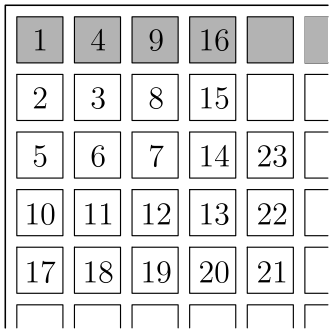
第 3 章　数列

3.1　等差数列と等比数列

3.1.1　数列と一般項

正の奇数を小さい順に並べると，1，3，5，7，$\cdots$ のような数の列ができる．ここでは，数を一列に並べたものを一般的に考えてみよう．

A 数列の表記



自然数 1，2，3，4，$\cdots$ を，右の図のように正方形状に並べていく．このとき，上端に並ぶ数を左から順に取り出すと，

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots \qquad ①$$

のような数の列ができる．

一般に，数を一列に並べたものを**数列**[1]といい，数列における各数を**項**という．

数列の項は，最初の項から順に第 1 項，第 2 項，第 3 項，$\cdots$ といい，n 番目の項を**第 n 項**という．とくに，第 1 項を**初項**という．

数列 ① の初項は 1 で，第 3 項は 9 である．

練習 3.1 上の数列 1，4，9，16，$\cdots$ の第 2 項と第 4 項をいえ．また，第 5 項を求めよ．

数列を一般的に表すには，次のように書く．

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

a_1 が初項，
$a_●$ が第●項

この数列を $\{a_n\}$ と略記することもある．

[1] 項の個数が有限である数列を**有限数列**，無限である数列を**無限数列**ということがある．

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき，n に 1，2，3，4，$\cdots$ を順に代入すると，数列 $\{a_n\}$ の各項が得られる．この a_n を数列 $\{a_n\}$ の**一般項**という．

前ページの数列 ① は，一般項が n^2 の数列である．

[注意] たとえば，一般項が n^2 の数列を，数列 $\{n^2\}$ と略記することもある．

例 3.1　一般項が $a_n = 3n - 2$ である数列 $\{a_n\}$ の第 5 項までを求める．

$a_1 = 3\cdot1 - 2 = 1,\quad a_2 = 3\cdot2 - 2 = 4,$

$a_3 = 3\cdot3 - 2 = 7,\quad a_4 = 3\cdot4 - 2 = 10,$

$a_5 = 3\cdot5 - 2 = 13$

$$a_{\bullet} = 3 \times \bullet - 2$$

この数を代入

練習 3.2 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 5 項までを求めよ．

(1) $a_n = 2n - 1$

(2) $a_n = n(n + 1)$

(3) $a_n = 2^n$

B 数列の一般項を n の式で表す

例 3.2　(1)　-1 と 1 が交互に並ぶ数列 -1，1，-1，1，$\cdots$ の一般項を a_n として n の式で表すと　　$a_n = (-1)^n$

(2)　分母が分子より 1 大きい分数の数列 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{4}{5}$，$\cdots$ の一般項を a_n として n の式で表すと　　$a_n = \dfrac{n}{n+1}$

練習 3.3 次のような数列の一般項 a_n を，n の式で表せ．

(1) 偶数 2，4，6，8，$\cdots$ の数列で符号を交互に変えた数列

-2，4，-6，8，$\cdots$

(2) 分子には奇数，分母には 2 の累乗が順に現れる分数の数列

$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{5}{8}$，$\dfrac{7}{16}$，$\cdots$

3.1.2 等差数列

偶数の数列 2，4，6，8，$\cdots$ や奇数の数列 1，3，5，7，$\cdots$ では，各項が 2 ずつ増えていく．言いかえると，ひとつ前の項との差が常に 2 で，一定になっている．このような性質をもつ数列について考えてみよう．

A 等差数列

たとえば，1 から順に奇数が並ぶ

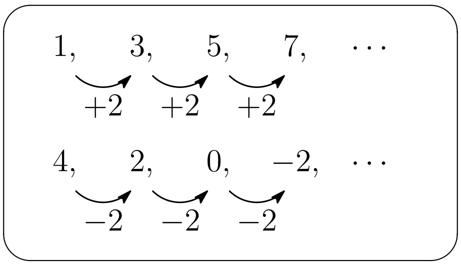
数列　　1，3，5，7，$\cdots$

は，1 に次々と 2 をたすと得られる．

また，4 に次々と -2 をたすと，

$$4，2，0，-2，\cdots$$

のような数列が得られる．



一般に，初項に一定の数 d を次々とたして得られる数列を**等差数列**といい，その一定の数 d を**公差**という．

例 3.3 (1) 初項 2，公差 3 の等差数列は，次のようになる

$$2，5，8，11，\cdots$$

(2) 等差数列 15，13，11，9，$\cdots$ の公差を d とすると，

$$15 + d = 13$$

よって　　$d = 13 - 15 = -2$

練習 3.4 次のような等差数列の初めの 5 項を書け．

(1) 初項 1，公差 5

(2) 初項 20，公差 -4

練習 3.5 次の等差数列の公差を求めよ．また，$\boxed{}$ に適する数を求めよ．

(1) 1，5，9，$\boxed{}$，$\boxed{}$，$\cdots$　　(2) 9，$\boxed{}$，3，0，$\boxed{}$，$\cdots$

B 等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ では，a に d を次々とたすから

$$a_1 = a, \qquad a_2 = a + d,$$
$$a_3 = a + 2d, \quad a_4 = a + 3d,$$
$$\cdots\cdots$$

$$a_{\bullet} = a + (\bullet - 1) \times d$$

1だけ小さい

となり，次のことがいえる．

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

← 等差数列の一般項は n の1次式

例 3.4 初項2，公差3の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 \qquad \text{すなわち} \qquad a_n = 3n - 1$$

練習 3.6 次のような等差数列の一般項を求めよ．また，第10項を求めよ．

(1) 初項3，公差4

(2) 初項10，公差 -5

例題 3.1 第 3 項が 10，第 6 項が 1 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，この数列の一般項を求めよ．

【解】　求める初項を a，公差を d とすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

第 3 項が 10 であるから　$a + 2d = 10$　$\cdots$①

第 6 項が 1 であるから　$a + 5d = 1$　$\cdots$②

①，② を解くと　$a = 16$，$d = -3$

よって，一般項は　$a_n = 16 + (n-1) \times (-3)$

すなわち　$a_n = -3n + 19$

(答) 初項 16，公差 -3，一般項 $a_n = -3n + 19$

練習 3.7 公差が 3，第 9 項が 25 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項を求めよ．また，一般項を求めよ．

練習 3.8 第 5 項が 20，第 10 項が 0 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ．また，一般項を求めよ．

C 第1項と第3項から等差数列を定める

例題 3.2 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ．

$$1,\ x,\ 8,\ \cdots$$

【解】 隣り合う2項の差が等しいから

$$x-1=8-x$$

が成り立つ．
よって，$2x=9$ より $\quad x=\dfrac{9}{2}$

［注意］ 第2項の x は，第1項と第3項の相加平均 $\dfrac{1+8}{2}$ である．

練習 3.9 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ．

(1) $3,\ x,\ 9,\ \cdots$ (2) $4,\ x, -5,\ \cdots$

練習 3.10 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ．

$$\frac{1}{12},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

一般には，次のことが成り立つ．

数列 $a,\ b,\ c$ が等差数列 $\iff$ $2b=a+c$

3.1.3　等差数列の和

初項 1，公差 4 の等差数列の初項から第 8 項までの和 S を求めるのに，次のように工夫して，$S=30\times 8\div 2$ から求める方法がある．

$$\begin{array}{rr} & S = 1+5+9+13+17+21+25+29 \\ +) & S = 29+25+21+17+13+9+5+1 \\ \hline & 2S = 30+30+30+30+30+30+30+30 \end{array}$$

← たす順を逆にしている．

ここでは，この方法により，一般の等差数列の和の公式を求めよう．

A 等差数列の和の公式

初項 a，公差 d，第 n 項が l の等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n で表すとき，

$$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l \qquad \cdots ①$$

であり，たす項の順を逆にすると，S_n は次のようにも表される．

$$S_n = l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a \qquad \cdots ②$$

① と ② の各辺をたすことにより　$2S_n = n(a+l)$
また，l は第 n 項であるから，$l=a+(n-1)d$ と表される．
以上から，次の公式が得られる．

等差数列の和

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

1　初項 a，第 n 項 l のとき　$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a+l)}$

2　初項 a，公差 d のとき　$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}}$

項が n 個ある数列では，n を**項数**といい，第 n 項すなわち最後の項を**末項**という．上の公式 **1** は，初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n を表している．

例 3.5　(1)　初項 1，末項 19，項数 10 の等差数列の和 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot 10(1+19) = 100$$

(2)　初項 1，公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 2\} = n^2$$

← $n=1$，2 などで確かめよう．

練習 3.11 次の和を求めよ．

(1) 初項 2，末項 10，項数 15 の等差数列の和 S

(2) 初項 1，公差 1 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n

例題 3.3 次の等差数列の和 S を求めよ．

$$12,\ 15,\ 18,\ \cdots,\ 99$$

【解】 この等差数列の初項は 12，公差は 3 である．

項数を n とすると　$12+3(n-1)=99$　　$\longleftarrow$ 99 が第 n 項

これを解くと　$n=30$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot30(12+99)=1665$

練習 3.12 次の等差数列の和を求めよ．

(1) $3,\ 7,\ 11,\ \cdots,\ 75$

(2) $102,\ 96,\ 90,\ \cdots,\ 6$

B 自然数の和，奇数の和

自然数の和，奇数の和は，等差数列の和を利用して，次のようになる．

自然数の和，奇数の和

1　$\boldsymbol{1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)}$

2　$\boldsymbol{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$

← **1** は練習 3.11(2)
2 は例 3.5(2) で
求めている．

例 3.6　(1)　$1+2+3+\cdots+10=\frac{1}{2}\cdot 10(10+1)=55$

(2)　$1+3+5+\cdots+19=1+3+5+\cdots+(2\cdot 10-1)$

$$=10^2=100$$

練習 3.13 次の和を求めよ．

(1) $1+2+3+\cdots+30$

(2) $1+3+5+\cdots+55$

C 倍数に関する和

応用例題 3.1 1から100までの自然数について，次の和を求めよ．

(1)　5の倍数の和　　　　(2)　5の倍数でない数の和

考え方　(1)　$5+10+15+\cdots+100=5(1+2+3+\cdots+20)$

(2)　$1+2+3+\cdots+100-(5+10+\cdots+100)$

【解】 (1)　求める和は

$$\begin{aligned}5+10+15+\cdots+100 &= 5(1+2+3+\cdots+20)\\ &= 5\times\frac{1}{2}\cdot 20(20+1)\\ &= 1050\end{aligned}$$

(2)　求める和は

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+100-(5+10+15+\cdots+100)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 100(100+1)-1050 \qquad \longleftarrow \text{(1) の結果を利用している}\\ &= 5050-1050=4000\end{aligned}$$

練習 3.14 1から100までの自然数について，次の和を求めよ．

(1) 3の倍数の和

(2) 3の倍数でない数の和

3.1.4　等比数列

たとえば，3 に次々と 2 をかけると，
次の数列が得られる．

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc} 3, & & 6, & & 12, & & 24, \quad \cdots \\ & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & \end{array}$$

この数列では，隣り合う 2 項の比が，常に一定になっている．
ここでは，このような性質をもつ数列について考えてみよう．

A 等比数列

初項に一定の数 r を次々とかけて得られる数列を**等比数列**といい，その一定の数 r を**公比**という[2]．

例 3.7　(1)　初項 2，公比 -3 の等比数列は，次のようになる．

$$2,\ -6,\ 18, -54,\ \cdots$$

(2)　等比数列 $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots$ の公比を r とすると，

$\dfrac{1}{2}r = \dfrac{1}{4}$ から　　$r = \dfrac{1}{2}$

練習 3.15 次のような等比数列の初めの 5 項を書け．

(1) 初項 1，公比 3

(2) 初項 3，公比 -2

(3) 初項 1，公比 $\dfrac{1}{3}$

(4) 初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$

練習 3.16 次の等比数列の公比を求めよ．また，$\boxed{}$ に適する数を求めよ．

(1) $1,\ 2,\ 4,\ \boxed{},\ \cdots$

(2) $1, -2,\ 4,\ \boxed{},\ \cdots$

(3) $\boxed{},\ 8,\ 4,\ \boxed{},\ \cdots$

(4) $\boxed{},\ 3, -1,\ \boxed{},\ \cdots$

---

[2] 一般に，等比数列の初項と公比は 0 であってもよいが，本書で扱う等比数列は，初項も公比も 0 でないものである．

B 等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ では，a に r を次々とかけるから

$$a_1 = a,\qquad a_2 = ar,$$
$$a_3 = ar^2,\qquad a_4 = ar^3,$$
$$\cdots\cdots$$

$$a_{\bullet} = ar^{\bullet - 1}$$

1だけ小さい

となる．また，$r^0 = 1$ であるから，次のことがいえる．

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

$\longleftarrow$ $r^0 = 1$ より
$a_1 = a \times 1 = a$

例 3.8　(1)　初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

(2)　初項 -2，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(3)　初項 3，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} \qquad \text{すなわち} \qquad a_n = 3^n$$

練習 3.17 次のような等比数列の一般項を求めよ．また，第 5 項を求めよ．

(1)　初項 1，公比 3　　(2)　初項 2，公比 -3

(3)　初項 2，公比 2　　(4)　初項 -3，公比 $\dfrac{1}{2}$

練習 3.18 次の等比数列の一般項を求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots$　　(2)　$3, -3,\ 3, -3,\ \cdots$

例題 3.4 第 4 項が 24，第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ について，初項と公比を求めよ．

【解】 求める初項を a，公比を r とする．

第 4 項が 24 であるから　　$ar^3 = 24$　　$\cdots$①

このとき，第 5 項は $24r$，第 6 項は $24r^2$ である．

よって，$24r^2 = 96$ より　　$r^2 = 4$

これを解くと　　$r = \pm 2$

① から，$r = 2$ のとき $a = 3$, $r = -2$ のとき $a = -3$

(答) 初項 3，公比 2　または　初項 -3，公比 -2

練習 3.19 第 2 項が 6，第 4 項が 54 である等比数列 $\{a_n\}$ について，初項と公比を求めよ．また，第 3 項を求めよ．

C 第 1 項と第 3 項から等比数列を定める

例題 3.5 次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ．

$$2,\ x,\ 5,\ \cdots$$

【解】 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{x}$ より　　$x^2 = 2 \times 5 = 10$　　$\longleftarrow$ 隣り合う 2 項の比が等しい

よって　　$x = \pm\sqrt{10}$

練習 3.20 次の数列が等比数列であるとき，x の値を求めよ．

$$3,\ x,\ 9,\ \cdots$$

一般には，a，b，c が0でないとき，次のことが成り立つ．

数列 a，b，c が等比数列 $\iff$ $b^2 = ac$

[注意] 上の a，b，c が正の数のとき，b は a と c の相乗平均である．

3.1.5 等比数列の和

初項1，公比2の等比数列の初項から第8項までの和 S を求めるのに，次のように工夫して，$S - 2S = 1 - 2^8$ から求める方法がある．

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 \\ 2S &= \quad\ \ 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 和を2倍して，項を1つずつずらして引く．

ここでは，この方法により，一般の等比数列の和の公式を求めよう．

A 等比数列の和の公式

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n は次のようにして求められる．

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots①$$

$r \neq 1$ のとき　$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots②$

とすると，① − ② から　$S_n - rS_n = a - ar^n$

すなわち　$(1-r)S_n = a(1-r^n)$

$1 - r \neq 0$ であるから　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r = 1$ のとき　① より S_n は n 個の a の和になるから　$S_n = na$

以上から，次の公式が得られる．

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$\boldsymbol{S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}}$　または　$\boldsymbol{S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}}$

$r = 1$ のとき　$\boldsymbol{S_n = na}$

[注意] $r < 1$ のとき $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$r > 1$ のとき $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ を利用する．

例題 3.6 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

(1) 初項 3，公比 2　　(2) 初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$

【解】 (1) $S_n = \dfrac{3(2^n-1)}{2-1} = 3(2^n-1)$　　$\leftarrow S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $$S_n = \dfrac{1\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}{2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)} = 2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$$　　$\leftarrow S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

練習 3.21 次の等比数列の初項から第 n までの和 S_n を求めよ.

(1) $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$

(2) $2,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3^2},\ \dfrac{2}{3^3},\ \cdots$

応用例題 3.2 初項から第3項までの和が3，第2項から第4項までの和が -6 となる等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公比 r を求めよ．

考え方　$ar + ar^2 + ar^3 = r(a + ar + ar^2)$ に着目する．

【解】 条件から　$a + ar + ar^2 = 3$　$\cdots$①

$ar + ar^2 + ar^3 = -6$　$\cdots$②

②より　$r(a + ar + ar^2) = -6$

① を代入して　$3r = -6$

よって　$r = -2$

これを ① に代入すると　$a - 2a + 4a = 3$

これを解いて　$a = 1$　(答) $a = 1,\ r = -2$

練習 3.22 初項から第3項までの和が7，第3項から第5項までの和が28となる等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公比 r を求めよ．

研究

複利計算

銀行などがお金を預かったり貸したりするときの，利息計算について考えてみよう．
たとえば，年利率 2% で a 円を 1 年間預金すると，1 年後には $(a \times 0.02)$ 円の利息がつく．したがって，元金 a 円と利息を合わせた元利合計 S_1 円は，次の式で表される．

$$S_1 = a + a \times 0.02 = a(1 + 0.02) = a \times 1.02$$

S_1 円を元金にしてもう 1 年間預けると，元利合計 S_2 円は

$$S_2 = (a \times 1.02) \times 1.02 = a \times 1.02^2$$

となる．
このように，一定期間の終りごとに，その元利合計を次の期間の元金とする利息の計算は，**複利計算**と呼ばれる．
年利率 2%，1 年ごとの複利で，毎年初めに a 円ずつ積み立てるとき，10 年間の元利合計 S 円を求めてみよう．
a 円を n 年間預けると，元利合計は $a \times 1.02^n$ 円になる．
したがって，10 年間に積み立てたお金の元利合計 S 円は，次のようになる．

$$S = a(1.02 + 1.02^2 + 1.02^3 + \cdots + 1.02^{10})$$

(　) 内は，初項 1.02，公比 1.02 の等比数列の和であるから

$$S = a \times \frac{1.02(1.02^{10} - 1)}{1.02 - 1}$$

$1.02^{10} \risingdotseq 1.219$ であるから $S \risingdotseq 11.169a$ となる．$a = 100000$ のとき，10 年間の元利合計は，およそ 111 万 6900 円である．

3.1.6 補充問題

1 一般項が $a_n = 3n - 2$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ.

(1) a_n を $a_n = a + (n-1)d$ の形に表すとき，a，d の値を求めよ.

(2) この数列において，100 は第何項に現れるか.

2 1 から 100 までの自然数のうち，3 で割ると 2 余る数の和を求めよ.

3 第 2 項が 3，第 5 項が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，公比は実数とする.

4 第 2 項が 3，初項から第 3 項までの和が 13 である等比数列の初項と公比を求めよ．

【答】

1 (1) $a=1$，$d=3$　(2) 第 34 項

2 1650

3 $a_n = 3\cdot 2^{n-2}$　［初項を a，公比を r とすると，$ar=3$，$3r^3=24$］

4 初項 1，公比 3　または　初項 9，公比 $\dfrac{1}{3}$

3.2　いろいろな数列

3.2.1　いろいろな数列の和

数列には，これまでに学んだ等差数列，等比数列のほかにも，いろいろなものがある．ここでは，いろいろな数列の和を求める方法を調べよう．

A 自然数の 2 乗の和

次のような 1 から n までの自然数の 2 乗の和を求めてみよう．

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

それには，次の恒等式を利用する．

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$$

$$\begin{array}{ll}
\boxed{k=1} & 1^3 - 0^3 = 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1 \\
\boxed{k=2} & 2^3 - 1^3 = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 1 \\
\boxed{k=3} & 3^3 - 2^3 = 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 1 \\
\cdots\cdots & \qquad\cdots\cdots \\
\boxed{k=n} & n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1
\end{array}$$

左辺だけ加えると

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{1^3} - 0^3 \\
 & \cancel{2^3} - \cancel{1^3} \\
 & \cancel{3^3} - \cancel{2^3} \\
 & \cdots\cdots \\
+) & n^3 - \cancel{(n-1)^3} \\ \hline
 & n^3 - 0^3
\end{array}$$

これら n 個の等式を辺々加えると

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

すなわち　$n^3 = 3S - 3 \times \dfrac{1}{2}n(n+1) + n$

よって　$\begin{aligned} 6S &= 2n^3 + 3n(n+1) - 2n \\ &= n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$

したがって，1 から n までの自然数の 2 乗の和は，次のようになる．

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

例 3.9　$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 &= \frac{1}{6} \times 10 \times (10+1) \times (2\cdot 10 + 1) \\ &= \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = 385 \end{aligned}$

練習 3.23 次の和を求めよ.

(1)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$　　(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+30^2$

B 和の記号 $\sum$

第 n 項が a_n である数列について，第 1 項から第 n 項までの和を，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と書く[3].

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ のように，k の代わりに別の文字を使ってもよい.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

[注意] $\displaystyle\sum_{k=\bigcirc}^{\square} a_k$ と書けば，数列 $\{a_n\}$ の第○項から第□項までの和を表す.

例 3.10 (1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n$　　$\longleftarrow a_k=k$ の場合

(2)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{10} k^2 = 2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2$　　$\longleftarrow a_k=k^2$ で，第 2 項から第 10 項までの和

例 3.11 次の式は，いずれも和 $2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$ を表す.

$$\sum_{k=2}^{6} k^2,\qquad \sum_{i=2}^{6} i^2,\qquad \sum_{k=1}^{5} (k+1)^2$$

[3] 和を意味する英語 Sum の S に対応するギリシャ文字が $\sum$ で,「シグマ」と読む.

練習 3.24 次の (1)〜(3) の式は例 3.10 のような和の形で書け．(4)，(5) の式は和の記号 $\sum$ を用いて書け．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{8}2^k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

(4) $2+3+4+5+6$

(5) $3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2$

自然数の和と自然数の 2 乗の和は，次のように表される．

自然数に関する和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

練習 3.25 次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}k^2$

C 和の記号 $\sum$ の性質

項がすべて c である数列 $\{a_n\}$ では，$a_k = c$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = c + c + c + \cdots + c = nc \qquad \longleftarrow \ c \text{ が } n \text{ 個}$$

となる．したがって，次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} c = nc} \qquad \text{とくに} \qquad \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} 1 = n}$$

また，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ と定数 p に対して

$$\begin{aligned}&(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)\\&\qquad=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\end{aligned}$$

$$pa_1+pa_2+pa_3+\cdots+pa_n = p(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$$

となるので，$\sum$ について次の性質が成り立つ．

$\sum$ の性質

1　$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k}$

2　$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k}$　　ただし，p は k に無関係な定数

[注意]　$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$　も成り立つ．

$\sum$ の性質や自然数の和の公式を利用して，数列の和を求めてみよう．

例 3.12

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(4k+3) &= 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3\\&= 4\times\frac{1}{2}n(n+1)+3n\\&= 2n(n+1)+3n\\&= n(2n+5) \qquad \longleftarrow n\{2(n+1)+3\}=n(2n+5)\end{aligned}$$

練習 3.26 次の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$

例題 3.7 次の和を求めよ.

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)$$

【解】 これは，第 k 項が $k(k+2)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である.
よって，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)&=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\times\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)\end{aligned}$$

練習 3.27 次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 7k + 4)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2)$

練習 3.28 次の和を求めよ．

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

D 和の求め方の工夫

応用例題 3.3 次の和 S を求めよ．

$$S=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

考え方 恒等式 $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ を利用する．

【解】 $S=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

練習 3.29 恒等式 $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ を利用して，次の和 S を求めよ．

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

応用例題 3.4 次の和 S を求めよ．

$$S = 1{\cdot}1 + 2{\cdot}2 + 3{\cdot}2^2 + \cdots 10{\cdot}2^9$$

考え方　一般項が $n{\cdot}2^{n-1}$ で表される数列の和．等比数列の和の公式を導いたのと同様に，S と $2S$ の差を計算する．

【解】

$$\begin{aligned} S &= 1{\cdot}1 + 2{\cdot}2 + 3{\cdot}2^2 + 4{\cdot}2^3 + \cdots + 10{\cdot}2^9 \\ 2S &= \phantom{1{\cdot}1 +{}} 1{\cdot}2 + 2{\cdot}2^2 + 3{\cdot}2^3 + \cdots + 9{\cdot}2^9 + 10{\cdot}2^{10} \end{aligned}$$

の辺々を引くと　　← $(2-1)2=2$　$(3-2)2^2=2^2$　など

$$S - 2S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9 - 10{\cdot}2^{10}$$

よって　$$-S = \frac{2^{10}-1}{2-1} - 10{\cdot}2^{10}$$

したがって　$$S = 9{\cdot}2^{10} + 1 = 9 \times 1024 + 1 = 9217$$

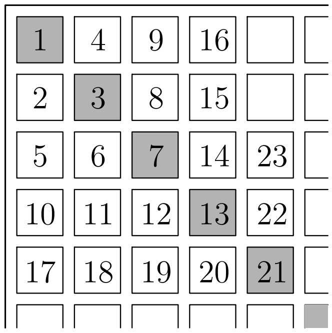
練習 3.30 一般項が $n{\cdot}2^{n-1}$ で表される数列の，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

3.2.2 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項の差をとって順に並べると，別の数列が得られる．この数列の一般項から，数列 $\{a_n\}$ の一般項が求められることがある．

A 階差数列

右の図のように，自然数を正方形状に並べていく．このとき，対角線上に並ぶ数を順に並べた数列



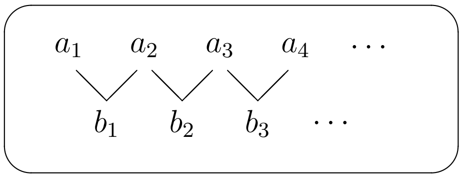
$$1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ \cdots \qquad ①$$

の一般項を求める方法を考えよう．
この数列の隣り合う 2 項の差を順に並べると，次の数列が得られる．

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots \qquad ②$$

一般に，数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項の差

$$a_{n+1}-a_n=b_n$$
$$(n=1,2,3,\ldots)$$



を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**という．

数列 ① を $\{a_n\}$，数列 ② を $\{b_n\}$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であり，第 n 項は $b_n=2n$ であると考えられる．
このとき，数列 $\{a_n\}$ の第 6 項は，次のようにして求められる．

$$a_6-a_5=b_5 \text{ から} \qquad a_6=a_5+b_5=21+10=31 \qquad \longleftarrow b_5=2\cdot5=10$$

練習 3.31 階差数列を考えて，次の数列の第 6 項，第 7 項を求めよ．

$$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ \cdots$$

B 階差数列から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ &\cdots\cdots \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlll} & \cancel{a_2} - a_1 & = b_1 \\ & \cancel{a_3} - \cancel{a_2} & = b_2 \\ & \cancel{a_4} - \cancel{a_3} & = b_3 \\ & \cdots\cdots & \\ +) & a_n - \cancel{a_{n-1}} & = b_{n-1} \\ \hline & a_n - a_1 & = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} \end{array}$$

となり，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

以上から，次のことがいえる．

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$b_n = a_{n+1} - a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$n \geqq 2$ のとき $\qquad a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

例題 3.8 次の数列の一般項 a_n を求めよ．

$$1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ \cdots$$

【解】 この数列の階差数列は　$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$

その一般項を b_n とすると，$b_n = 2n$ である．

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)n \qquad \longleftarrow a_1=1,\ b_k=2k$$

すなわち　$a_n = n^2 - n + 1$

初項は $a_1 = 1$ なので，上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ．

したがって，一般項 a_n は　$a_n = n^2 - n + 1$

練習 3.32 階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ．

(1) $1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots$

(2) $1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ \cdots$

C 数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ において，初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が n の式で与えられているときに，一般項 a_n を求める方法を考えよう．

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

において　$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = S_{n-1}$

であるから，

$$n \geqq 2 \text{ のとき}\quad S_n = S_{n-1} + a_n, \qquad S_1 = a_1$$

がいえる．したがって，次のことが成り立つ．

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

$n \geqq 2$ のとき　$\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}$

初項 a_1 は　$\boldsymbol{a_1 = S_1}$

例題 3.9 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = n^2$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【解】 $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

初項は　$a_1 = S_1 = 1^2 = 1$

よって，$a_n = 2n - 1$ は $n = 1$ のときにも成り立つ．

したがって，一般項は　$a_n = 2n - 1$

練習 3.33 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = n^2 + n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

3.2.3　補充問題

5 次の数列の第 k 項を k の式で表せ．また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

$$1,\quad 1+2,\quad 1+2+3,\quad \cdots,\quad 1+2+3+\cdots+n,\quad \cdots$$

6 次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\{(k+1)(k+2)-k(k+1)\}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

7 階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ．

$$2,\quad 3,\quad 5,\quad 9,\quad 17,\quad \cdots$$

【答】

5 第 k 項 $\dfrac{1}{2}k(k+1)$，$S_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

6 (1) 88　(2) 2

7 $a_n=2^{n-1}+1$ $\left[n \geqq 2 \text{ のとき，} a_n=2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}\right]$

3.3　数学的帰納法

3.3.1　漸化式

数列では，隣り合う 2 項間の関係と初項がわかれば，すべての項が定まる．
たとえば，初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ は，次の 2 つの条件で定まる．

［1］　$a_1 = 3$　　［2］　$a_{n+1} = 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

ここでは，このような条件から数列の一般項を求める方法を調べよう．

A 数列の漸化式と項

数列 $\{a_n\}$ は，次の 2 つの条件［1］,［2］を与えると，a_2，a_3，a_4，$\cdots$ が順に求められ，すべての項がただ 1 通りに定まる．

［1］　初項

［2］　a_n から a_{n+1} を決める関係式　$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

例 3.13　次の条件［1］,［2］によって定まる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項と第 3 項

［1］　$a_1 = 1$　　［2］　$a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

第 2 項は，$a_2 = 2a_1 + 3$ と $a_1 = 1$ から　　$\longleftarrow$［2］で $n = 1$ を代入すると $a_2{=}2a_1{+}3$

$$a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

第 3 項は　$a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$

上の［2］のように，数列において前の項から次の項を決めるための関係式を**漸化式**（ぜんかしき）という．今後とくに断らなくても，与えられた漸化式は $n = 1, 2, 3, \ldots$ で成り立つものとする．

練習 3.34 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ．

(1)　$a_1 = 100$，$a_{n+1} = a_n - 5$　　(2)　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 3a_n + 2$

B 漸化式から一般項を求める (1)

等差数列と等比数列の漸化式は，それぞれ次の形をしている．

等差数列 $\{a_n\}$ の漸化式は，$a_{n+1} = a_n + d$ の形． $\longleftarrow d$ が公差

等比数列 $\{a_n\}$ の漸化式は，$a_{n+1} = ra_n$ の形． $\longleftarrow r$ が公比

練習 3.35 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 3$

(2) $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n$

数列の漸化式が与えられた場合に，その一般項を求めてみよう．

漸化式が $a_{n+1} = a_n + (n\text{ の式})$ の形の場合は，107 ページで学んだ階差数列を利用する方法で，一般項が求められることがある．

例題 3.10 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 2^n$$

【解】 条件より　$a_{n+1} - a_n = 2^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 2^n であるから，

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 1 + 2^n - 2 \end{aligned}$$

← $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$ は初項 2，公比 2，項数 $n-1$ の等比数列の和である．

よって　$a_n = 2^n - 1$

初項は $a_1 = 1$ なので，上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ．

したがって，一般項は　$a_n = 2^n - 1$

練習 3.36 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 3^n$$

C 漸化式から一般項を求める (2)

次のような条件を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考えよう．

$$b_n = a_n + 2 \qquad \cdots ①$$

$$b_{n+1} = 3b_n \qquad \cdots ②$$

② により，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから，初項がわかれば一般項 b_n がわかり，① から一般項 a_n が求められる．

一方，① から $b_{n+1} = a_{n+1} + 2$ となるので，② により

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2) \qquad \cdots ③$$

が成り立つ．逆に，③ は ① と ② で表すことができる．
③ を整理すると，次の漸化式が得られる．

$$a_{n+1} = 3a_n + 4 \qquad \cdots ④$$

そこで，④ の形の漸化式を ③ の形に変形する方法を調べよう．

④ に対して，次の等式を満たす c を考える．　← a_{n+1} と a_n を c でおきかえた等式．

$$c = 3c + 4 \qquad \cdots ⑤$$

④ − ⑤ から　$a_{n+1} - c = 3(a_n - c)$
⑤ を解くと，$c = -2$ であるから，
$c = -2$ を代入すると

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & 3a_n + 4 \\ -) & c & = & 3c \;\; + 4 \\ \hline & a_{n+1} - c & = & 3(a_n - c) \end{array}$$

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$$

よって，③ が得られた．

一般に，$a_{n+1} = pa_n + q$ の形の漸化式は，等式 $c = pc + q$ を満たす c を用いて，次のように変形できる．

$$a_{n+1} - c = p(a_n - c)$$

練習 3.37 次の $\boxed{}$ に適する数を求めよ．

(1) $a_{n+1} = 2a_n + 3$ を変形すると　$a_{n+1} + \boxed{} = 2(a_n + \boxed{})$

(2) $a_{n+1} = 4a_n - 6$ を変形すると　$a_{n+1} - \boxed{} = 4(a_n - \boxed{})$

例題 3.11 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4$$

← 前ページの ④ の漸化式

【解】 漸化式を変形すると　$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$

$b_n = a_n + 2$ とすると　$b_{n+1} = 3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$$b_1 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = b_n - 2$ より

$$a_n = 3^n - 2$$

練習 3.38 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3$

(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 4a_n - 6$

研究

$a_{n+1}=pa_n+q$ を満たす数列の階差数列

次の漸化式 ① を満たす数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を考える．

$$a_{n+1}=2a_n+3 \qquad \cdots ①$$

① より

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+3 \qquad \cdots ②$$

も成り立つ．② − ① から

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$$

ここで，$a_{n+2}-a_{n+1}=b_{n+1}$，$a_{n+1}-a_n=b_n$ であるから

$$b_{n+1}=2b_n$$

したがって，階差数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列である．
一般に，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の階差数列は，公比 p の等比数列である．

3.3.2　数学的帰納法

87 ページでは次の等式を導いた．

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots\text{(A)}$$

自然数は限りなくあるから，この事実をすべての n について確かめることはできない．ここでは，自然数 n に関する等式や不等式などがすべての自然数 n について成り立つ，と結論するための新しい証明法を学ぼう．

A 数学的帰納法の原理

自然数 n に関する等式 (A) について，次の［1］,［2］を考えてみる．

［1］　$n=1$ のとき (A) が成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると，

　　　$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］と［2］がともに示せたら，次のことがいえる．

　$n=1+1$ すなわち $n=2$ のときも，(A) が成り立つ．

すると，$n=2+1$ すなわち $n=3$ のときも，(A) が成り立つ．

同様に $n=4,5,6,\ldots$ のときも (A) が成り立ち，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．このような証明法を**数学的帰納法**という．

数学的帰納法

一般に，自然数 n に関する条件 (A) があるとき，

　「すべての自然数 n について (A) が成り立つ」

を証明するには，次の［1］,［2］を示せばよい．

［1］　$n=1$ のとき (A) が成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると，

　　　$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

B 等式の証明

数学的帰納法を用いて，自然数 n に関する等式を証明してみよう．

例題 3.12 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ．

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

[証明] この等式を (A) とする．

［1］ $n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1, \quad \text{右辺}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

すなわち

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ． **[証終]**

練習 3.39 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ．

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

(2) $1{\cdot}2+2{\cdot}3+3{\cdot}4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

C 不等式の証明

応用例題 3.5 n を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > 3n$$

考え方　$n \geqq 4$ であるから，［1］では $n=4$ のときに不等式が成り立つことを示す．［2］では $k \geqq 4$ としてよい．

[証明] この不等式を (A) とする．

［1］$n=4$ のとき

$$\text{左辺} = 2^4 = 16, \qquad \text{右辺} = 3 \cdot 4 = 12$$

よって，$n=4$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$k \geqq 4$ として，$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$2^k > 3k$$

であると仮定する．両辺に 2 をかけると

$$2^{k+1} > 6k \qquad \cdots ①$$

次に，$k \geqq 4$ のとき

$$6k > 3(k+1) \qquad \cdots ②$$

← $n=k+1$ のときの (A) の右辺が $3(k+1)$

を示す．$k \geqq 4$ のとき

$$6k - 3(k+1) = 3(k-1) > 0$$

よって，② も成り立つから，①，② より

$$2^{k+1} > 3(k+1)$$

したがって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，4 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ．**[証終]**

練習 3.40 n を 3 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > 2n + 1$$

D 整数の性質の証明

応用例題 3.6 すべての自然数 n について，$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ は 9 の倍数である．このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

考え方　9 の倍数は，整数 m を用いて $9m$ と表される．逆に，整数 m を用いて $9m$ と表される数は 9 の倍数である．

[証明]「$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ は 9 の倍数である」を (A) とする．

［1］$n=1$ のとき

$$1^3+2^3+3^3=36$$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定する．

すなわち，整数 m を用いて

$$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3=9m$$

と表されると仮定する．

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}&(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3\\&\quad=9m-k^3+(k+3)^3\\&\quad=9m-k^3+(k^3+3k^2\cdot3+3k\cdot3^2+3^3)\\&\quad=9(m+k^2+3k+3)\end{aligned}$$

よって，$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ は 9 の倍数であるから，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．　**[証終]**

練習 3.41 すべての自然数 n について，n^3+2n は 3 の倍数である．このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

3.3.3　補充問題

8 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の第 4 項を，それぞれ求めよ．

$$a_1 = 1,\quad b_1 = 0,\quad a_{n+1} = a_n + b_n,\quad b_{n+1} = 2b_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

9 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ．

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

10 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ．

【答】

8 $a_4=5,\ b_4=7$

9 **［証明］** この等式を (A) とすると

［1］ $n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1^3=1,\quad \text{右辺}=\left\{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)\right\}^2=1$$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき (A) が成り立つ．すなわち

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3&=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}\\&=\left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2\end{aligned}$$

すなわち

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}\right]^2$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．　**［証終］**

10 (1) $a_2=\dfrac{3}{2},\ a_3=\dfrac{4}{3},\ a_4=\dfrac{5}{4}$

(2) $a_n=\dfrac{n+1}{n}$

［証明］ この結論を (A) とする．

［1］ $n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{1+1}{1}=2$ であり，(A) が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき，(A) が成り立つ．

すなわち $a_k=\dfrac{k+1}{k}$ であると仮定すると，

$$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}=2-\frac{k}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}=\frac{(k+1)+1}{k+1}$$

となり，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．　**［証終］**

3.4 章末問題

3.4.1 章末問題 A

1 第 4 項が 14，第 8 項が 30 である等差数列がある．次の数は，この数列の項であるかどうかを調べよ．また，項であるときは第何項かを調べよ．

(1) 70 (2) 123

2 初項が 60，末項が -30 である等差数列の和が 240 であるとき，この数列の公差と項数を求めよ．

3 1 日目に 1 円，2 日目に 2 円，3 日目に 4 円，4 日目に 8 円，$\cdots$ というように，前日の 2 倍の金額を毎日貯金するとき，15 日間での貯金の総額を求めよ．

4 初項が正の数である等比数列 $\{a_n\}$ の，第2項と第4項の和が20で，第4項と第6項の和が80であるとき，次のものを求めよ．

(1) 初項と公比

(2) 初項から第10項までの和

5 次の数列の第 k 項を k の式で表せ．また，その和を求めよ．

$$1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ \cdots,\ 1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

6 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} + a_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(3) $a_1 = 2, \quad 2a_{n+1} = a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

7 すべての自然数 n について，$7^n - 1$ は6の倍数である．このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

3.4.2 章末問題 B

8 次のように自然数の列を，順に1個，2個，3個，$\cdots$ の群に分ける．

$$(1),\ (2,\ 3),\ (4,\ 5,\ 6),\ (7,\ 8,\ 9,\ 10),\ \cdots$$

(1) 第 n 番目の群の最初に並ぶ自然数を n の式で表せ．

(2) 第10番目の群に入るすべての自然数の和を求めよ．

9 項数 n の数列 $1{\cdot}n,\ 2(n-1),\ 3(n-2),\ \cdots,\ n{\cdot}1$ がある．

(1) この数列の第 k 項を n と k を用いた式で表せ．

(2) この数列の和を求めよ．

10 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = 2a_n - 1$ であるとする．

(1) $a_{n+1} = 2a_n$ であることを示せ．

(2) 第 n 項 a_n を求めよ．

11 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2(n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

12 $a > 0$ で n を自然数とする．数学的帰納法を用いて，次の不等式を証明せよ．

$$(1+a)^n \geqq 1 + na$$

13 すべての自然数 n について，$2^{2n-1}+3^{2n-1}$ は 5 の倍数である．このことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

ヒント

9　(2)　n は k に無関係な定数であることに注意する．

11　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ として，まず数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める．

13　$n=k+1$ のとき，$2^{2(k+1)-1}=2^{2k+1}=2^2\cdot 2^{2k-1}$ などと変形する．

【答】

1 (1) 第18項　(2) 項ではない

2 公差 -6，項数16

3 $32,767$円

4 (1) 初項2，公比2　(2) 2046

［初項を a，公比を r とすると $ar+ar^3=20$，$ar^3+ar^5=80$ から $r^2=4$，$ar=4$］

5 第 k 項 k^2，和 $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

6 (1) $a_n=n^2-1$　(2) $a_n=\dfrac{(-1)^n+3}{2}$　(3) $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+1$

$\left[n \geqq 2\right.$ のとき $a_n=0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$　(2) $a_{n+1}-\dfrac{3}{2}=-\left(a_n-\dfrac{3}{2}\right)$

(3) $\left.a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1)\right]$

7 ［$7^k-1=6m$ (m は整数) と表されると仮定すると，

$7^{k+1}-1=7\cdot 7^k-1=7(6m+1)-1=6(7m+1)$］

8 (1) $\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)$　(2) 505

$\left[\right.$ (1) $\dfrac{1}{2}(n-1)n+1$　(2) 初項46，末項55，項数10の等差数列の和 $\left.\right]$

9 (1) $k(n-k+1)$　(2) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

$\left[(2)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\right]$

10 (2) $a_n=2^{n-1}$　［(1) $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n$］

11 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$　$\left[b_n=\dfrac{1}{a_n}\right.$ とおくと，$\left.b_{n+1}-b_n=2(n+1)\right]$

12 ［$(1+a)^k \geqq 1+ka$ が成り立つと仮定すると，

$(1+a)^{k+1} \geqq (1+ka)(1+a)=1+(k+1)a+ka^2>1+(k+1)a$］

13 ［$2^{2k-1}+3^{2k-1}=5m$ (m は整数) と表されると仮定すると，

$2^{2(k+1)-1}+3^{2(k+1)-1}=2^2\cdot 2^{2k-1}+3^2\cdot 3^{2k-1}=4\cdot 2^{2k-1}+9(5m-2^{2k-1})$］