{b}+(-2\vec{a})=-2\vec{a}-\vec{b}$

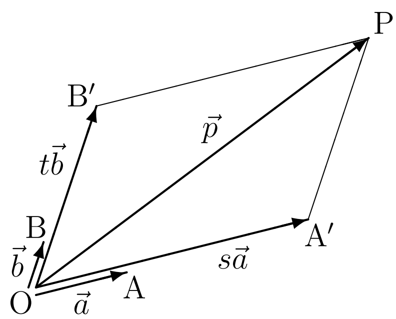
練習 1.10 応用例題 1.1 において，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

一般に，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとき，どんなベクトル $\vec{p}$ も，$\vec{a}$，$\vec{b}$ と適当な実数 s，t を用いて

$$\boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}}$$

の形に表すことができる．しかも，この表し方はただ1通りである．

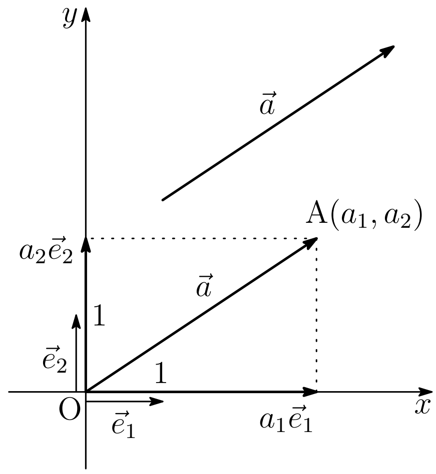


このことは，右の図のような平行四辺形 OA′PB′ を作ることによって，確かめることができる．

1.1.3　ベクトルの成分

座標平面上でベクトルを考えるとき，ベクトルの表示に座標を利用する方法がある．ここでは，ベクトルのこの表し方を学ぼう．

A ベクトルの成分表示



O を原点とする座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを，**基本ベクトル**といい，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ で表す.

座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が $(a_1,\ a_2)$ のとき，$\vec{a}$ は次のように表される.

$$\boldsymbol{\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}}$$

この $\vec{a}$ を，次のようにも書く.

$$\boldsymbol{\vec{a}=(a_1,\ a_2)} \qquad ①$$

a_1，a_2 を，それぞれ $\vec{a}$ の $\boldsymbol{x}$ **成分**，$\boldsymbol{y}$ **成分**といい，まとめて $\vec{a}$ の**成分**という．また，① を $\vec{a}$ の**成分表示**という.

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ と零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は，次のようになる.

$$\vec{e_1}=(1,\ 0),\qquad \vec{e_2}=(0,\ 1),\qquad \vec{0}=(0,\ 0)$$

2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次が成り立つ.

$$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2}$$

また，上の図で $|\vec{a}|=\mathrm{OA}$ であるから，次のことがいえる.

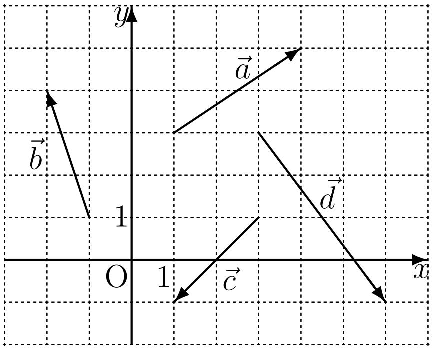
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$\boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}}$

例 1.6 右の図のベクトル $\vec{a}$ の成分表示は

$$\vec{a} = (3,\ 2)$$

大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



練習 1.11 右の図のベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を，それぞれ成分表示せよ．また，各ベクトルの大きさを求めよ．

B 和，差，実数倍の成分表示

ベクトルの成分表示を用いて，和，差，実数倍を計算してみよう．
$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ は，基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ を用いると

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2,\ \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$$

と表されるから

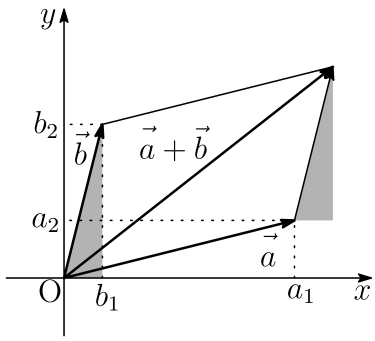
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2$$

である．

また，k を実数とするとき

$$k\vec{a} = (ka_1)\vec{e}_1 + (ka_2)\vec{e}_2$$

である．



これらを成分表示すると，次のことが成り立つ．

和，差，実数倍の成分表示

$$(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2}) + (\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{b_2})$$
$$(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2}) - (\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{b_2})$$
$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2}) = (\boldsymbol{ka_1},\ \boldsymbol{ka_2}) \qquad k \text{ は実数}$$

例 1.7 $\vec{a}=(1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,-4)$ のとき

$$\begin{aligned}2\vec{a}+3\vec{b}&=2(1,\ 5)+3(3,-4)=(2,\ 10)+(9,-12)\\&=(2+9,\ 10-12)=(11,-2)\end{aligned}$$

練習 1.12 $\vec{a}=(3,-1)$，$\vec{b}=(-4,\ 2)$ のとき，次のベクトルを求めよ．

(1) $2\vec{a}$　　(2) $-\vec{b}$　　(3) $\dfrac{1}{4}\vec{b}$

(4) $3\vec{a}+2\vec{b}$　　(5) $4\vec{a}-3\vec{b}$　　(6) $-2(\vec{a}-\vec{b})$

例題 1.1 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,-1)$ とする．$\vec{c}=(5,\ 4)$ を，適当な実数 s，t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ．

【解】 $s\vec{a}+t\vec{b}=s(1,\ 2)+t(1,-1)=(s+t,\ 2s-t)$ であるから，

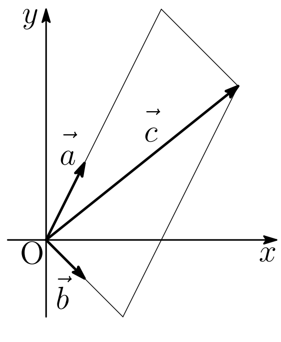
$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると

$$(5,\ 4)=(s+t,\ 2s-t)$$

よって　$s+t=5$，$2s-t=4$

これを解くと　$s=3$，$t=2$

したがって　$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$



練習 1.13 $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ とする．$\vec{c}=(8,-3)$ を，適当な実数 s，t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ．

例題 1.2 2 つのベクトル $\vec{a}=(-2,\ x)$，$\vec{b}=(1,\ 3)$ が平行になるように，x の値を定めよ．

【解】 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるとすると，$\vec{a}=k\vec{b}$ を満たす実数 k がある．

$(-2,\ x)=(k,\ 3k)$ から　　$-2=k$，$x=3k$

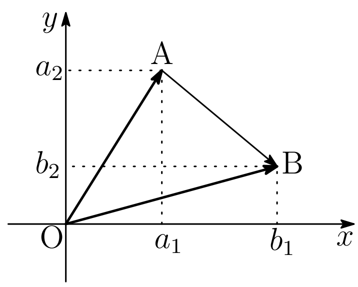
よって　　　$x=3\times(-2)=-6$

練習 1.14 2 つのベクトル $\vec{a}=(4,\ x)$，$\vec{b}=(-2,\ -1)$ が平行になるように，x の値を定めよ．

C 座標平面上の点とベクトル

座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ をとると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2)$ である．よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)\\&=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)\end{aligned}$$



2 点 A，B とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ について

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2),\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$

例 1.8 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(5,\ 1)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5-2,\ 1-3)=(3,-2),\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$$

練習 1.15 次の2点A，Bについて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めよ．

(1) A(5, 2)，B(1, 6) (2) A(−3, 4)，B(2, 0)

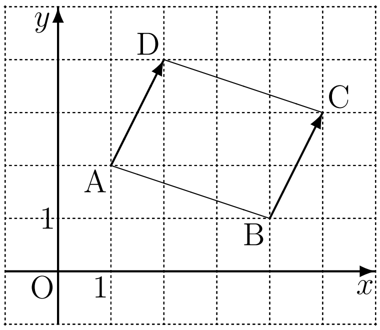
例題 1.3 4点A(1, 2)，B(4, 1)，C(5, 3)，D(x, y) を頂点とする四角形ABCDが平行四辺形であるように，x，y の値を定めよ．

【解】 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立てばよいから

$$\begin{aligned}(x-1,\ y-2) &= (5-4,\ 3-1)\\ &= (1,\ 2)\end{aligned}$$

よって $x-1=1$，$y-2=2$

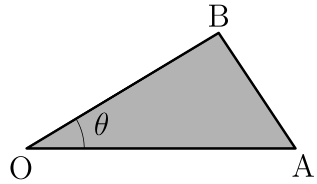
したがって $x=2$，$y=4$



練習 1.16 4点A(1, 1)，B(4, 2)，C(5, 4)，D(x, y) を頂点とする四角形ABCDが平行四辺形であるように，x，y の値を定めよ．

1.1.4 ベクトルの内積

右の図の $\triangle$OAB においては，余弦定理により，次の等式が成り立つ．

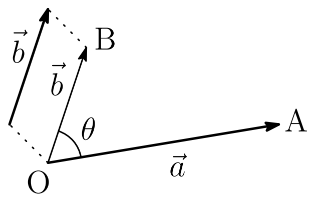


$$\mathrm{BA}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}\cos\theta$$

この $\mathrm{OA} \times \mathrm{OB}\cos\theta$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表し，ベクトルの新しい演算を考えよう．

A ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるとき，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるように点 B をとる．このようにして定まる $\angle$AOB の大きさ θ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角**という．
ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である．



そして，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ で表す．

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \qquad \text{ただし，}\theta\text{ は }\vec{a}\text{ と }\vec{b}\text{ のなす角}$$

なお，$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ と定める．
[注意] 2 つのベクトルの内積はベクトルではなく実数である．

例 1.9 $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\theta = 60^\circ$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2 \times 3 \times \cos 60^\circ = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$$

ここで，$\cos\theta$ の値を復習しておこう．

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

練習 1.17 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする．次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

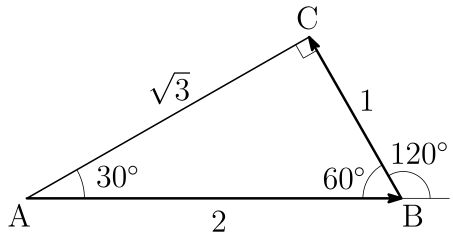
(1) $|\vec{a}| = 4$，$|\vec{b}| = 3$，$\theta = 45^\circ$　　(2) $|\vec{a}| = 6$，$|\vec{b}| = 6$，$\theta = 150^\circ$

例 1.10 右の図の直角三角形 ABC において，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角は

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2 \times 1 \times \cos 120^\circ = -1$$



練習 1.18 例 1.10 の直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

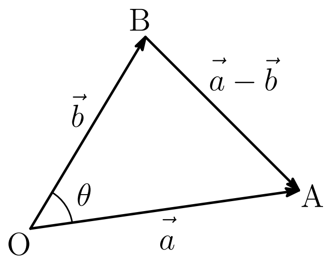
B 成分による内積の表示

右の図のように，△OAB において

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \ \angle\mathrm{AOB} = \theta$$

とすると，余弦定理により

$$\mathrm{BA}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}\cos\theta$$



が成り立つ．これをベクトルで表わすと

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

となる．
ここで，$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$　とすると

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = ({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

これを整理すると　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

一般に，次のことが成り立つ．

> $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のとき　　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$

[注意] 上のことは，$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも成り立つ．

例 1.11 $\vec{a}=(1,\ 4)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+4\times3=10$$

練習 1.19 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(1)　$\vec{a}=(2,\ 5)$，$\vec{b}=(3,-2)$　　　(2)　$\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ 3)$

C ベクトルのなす角

内積の定義から，次のことが成り立つ．

ベクトルのなす角の余弦

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ は $\vec{0}$ でないとし，そのなす角を θ とする．
ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である．このとき

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}}$$

例題 1.4 次の 2 つのベクトルのなす角を求めよ．

$$\vec{a}=(1,\ 2),\qquad \vec{b}=(-1,\ 3)$$

【解】　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-1)+2\times3=5$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\qquad |\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

よって，なす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

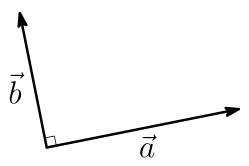
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$\theta=45^\circ$　　　(答) 45°

練習 1.20 次の 2 つのベクトルのなす角を求めよ．

(1)　$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 1)$　　(2)　$\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

(3)　$\vec{a}=(3,-1)$，$\vec{b}=(2,\ 6)$　　(4)　$\vec{a}=(-4,\ 2)$，$\vec{b}=(2,-1)$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}}$ と書く．$\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=0$$

である．逆に，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ になるのは，$\vec{a}\perp\vec{b}$ のときである．

したがって，次のことが成り立つ．

ベクトルの垂直条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}} \iff \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$$

$$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}} \iff \boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2=0}$$

例 1.12 $\vec{a}=(2,\ 1)$ **と** $\vec{b}=(x,\ 4)$ **が垂直になるような** x **の値を求める．**

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より　　$2x+1\times 4=0$　　$\leftarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=2x+1\times 4$

よって　　$x=-2$

練習 1.21 次の 2 つのベクトルが垂直になるような x の値を求めよ.

(1) $\vec{a}=(3,\ 6)$, $\vec{b}=(x,\ 4)$　　(2) $\vec{a}=(4,-2)$, $\vec{b}=(x,\ 1)$

例 1.13 **2 つのベクトル** $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ **と** $\vec{b}=(-a_2,\ a_1)$ **の関係**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1(-a_2)+a_2a_1=0$$

となるから, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直である.

[注意] $\vec{c}=(a_2,-a_1)$ も $\vec{a}$ に垂直である.

練習 1.22 次のベクトル $\vec{a}$ に垂直なベクトルを 1 つ示せ.

(1) $\vec{a}=(1,\ 3)$　　(2) $\vec{a}=(2,-5)$

D 内積の性質

ベクトルの内積について，次のことが成り立つ．

内積の性質

1 $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2}$

2 $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}}$

3 $\boldsymbol{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}}$

4 $\boldsymbol{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}}$

5 $\boldsymbol{(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})}$ k は実数

[1 の証明] $\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は $0°$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{a} &= |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0° \qquad \leftarrow \cos 0°=1\\ &= |\vec{a}||\vec{a}|\times 1 = |\vec{a}|^2\end{aligned}$$

[3 の証明] $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とすると

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1,\ a_2+b_2)$$

であるから

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= (a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2\\ &= a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2\\ &= (a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

[証終]

2，**4**，**5** が成り立つことも，同様にして示すことができる．
性質 **5** が成り立つので，たとえば $2(\vec{a}\cdot\vec{b})$ を単に $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書く．

練習 1.23 次の等式を，上の **3** の証明にならって証明せよ．

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$$

例 1.14 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ は，次のようになる．

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) &= \vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) + \vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} \qquad \longleftarrow \ \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\end{aligned}$$

よって，次の等式が成り立つ．

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

練習 1.24 $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ であることを利用して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

応用例題 1.2 $\vec{a}$, $\vec{b}$ が次の条件を満たすとき，$|2\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ．

$$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=4,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2$$

考え方　等式 $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ を利用して，まず $|2\vec{a}-\vec{b}|^2$ の値を求める．

【解】

$$\begin{aligned}|2\vec{a}-\vec{b}|^2 &= (2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})\\ &= 4\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= 4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\ &= 4\times 1^2-4\times 2+4^2\\ &= 12\end{aligned}$$

$|2\vec{a}-\vec{b}|\geqq 0$ であるから

$$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

練習 1.25 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|$

(3) $|\vec{a}-2\vec{b}|$

1.1.5 補充問題

1 次の等式を満たす $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(1) $3\vec{x}-4\vec{a}=\vec{x}-2\vec{b}$

(2) $2(\vec{x}-3\vec{a})=5(\vec{x}+2\vec{b})$

2 ベクトル $\vec{a}=(2,\ 1)$ に対して，次のベクトルを求めよ.

(1) $\vec{a}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$

(2) $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 3 のベクトル $\vec{p}$

3 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ のとき，次のものを求めよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

【答】

1 (1) $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$　(2) $\vec{x}=-2\vec{a}-\dfrac{10}{3}\vec{b}$

2 (1) $\vec{e}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ または $\vec{e}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

(2) $\vec{p}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}},-\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)$ または $\vec{p}=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{5}},\ \dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)$

［(1) $\vec{e}=(x,\ y)$ として，$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$，$|\vec{e}|^2=1$ から］

3 (1) $-\dfrac{3}{2}$　(2) 150°

1.2　ベクトルと平面図形

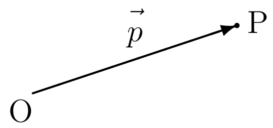
1.2.1　位置ベクトル

図形の性質を調べるときには，共通の始点をもった有向線分が表すベクトルを考えると便利なこともある．このようなベクトルについて考えよう．

A 位置ベクトル

平面上で，点 O を定めておくと，どんな点 P の位置も，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$$



によって決まる．このようなベクトル $\vec{p}$ を，点 O に関する点 P の**位置ベクトル**という．

また，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を，$\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{p}})$ で表す．

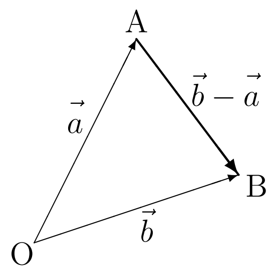
[注意]　位置ベクトルにおける点 O はどこに定めてもよい．以下，とくに断らない限り，1 つ定めた点 O に関する位置ベクトルを考える．

2 点 A，B に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

が成り立つから，次のことがいえる．

> 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) に対して　$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{a}}$



練習 1.26 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) に対して，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のいずれかを用いて表せ．

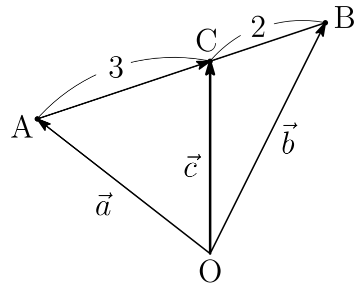
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$　　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

B 内分点・外分点の位置ベクトル

2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $3:2$ に内分する点 C の位置ベクトル $\vec{c}$ を求めよう．

$\mathrm{AC}:\mathrm{AB}=3:(3+2)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$



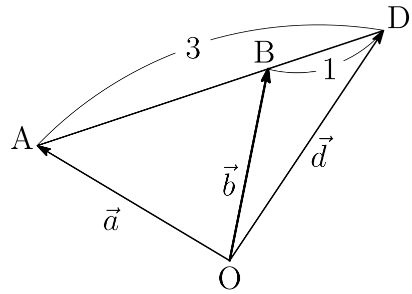
よって　$$\vec{c}-\vec{a}=\frac{3}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\vec{c}=\left(1-\frac{3}{5}\right)\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$

次に，線分 AB を $3:1$ に外分する点 D の位置ベクトル $\vec{d}$ を求めよう．

$\mathrm{AD}:\mathrm{AB}=3:(3-1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$



よって　$$\vec{d}-\vec{a}=\frac{3}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\vec{d}=\left(1-\frac{3}{2}\right)\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}=\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$$

一般に，次のことが成り立つ．ただし，外分の場合は $m\neq n$ とする．

内分点・外分点の位置ベクトル

2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

内分 $\cdots$ $\displaystyle \boldsymbol{\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}}$　　　外分 $\cdots$ $\displaystyle \boldsymbol{\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}}$

とくに，線分 AB の中点の位置ベクトルは $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$ である．

[注意] 内分の場合の n を $-n$ におきかえたものが，外分の場合である．

例 1.15　2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) に対して，線分 AB を

3 : 4 に内分する点の位置ベクトルは　$\dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{3+4}=\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}$

2 : 1 に外分する点の位置ベクトルは　$\dfrac{-\vec{a}+2\vec{b}}{2-1}=-\vec{a}+2\vec{b}$

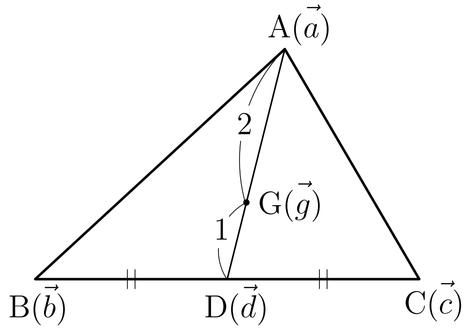
練習 1.27 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB に対して，次のような点の位置ベクトルを求めよ．

(1)　2 : 3 に内分する点　　　(2)　3 : 1 に内分する点

(3)　4 : 1 に外分する点　　　(4)　1 : 2 に外分する点

C 三角形の重心の位置ベクトル

3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，重心[2]G の位置ベクトル $\vec{g}$ を求めてみよう．



辺 BC の中点を D($\vec{d}$) とすると

$$\vec{d}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\quad\cdots①$$

△ABC の重心 G は，中線 AD を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{2+1}$$

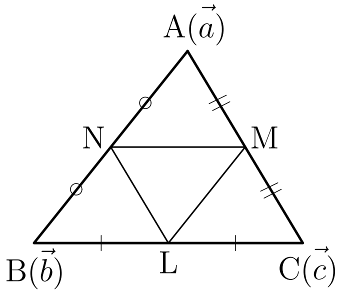
① より $2\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$ であるから　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC の重心 G の

位置ベクトル $\vec{g}$ は　$\boldsymbol{\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}$

[2]三角形の重心は，3 つの中線が 1 つに交わる点で，各中線を 2 : 1 に内分する．

例題 1.5 3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする△ABC において，辺 BC，CA，AB の中点を，それぞれ L，M，N とする．また，△LMN の重心を G$'$ とする．



(1) 点 G$'$ の位置ベクトル $\overrightarrow{g'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ．

【解】 (1) L，M，N の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$ とすると，

$\overrightarrow{g'}=\dfrac{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}}{3}$ である．

また　　$\vec{l}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，　$\vec{m}=\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$，　$\vec{n}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

であるから

$$\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

よって

$$\overrightarrow{g'}=\frac{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}&=(\vec{l}-\vec{a})+(\vec{m}-\vec{b})+(\vec{n}-\vec{c})\\&=(\vec{l}+\vec{m}+\vec{n})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

[注意] △LMN の重心 G$'$ の位置ベクトルは，△ABC の重心 G の位置ベクトルと同じである．$\overrightarrow{\mathrm{OG'}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ より，2つの重心が一致することがわかる．

練習 1.28 3点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする△ABCにおいて，辺BC，CA，ABを2 : 1に内分する点を，それぞれP，Q，Rとする．また，△ABCの重心をG，△PQRの重心をG$'$とする．

(1) 点G$'$の位置ベクトル $\overrightarrow{g'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

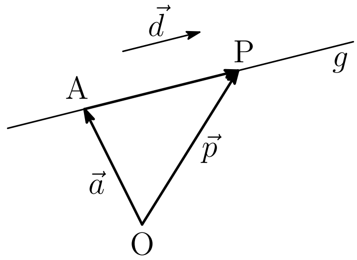
(2) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ．

1.2.2　直線のベクトルによる表示

直線上の点の位置ベクトルを考えることにより，直線をベクトルで表示することを考えよう．

A ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線

点 A$(\vec{a})$ を通りベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を g とする．g 上のどんな点 P$(\vec{p})$ に対しても，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$ となる実数 t がただ 1 つ定まる．$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a}$ であるから



$$\boldsymbol{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}} \qquad \cdots ①$$

① で，t がすべての実数値をとるように変化すると，点 P$(\vec{p})$ の全体は，直線 g になる．① を，直線 g の**ベクトル方程式**といい，実数 t を**媒介変数**という．また，$\vec{d}$ を直線 g の**方向ベクトル**という．

O を原点とする座標平面上で，点 A$(x_1,\ y_1)$ を通り，$\vec{d} = (l,\ m)$ に平行な直線の方程式を，① を利用して求めてみよう．

P$(x,\ y)$ とする．$\vec{p} = (x,\ y)$，$\vec{a} = (x_1,\ y_1)$ であるから，① により

$$(x,\ y) = (x_1,\ y_1) + t(l,\ m) = (x_1 + lt,\ y_1 + mt)$$

よって
$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_1 + lt} \\ \boldsymbol{y = y_1 + mt} \end{cases} \qquad \cdots ②$$

② から t を消去すると，次のことがいえる．

点 A$(x_1,\ y_1)$ を通り，$\vec{d} = (l,\ m)$ に平行な直線の方程式は

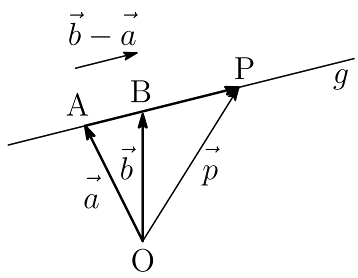
$$\boldsymbol{m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0}$$

練習 1.29 次の点 A を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線の方程式を求めよ．

(1)　A$(1,\ 3)$，$\vec{d} = (2,\ 4)$　　　(2)　A$(2, -1)$，$\vec{d} = (-4,\ 3)$

B 異なる 2 点 A，B を通る直線

異なる 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を通る直線のベクトル方程式は，前ページの ① で



$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

として，次のようになる．

$$\boldsymbol{\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}} \qquad \cdots ③$$

とくに，$t=0$ のとき P は点 A に一致し，$t=1$ のとき P は点 B に一致する．また，$0<t<1$ のとき，P は線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点である．

③ において，$1-t=s$ とおくと，次の式が得られる．

$$\boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}} \qquad \text{ただし，}\boldsymbol{s+t=1}$$

とくに，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ のとき，このベクトル方程式は線分 AB を表す．

例題 1.6 異なる 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) に対して，次の式を満たす点 P($\vec{p}$) の存在範囲を求めよ．

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}, \qquad s+t=2,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$$

【解】 $s+t=2$ より $\quad \dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}=1$

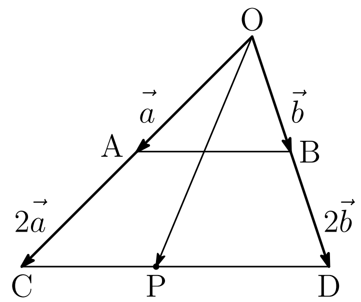
$\dfrac{s}{2}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$$s'+t'=1,\ s' \geqq 0,\ t' \geqq 0$$

$\vec{p}=\dfrac{s}{2}(2\vec{a})+\dfrac{t}{2}(2\vec{b})$ であるから

$$\vec{p}=s'(2\vec{a})+t'(2\vec{b})$$

$$s'+t'=1,\ s' \geqq 0,\ t' \geqq 0$$



したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるような点 C，D をとると，点 P($\vec{p}$) の存在範囲は線分 CD である．

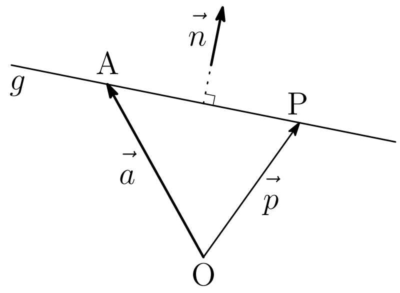
練習 1.30 異なる2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，次の式を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ の存在範囲を求めよ．

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, \qquad s + t = \frac{1}{2},\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$$

C ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 g 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ が A に一致しないとき，$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ である．すなわち，$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ となり，次の式が得られる．

$$\boldsymbol{\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0} \qquad \cdots ④$$



P が A に一致するときは，$\vec{p} - \vec{a} = \vec{0}$ であるから，このときも ④ は成り立つ．

④ は，点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り $\vec{n}$ に垂直な直線 g のベクトル方程式である．$\vec{n}$ を直線 g の**法線ベクトル**という．

O を原点とする座標平面上で，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，$\vec{n} = (a,\ b)$ に垂直な直線の方程式を，④ を利用して求めてみよう．

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\vec{p} = (x,\ y), \quad \vec{a} = (x_1,\ y_1), \quad \vec{p} - \vec{a} = (x - x_1,\ y - y_1)$$

であるから，④ をベクトルの成分で表すと，次のことがいえる．

1　点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，$\vec{n} = (a,\ b)$ に垂直な直線の方程式は

$$\boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0}$$

2　ベクトル $\vec{n} = (a,\ b)$ は，直線 $ax + by + c = 0$ に垂直である．

練習 1.31 次の点 A を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

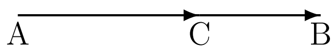
(1)　A(3, 4)，$\vec{n}=(1,\ 2)$　　　　(2)　A(−1, 2)，$\vec{n}=(3,-4)$

1.2.3　ベクトルの図形への応用

これまでベクトルの性質や計算を学んできたが，ここではベクトルを利用して平面図形の性質を調べてみよう．

A 直線上の点

平面上の3点A，B，Cについて，ベクトルの平行条件などにより，次のことが成り立つ．



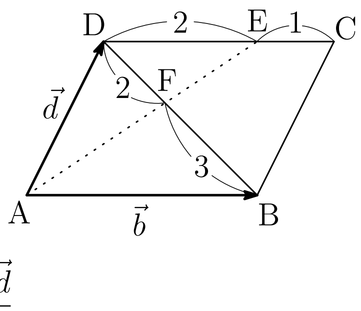
3点が一直線上にあるための条件

点Cが直線AB上にある　$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　となる実数 k がある

応用例題 1.3 平行四辺形ABCDにおいて，辺CDを1 : 2に内分する点をE，対角線BDを3 : 2に内分する点をFとする．3点A，F，Eは一直線上にあることを証明せよ．

考え方　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となる実数 k があることを示す．$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}+\vec{d}$ であることに注意する．

[証明] $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．



BF : FD = 3 : 2 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3+2}=\frac{2\vec{b}+3\vec{d}}{5}$$

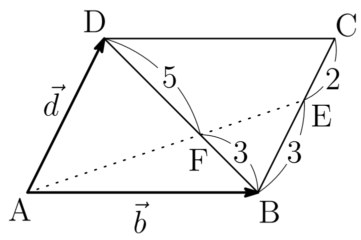
CE : ED = 1 : 2 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{1+2}=\frac{2(\vec{b}+\vec{d})+\vec{d}}{3}=\frac{2\vec{b}+3\vec{d}}{3}$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

したがって，3点A，F，Eは一直線上にある．　**[証終]**

練習 1.32 平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を E，対角線 BD を 3 : 5 に内分する点を F とする．このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ．



応用例題 1.4 △OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

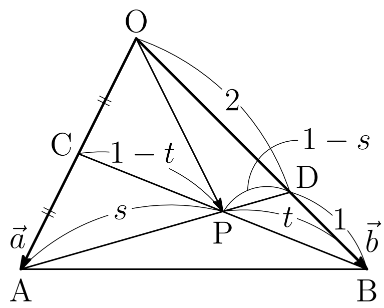
考え方　AP : PD $= s : (1-s)$，BP : PC $= t : (1-t)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて 2 通りに表せるが，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の表し方は 1 通りしかないことから，s，t の値が定まる．

【解】 AP : PD $= s : (1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}$$

BP : PC $= t : (1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$



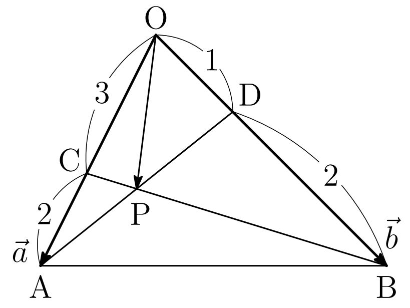
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いた表し方は 1 通りであるから

$$1-s=\frac{1}{2}t,\ \frac{2}{3}s=1-t$$

これを解くと　$s=\dfrac{3}{4}$，$t=\dfrac{1}{2}$　　←$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表す式のどちらかに代入する．

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

練習 1.33 $\triangle$OAB において，辺 OA を $3:2$ に内分する点を C，辺 OB を $1:2$ に内分する点 D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．



B 内積の利用

ベクトルの内積を利用して，図形の性質を証明してみよう．
内積に関しては，次のことがよく利用される．

$$\mathrm{AB}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

3点 O，A，B が異なるとき

$$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OB} \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

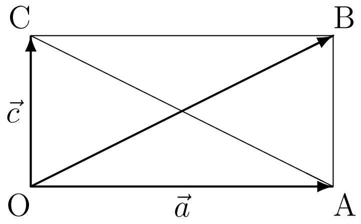
応用例題 1.5 平行四辺形 OABC において，次のことが成り立つ．

$$\mathrm{OB} = \mathrm{CA} \quad \text{ならば} \quad \mathrm{OA}\perp\mathrm{OC}$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ．

考え方 $\mathrm{OB} = \mathrm{CA}$ すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$ から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ を示す．
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると，計算しやすい．

[証明] 平行四辺形 OABC において，



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{a} + \vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a} - \vec{c}$$

$\mathrm{OB} = \mathrm{CA}$ ならば，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$ であるから

$$(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c}) = (\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})$$

すなわち $\quad |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2$

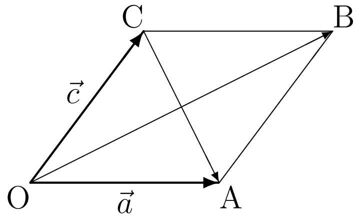
よって $\quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるから，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{OC}$ である． **[証終]**

練習 1.34 平行四辺形 OABC において，次のことが成り立つ．

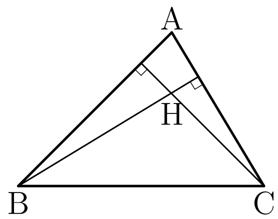
$$\mathrm{OA} = \mathrm{OC} \qquad \text{ならば} \qquad \mathrm{OB} \perp \mathrm{CA}$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ．

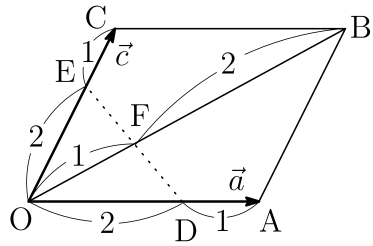


1.2.4 補充問題

4 鋭角三角形 ABC において，頂点 B，C からそれぞれ対辺 CA，AB に下ろした垂線の交点を H とすると，HA⊥BC である．
このことを，ベクトルを用いて証明せよ．

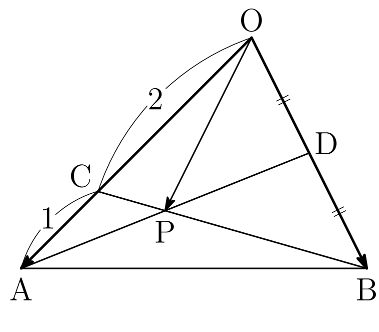


5 平行四辺形 OABC の辺 OA と辺 OC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ D，E とし，対角線 OB を $1:2$ に内分する点を F とする．3 点 D，F，E は一直線上にあることを証明せよ．

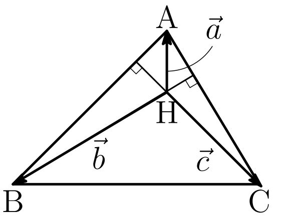


6 △OAB において，辺 OA を $2:1$ に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする．適当な実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すとき，次の $\boxed{}$ に適する実数を求めよ．また，s，t の値を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{}\,t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{}\,s\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



【答】



4　[$\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\vec{c}$ とする．
$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から　$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ を導く]

5　[$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ で表す．$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=2\overrightarrow{\mathrm{DF}}$]

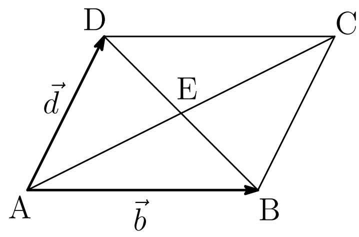
6 $s=\dfrac{1}{2}$, $t=\dfrac{1}{4}$　(1) 2　(2) $\dfrac{3}{2}$
[(後半) 点 P が直線 AD 上にあることから，$s+\boxed{}\,t=1$ など]

1.3　章末問題

1.3.1　章末問題 A

1 平行四辺形 ABCD において，対角線の交点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$, $\vec{d}$ を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{EA}}$

2 $\vec{a} = (3,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ 2)$ で，$\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ とする．ただし，t は実数である．

(1) $|\vec{c}| = 5$ となる t の値を求めよ．

(2) $|\vec{c}|$ が最小となるとき，$\vec{b} \perp \vec{c}$ であることを示せ．

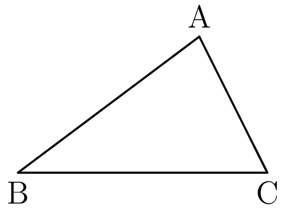
3 $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 1$ で，ベクトル $\vec{a} + \vec{b}$，$2\vec{a} - 5\vec{b}$ が垂直であるとする．

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ．

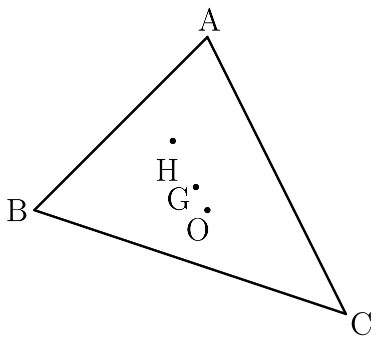
4 平面上に $\triangle$ABC と点 P，Q があって，次の等式が成り立つとき，P，Q の位置を右の図に示せ．

$$3\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BQ}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \vec{0}$$



5 $\triangle$ABC の外心を O，重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．ただし，$\triangle$ABC は直角三角形ではないとする．

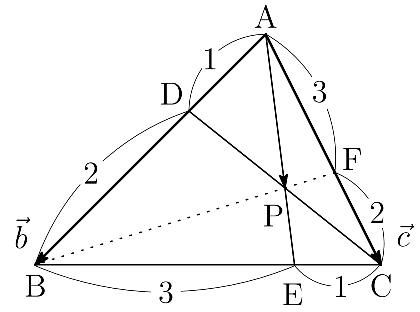
(1) 3 点 O，G，H は一直線上にあることを証明せよ．



(2) BH$\perp$CA かつ CH$\perp$AB であることを証明せよ．

6 △ABC において，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を D，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を E，辺 CA を 2 : 3 に内分する点を F とする．また，線分 AE と線分 CD の交点を P とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



(2) 3 点 B，P，F は一直線上にあることを示せ．

1.3.2 章末問題 B

7 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ のとき，次の値の最大値，最小値を求めよ．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

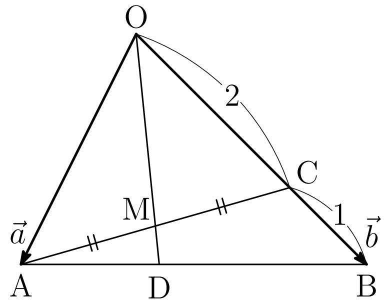
(2) $|\vec{a}-\vec{b}|$

8 2 点 A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2) と原点 O を頂点とする △OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．このとき，△OAB の面積 S は次の式で表されることを示せ．

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

9 $\triangle$OAB において，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を C，線分 AC の中点を M とし，直線 OM と辺 AB の交点を D とする．次のものを求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を満たす実数 k の値

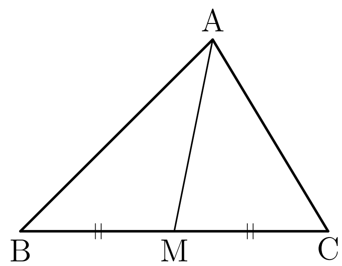


(2) AD : DB

10 $\triangle$ABC において，辺 BC の中点を M とすると，次の等式が成り立つ．

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ．



11 点 A(1, 2) から直線 $3x+4y-2=0$ に垂線を引き，交点を H とする．

(1) $\vec{n}=(3,\ 4)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ を満たす実数 k の値を求めよ．

(2) 点 H の座標を求めよ．

ヒント

7　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ に注意．　　**8**　$S=\dfrac{1}{2}\times \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\sin\angle\mathrm{AOB}$

9　D が直線 AB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s+t=1$ の形．

10　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として，内積を利用する．$\mathrm{AB}^2=|\vec{b}|^2$ など．

11　(1) 点 H の座標を $(s,\ t)$ とすると　　$3s+4t-2=0$

【答】

1 (1) $\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$　(2) $-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$　(3) $-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{d}$

2 (1) $t=-3,\ 1$　［(2) $|\vec{c}|^2=5t^2+10t+10=5(t+1)^2+5$］

3 (1) 1　(2) $60°$

4 $\left[\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right.$ より，点Pは辺BCを $1:2$ に内分する点である．また，
$\left.\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}\text{ より}\quad 4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\overrightarrow{\mathrm{AP}}\ \right]$

5 ［(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$　ここで，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ など］

6 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　$\left[\ \text{(1)}\ \ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}},\ \mathrm{CP}:\mathrm{PD}=\mathrm{t}:(1-\mathrm{t})\right.$ とする．
$\left.\text{(2) }\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{BF}}\text{ を導く}\ \right]$

7 (1) 最大値2，最小値 -2　(2) 最大値3，最小値1

8 $\left[\ \angle\mathrm{AOB}=\theta\text{ とおくと }S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\ \right]$

9 (1) $k=\frac{6}{5}$　(2) $2:3$　$\left[\ \text{(1) }\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}\text{ とすると，}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}\ \right]$

10 $\left[\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}\text{ とすると，}\mathrm{AM}^2=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2=\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right),\right.$
$\left.\mathrm{BM}^2=|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\left(\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right)\text{ など}\ \right]$

11 (1) $k=-\frac{9}{25}$　(2) $\left(-\frac{2}{25},\ \frac{14}{25}\right)$