第 3 章　図形と方程式

3.1　点と直線

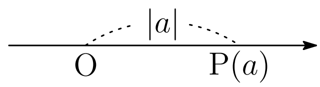
3.1.1　直線上の点

数直線上では，1 つの点に 1 つの実数が対応している．
ここでは，数直線上の点について調べよう．

A 数直線上の点

数直線上では，点 P に対応した実数 a がただ 1 つ定まる．a を点 P の**座標**といい，座標が a である点 P を $\mathbf{P}(\boldsymbol{a})$ で表す．

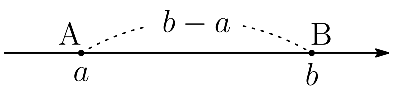
数直線上の原点 O と点 P(a) の距離は，a の絶対値 $|a|$ で表される．



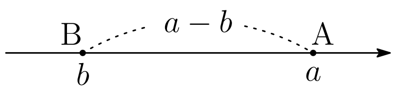
$$a \geqq 0 \text{ のとき} \quad |a| = a, \qquad a < 0 \text{ のとき} \quad |a| = -a$$

数直線上の 2 点間の距離を求めてみよう．

$\boxed{a < b \text{ のとき}}$



$\boxed{a > b \text{ のとき}}$



例 3.1　2 点 A(2)，B(5) 間の距離は　AB $= 5 - 2 = 3$
2 点 A(3)，B(1) 間の距離は　AB $= 3 - 1 = 2$

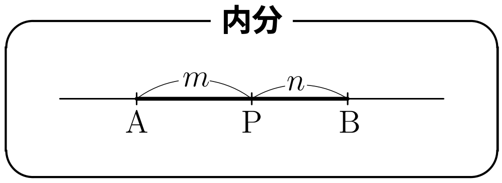
一般に，2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は，次の式で表される．

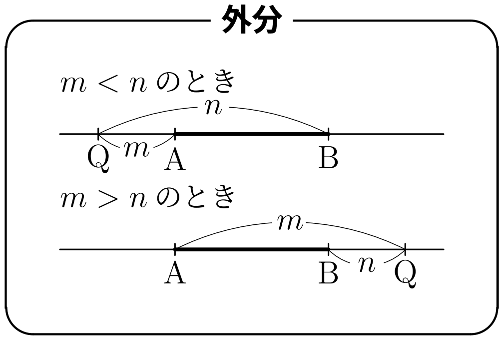
$$\mathbf{AB} = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$$

練習 3.1 次の 2 点間の距離を求めよ．

(1)　A(6)，B(1)　　(2)　A(-2)，B(3)

B 内分と外分





m，n を正の数とする．
線分 AB 上の点 P が

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

を満たすとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分する**という．
また，線分 AB 上の延長上の点 Q が

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n \quad (m \neq n)$$

を満たすとき，点 Q は線分 AB を $m : n$ に**外分する**という．
点 P を線分 AB の**内分点**，点 Q を線分 AB の**外分点**という．

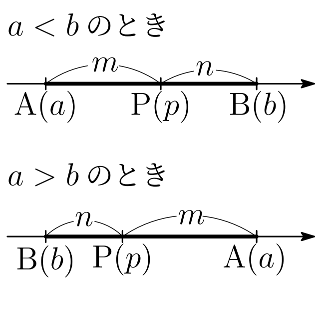
練習 3.2 数直線上の 3 点 A(1)，B(3)，C(7) について，次の $\boxed{\quad}$ に適する数または用語を入れよ．

(1) 点 C は線分 AB を $\boxed{\quad}$: $\boxed{\quad}$ に $\boxed{\qquad}$ する．

(2) 点 B は線分 AC を $\boxed{\quad}$: $\boxed{\quad}$ に $\boxed{\qquad}$ する．

(3) 点 A は線分 BC を $\boxed{\quad}$: $\boxed{\quad}$ に $\boxed{\qquad}$ する．

2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 p を求めてみよう．
$a < b$ のとき，$\mathrm{AP} = p - a$，$\mathrm{PB} = b - p$ である．
$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ より



$$(p - a) : (b - p) = m : n$$

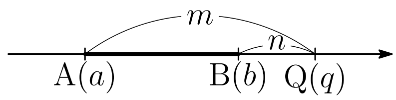
よって　$n(p - a) = m(b - p)$

したがって　$p = \dfrac{na + mb}{m + n}$　$\cdots$ ①

$a > b$ のときも，同様にして ① が得られる．

次に，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の座標 q を求めてみよう．

$m>n$，$a<b$ のとき，点 B は線分 AQ を $(m-n):n$ に内分するから



$$b=\frac{na+(m-n)q}{(m-n)+n}$$

したがって　$$q=\frac{-na+mb}{m-n}\quad\cdots②$$

同様にして，m と n，a と b の大小に関係なく ② が得られる．
以上をまとめると，次のようになる．

線分の内分点・外分点

2 点 A(a)，B(b) を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点を P，
外分する点を Q とする．

点 P の座標は $\boldsymbol{\dfrac{na+mb}{m+n}}$，　点 Q の座標は $\boldsymbol{\dfrac{-na+mb}{m-n}}$

とくに，線分 AB の中点の座標は $\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}}$ である．

[注意] 内分点の座標で n を $-n$ におきかえたものが，外分点の座標である．

**例 3.2　2 点 A(3)，B(6) に対して，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P，
2 : 1 に外分する点 Q の座標を求める．**

内分点 P の座標は　$\dfrac{1\times3+2\times6}{2+1}=\dfrac{15}{3}=5$

外分点 Q の座標は　$\dfrac{-1\times3+2\times6}{2-1}=9$

練習 3.3 2 点 A(4)，B(8) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ．

(1)　3 : 2 に内分する点 C　　　(2)　3 : 1 に外分する点 D

(3)　2 : 3 に外分する点 E　　　(4)　中点 M

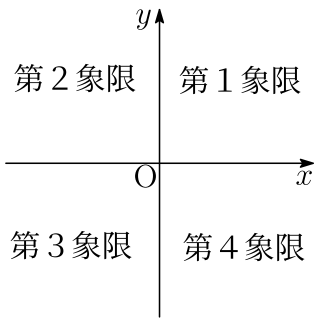
3.1.2　平面上の点

座標軸の定められた平面すなわち座標平面上の点について考えよう.

A 座標平面上の点

座標平面は座標軸によって4つの部分に分けられる．これらの各部分を**象限**（しょうげん）といい，右の図のように，それぞれを**第1象限**，**第2象限**，**第3象限**，**第4象限**という.

座標軸はどの象限にも含めない.



練習 3.4 次の点はどの象限にあるか.

(1) 点 A(2, 3)　　(2) 点 B(2, −3)

(3) 点 C(−2, 3)　　(4) 点 D(−2, −3)

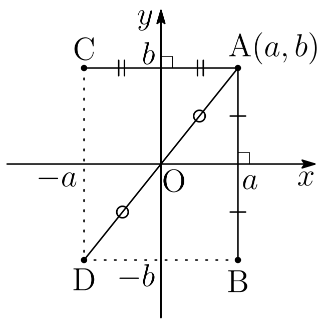
点 A(a, b) が第1象限にあるとき，A と

x 軸について対称な点 B

y 軸について対称な点 C

原点について対称な点 D

の座標は，それぞれ次のようになる.



点 B	点 C	点 D
$(\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b})$	$(-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	$(-\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b})$

このことは，点 A が他の象限にあるときも同じである.

練習 3.5 点 P(−2, 3) に対して，次のような点の座標を求めよ.

(1) x 軸について対称な点 Q　　(2) 原点について対称な点 R

B 2点間の距離

2点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB を求めてみよう．

右の図の直角三角形 ABC では

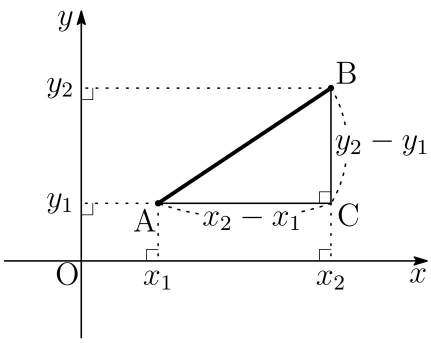
$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$$

が成り立つから

$$\mathrm{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

となる．よって

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



一般に，次のことが成り立つ．

2点間の距離

2点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB は

$$\boldsymbol{\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

とくに，原点 O と点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ との距離 OA は

$$\boldsymbol{\mathrm{OA} = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}}$$

例 3.3 2点 $\mathrm{A}(2, -1)$，$\mathrm{B}(4,\ 3)$ 間の距離 AB は

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + \{3-(-1)\}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

原点 O と点 $\mathrm{A}(2, -1)$ との距離 OA は

$$\mathrm{OA} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

練習 3.6 次の2点間の距離を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(4,\ 6)$　　(2) $\mathrm{C}(-3,\ 1)$，$\mathrm{D}(2, -4)$

(3) $\mathrm{E}(5, -2)$，$\mathrm{F}(3, -2)$　　(4) 原点 O，$\mathrm{A}(2, -3)$

例題 3.1 2点 $\mathrm{A}(3, -1)$，$\mathrm{P}(x,\ 2)$ 間の距離が5であるとき，x の値を求めよ．

【解】 $\mathrm{AP} = 5$ すなわち $\mathrm{AP}^2 = 5^5$ より

$$(x-3)^2 + \{2-(-1)\}^2 = 5^2$$

$(x-3)^2 = 16$ であるから　　$x - 3 = \pm 4$

よって　　$x = 7, -1$

練習 3.7 2点 $\mathrm{B}(-5,\ 2)$，$\mathrm{Q}(7,\ y)$ 間の距離が13であるとき，y の値を求めよ．

応用例題 3.1 $\triangle\mathrm{ABC}$ の辺 BC の中点を M とするとき，等式

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

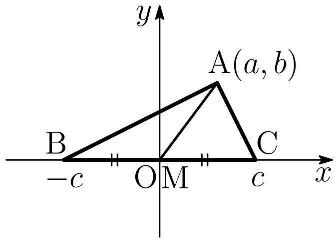
が成り立つ．このことを証明せよ．

> **考え方**　座標平面上に $\triangle\mathrm{ABC}$ をとって証明する．そのとき，辺の長さの計算がしやすいように座標軸を定めるとよい．

[証明] M は辺 BC の中点であるから，M を原点にとり，右の図のように

$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-c,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$

とする．
このとき



$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\} = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2 = (a^2 + b^2) + c^2$$

よって　　$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$　　**[証終]**

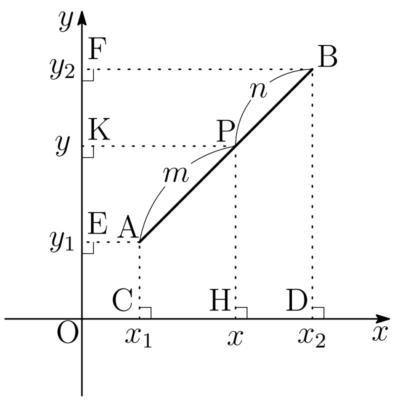
練習 3.8 点 P と長方形 ABCD について，等式 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{CP}^2=\mathrm{BP}^2+\mathrm{DP}^2$ が成り立つ．このことを証明せよ．

C 内分点・外分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB について，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ となる点 P の座標を求めてみよう．

右の図のように，点 A，B，P から x 軸，y 軸にそれぞれ垂線を下ろすと，平行線と線分の比の関係により

$$\mathrm{CH}:\mathrm{HD}=\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$$
$$\mathrm{EK}:\mathrm{KF}=\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$$



が成り立つ．P が内分点，外分点の場合について，点 H の x 座標，点 K の y 座標を求めると，次のことが得られる．

内分点・外分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とすると

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{nx_1+mx_2}{m+n}},\ \boldsymbol{\frac{ny_1+my_2}{m+n}}\right),\ \mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}},\ \boldsymbol{\frac{-ny_1+my_2}{m-n}}\right)$$

とくに，線分 AB の中点の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{x_1+x_2}{2}},\ \boldsymbol{\frac{y_1+y_2}{2}}\right)$

例 3.4 2 点 A$(-1,\ 6)$，B$(4,\ 1)$ を結ぶ線分 AB について
3 : 2 に内分する点 P の座標は

$$\left(\frac{2\times(-1)+3\times4}{3+2},\ \frac{2\times6+3\times1}{3+2}\right) \text{より} \qquad (2,\ 3)$$

5 : 2 に外分する点 Q の座標は

$$\left(\frac{-2\times(-1)+5\times4}{5-2},\ \frac{-2\times6+5\times1}{5-2}\right) \text{より} \qquad \left(\frac{22}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

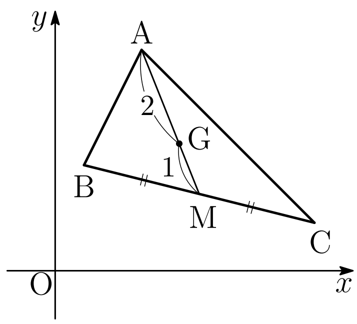
練習 3.9 2 点 A$(-3,\ 2)$，B$(4,\ 5)$ を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ.

(1) 2 : 1 に内分する点 C

(2) 2 : 1 に外分する点 D

(3) 2 : 3 に外分する点 E

(4) 中点 M



例題 3.2 3 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC において，辺 BC の中点を M，線分 AM を 2 : 1 に内分する点を G とする．G の座標を求めよ．

【解】 BC の中点 M の座標は

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

G は線分 AM を 2 : 1 に内分するから，その座標は

$$\left(\frac{1\times x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \frac{1\times y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$$

すなわち　$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

例題 3.2 における点 G を，△ABC の**重心**という．

> 3 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は
>
> $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

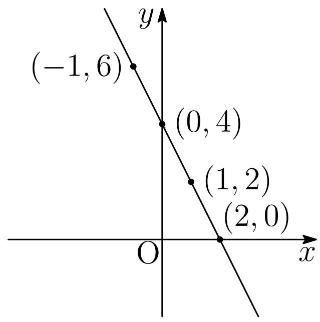
練習 3.10 次の 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ．

(1) A(1, 1)，B(5, 2)，C(3, 4)

(2) A(−2, 4)，B(0, −3)，C(2, 1)

3.1.3　直線の方程式

x，y の 1 次方程式 $2x+y-4=0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の全体を座標平面上にとると，右の図のような直線になる．
一般に，x，y の方程式を満たす点 $(x,\ y)$ の全体が図形 $\boldsymbol{F}$ であるとき，その方程式を**図形 $\boldsymbol{F}$ の方程式**という．
ここでは，直線の方程式について考えることにしよう．



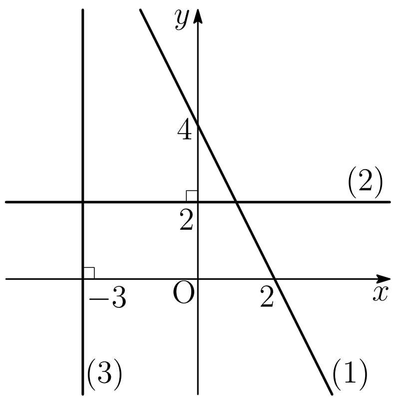
A $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の 1 次方程式の表す図形

例 3.5　(1) **方程式 $2x+y-4=0$ の表す図形**

この方程式を変形すると

$$y=-2x+4$$

よって，この方程式の表す図形は，傾きが -2，切片が 4 の直線である．



(2) **方程式 $y-2=0$ の図形**

$y=2$ であるから，この方程式の表す図形は，点 $(0,\ 2)$ を通り y 軸に垂直な直線である．

(3) **方程式 $x+3=0$ の表す図形**

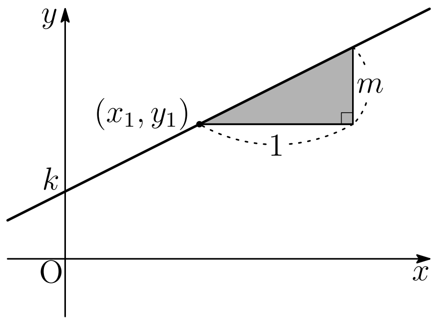
$x=-3$ であるから，この方程式の表す図形は，点 $(-3,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線である．

練習 3.11 次の方程式の表す直線を座標平面上にかけ．

(1) $3x-y+1=0$　　(2) $y+1=0$　　(3) $x-2=0$

一般に，x，y の 1 次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形は直線である．ここで，a，b，c は定数で，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ である．

B 直線の方程式のいろいろな形



傾き m の直線

$$y = mx + k \quad \cdots ①$$

が点 $(x_1,\ y_1)$ を通るとき，

$$y_1 = mx_1 + k \quad \cdots ②$$

である．① − ② により k を消去すると，次のことが得られる．

直線の方程式 (1)

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り傾きが m の直線の方程式は

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

例 3.6 点 $(1,\ 3)$ を通り傾きが 2 の直線の方程式は

$$y - 3 = 2(x-1) \quad すなわち \quad y = 2x + 1$$

練習 3.12 次のような直線の方程式を求めよ．

(1) 点 $(2, -4)$ を通り傾きが 3 の直線

(2) 点 $(-3,\ 1)$ を通り傾きが -2 の直線

異なる2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式を求めよう．

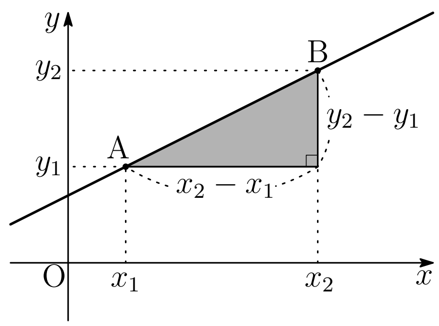
$x_1 \neq x_2$ のとき，直線ABは

傾きが $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ で，点Aを通る

から，その方程式は

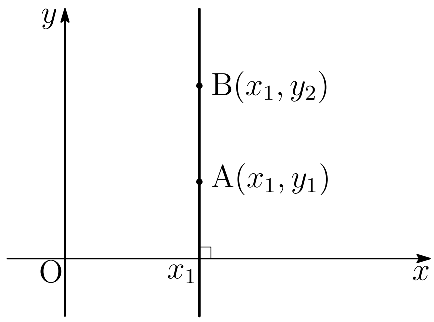
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

である．



x 座標が等しく，y 座標の異なる2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_1,\ y_2)$ を通る直線ABは x 軸に垂直である．x 軸とは点 $(x_1, 0)$ で交わるから，その方程式は，次のようになる．

$$x = x_1$$



直線の方程式 (2)

異なる2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　$\boldsymbol{y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$

$x_1 = x_2$ のとき　$\boldsymbol{x = x_1}$

[注意] 座標平面上のどんな直線も，x，y の1次方程式で表される．

例 3.7 2点 $(1,\ 2)$，$(3, -4)$ を通る直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{-4 - 2}{3 - 1}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -3x + 5$$

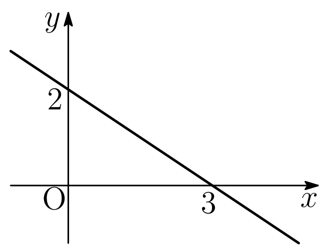
練習 3.13 次の2点を通る直線の方程式を求めよ．

(1) $(3,\ 2)$，$(5,\ 6)$　　　(2) $(-1,\ 4)$，$(2,\ -2)$

(3)　$(2, -1)$，$(1, -1)$　　　　(4)　$(3, -1)$，$(3,\ 4)$

直線が x 軸，y 軸とそれぞれ点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ で交わるとき，a をこの直線の $\boldsymbol{x}$ **切片**，b をこの直線の $\boldsymbol{y}$ **切片**という．

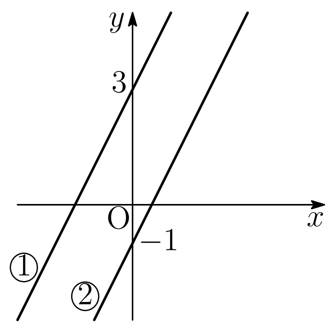
練習 3.14 x 切片が 3，y 切片が 2 である直線の方程式は，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ の形で表されることを示せ．



3.1.4　2 直線の関係

2 直線の位置関係では，平行，垂直という 2 つの場合がとくに大切である．
ここでは，2 直線の関係について学ぼう．

A 2 直線の平行と垂直



例 3.8 2 直線

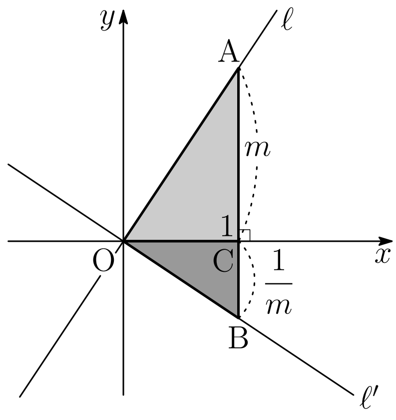
$$y=2x+3 \quad \cdots ①$$
$$y=2x-1 \quad \cdots ②$$

は，傾きがどちらも 2 で等しい．
よって，この 2 直線は平行である．

練習 3.15 次の中で，直線 $y=-2x$ と平行であるものはどれか．

①　$y=2x-3$　　②　$y=-2x+4$　　③　$2x+y+5=0$

次に，傾き m の直線 ℓ に垂直な直線 ℓ' の傾きを調べよう．



右の図のように，原点Oを通る2直線 ℓ，ℓ' および x 軸と直線 $x=1$ との交点を，それぞれA，B，Cとする．△OCA と △BCO は相似であるから

$$\mathrm{OC}:\mathrm{BC}=\mathrm{CA}:\mathrm{CO}$$

よって　$$1:\mathrm{BC}=m:1$$

したがって　$$\mathrm{BC}=\frac{1}{m}$$

このことから，直線 ℓ' の傾きは $-\dfrac{1}{m}$ になることがわかる．

一般に，傾き m の直線に垂直な直線の傾きは $-\dfrac{1}{m}$ である．

すなわち，2直線が垂直のとき，それぞれの傾きの積は -1 である．

2直線の平行，垂直

異なる2直線 $y=m_1x+k_1$，$y=m_2x+k_2$ について

$$\boldsymbol{m_1=m_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{2直線が平行}$$

$$\boldsymbol{m_1m_2=-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{2直線が垂直}$$

練習 3.16 次の2直線は，それぞれ平行と垂直のいずれであるか．

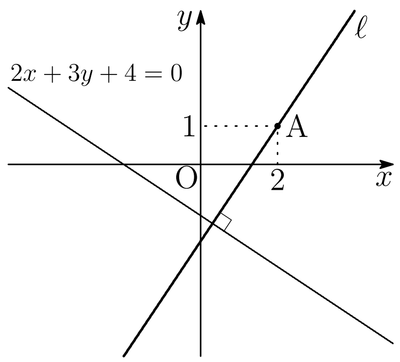
(1) $y=3x-1$，$x+3y+2=0$

(2) $2x+3y=3$，$4x+6y=5$

例題 3.3 点 $\mathrm{A}(2, 1)$ を通り，直線 $2x+3y+4=0$ に垂直な直線 ℓ の方程式を求めよ．

【解】 直線 $2x+3y+4=0$ の傾きは

$$-\frac{2}{3}$$



直線 ℓ の傾きを m とすると

$$-\frac{2}{3}m=-1 \quad \text{から} \quad m=\frac{3}{2}$$

よって，直線 ℓ の方程式は

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad 3x-2y-4=0$$

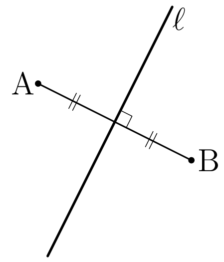
例題 3.3 の直線 ℓ の方程式は $3(x-2)-2(y-1)=0$ の形に表される[1]．

練習 3.17 点 $\mathrm{A}(3, -1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ．

[1] 一般に，点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に垂直な直線の方程式は $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ の形に表される．

B 直線について対称な点

2点A，Bが直線 ℓ について対称であるのは，次の［1］,［2］が成り立つときである．



［1］直線ABは ℓ に垂直である．

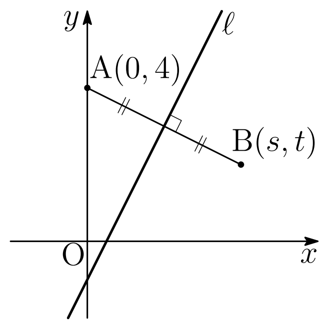
［2］線分ABの中点は ℓ 上にある．

［注意］ 直線 ℓ は線分ABの垂直二等分線である．

応用例題 3.2 直線 $2x-y-1=0$ を ℓ とする．直線 ℓ について点 $\mathrm{A}(0,4)$ と対称な点Bの座標を求めよ．

考え方　点Bの座標を $(s,\ t)$ として，上の［1］,［2］が成り立つように s，t についての方程式を作る．

【解】 点Bの座標を $(s,\ t)$ とする．



［1］直線 ℓ の傾きは2，直線ABの傾きは $\dfrac{t-4}{s-0}$ である．
AB⊥ℓ であるから

$$2\cdot\frac{t-4}{s-0}=-1$$

すなわち　$s+2t-8=0$　$\cdots$①

［2］線分ABの中点 $\left(\dfrac{s+0}{2},\ \dfrac{t+4}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

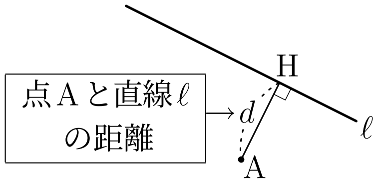
$$2\cdot\frac{s+0}{2}-\frac{t+4}{2}-1=0$$

すなわち　$2s-t-6=0$　$\cdots$②

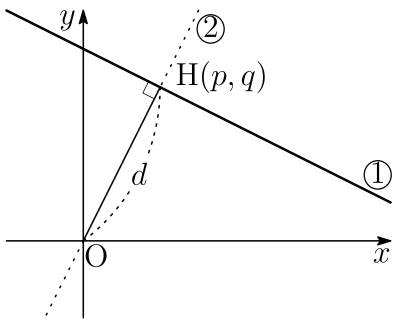
①，② を連立させた方程式を解くと　$s=4$，$t=2$
したがって，点Bの座標は　$(4,\ 2)$

練習 3.18 直線 $2x-y+2=0$ を ℓ とする．直線 ℓ について点 A$(2,\ 1)$ と対称な点 B の座標を求めよ．

C 点と直線の距離



点Aから直線ℓに引いた垂線とℓとの交点をHとする．このとき，線分AHの長さdを，点Aと直線ℓの距離という．



まず，原点Oと直線

$$ax+by+c=0 \qquad \cdots ①$$

の距離dを求めてみよう．

直線　$bx-ay=0 \qquad \cdots ②$

は，原点Oを通り直線①に垂直である．
2直線①，②の交点を$\mathrm{H}(p, q)$とすると

$$p=-\frac{ac}{a^2+b^2},\ q=-\frac{bc}{a^2+b^2}$$

← ①，②を連立させた方程式を解いた．

$d=\mathrm{OH}$であるから

$$d=\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

原点と直線 $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ の距離 $\boldsymbol{d}$ は　　$\boldsymbol{d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

例 3.9 原点と直線$3x+4y-25=0$の距離dは

$$d=\frac{|-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{\sqrt{25}}=5$$

練習 3.19 原点と次の直線の距離を求めよ．

(1) $2x-y-5=0$

(2) $2x+3y+4=0$

次に，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d を求めてみよう．

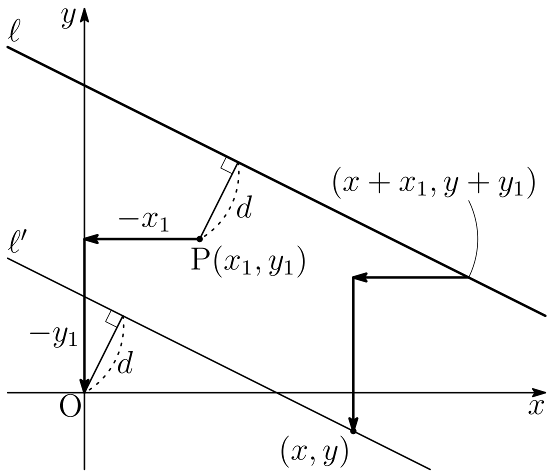
直線 $ax+by+c=0$ を ℓ とする．

点 P と直線 ℓ の両方を，点 P が原点に重なるように平行移動し，移動後の直線を ℓ' とする．ℓ' 上のどんな点 $(x,\ y)$ に対しても，点 $(x+x_1, y+y_1)$ が ℓ 上にあることから，

$$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$$

が成り立つ．

すなわち　　$ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$



これが ℓ' の方程式である．原点と直線 ℓ' の距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ で，これが求める d に等しいので，次のことが成り立つ．

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

例 3.10 点 $(1,\ 2)$ と直線 $3x+4y+4=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot1+4\cdot2+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|15|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$$

練習 3.20 次の点と直線の距離を求めよ．

(1) 点 $(1,\ 2)$，直線 $3x-4y-1=0$

(2) 点 $(2,-3)$，直線 $2x+y-3=0$

3.1.5 補充問題

1 点 P(2, 1) から $\sqrt{10}$ の距離にある x 軸上の点 Q の座標を求めよ.

2 原点 O と点 A(6, 2)，B(2, 4) の 3 点を頂点とする △OAB はどんな形の三角形か.

3 点 A(2, 1) について，点 B(−2, 3) と対称な点 C の座標を求めよ.

4 2 点 A(4, 0)，B(0, 2) について，次の直線の方程式を求めよ．

(1) 直線 AB

(2) 線分 AB の垂直二等分線

【答】

1 $(-1,\ 0)$ または $(5,\ 0)$

2 OA を斜辺とする直角二等辺三角形

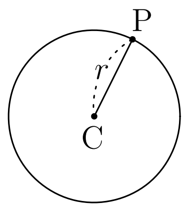
3 $(6, -1)$

4 (1) $x + 2y - 4 = 0$　(2) $2x - y - 3 = 0$

3.2　円

3.2.1　円の方程式

点Cから一定の距離 r にある点Pの全体は，Cを中心とする半径 r の円である．このことを座標で表すと，円の方程式を導くことができる．
ここでは，円の方程式について学ぼう．



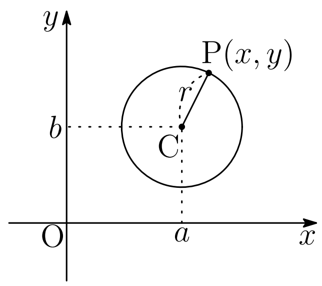
A 円の方程式

点 $\mathrm{C}(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円を考える．円上の点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{CP}=r$ から

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

すなわち　　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

したがって，次のことがいえる．



円の方程式

1　点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

2　原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}$$

練習 3.21 次のような円の方程式を求めよ．

(1) 中心が原点，半径が2

(2) 中心が点 $(2,\ 3)$，半径が4

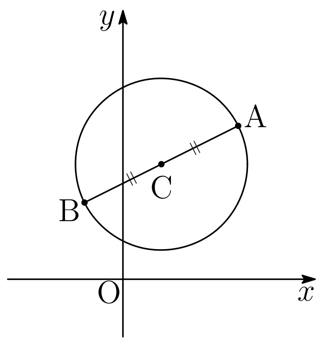
(3) 中心が点 $(-2,\ 1)$，半径が $\sqrt{10}$

例題 3.4　2 点 A(3, 4)，B(−1, 2) を直径の両端とする円について，中心の座標と半径を求めよ．また，その方程式を求めよ．

【解】 求める円の中心を C，半径を r とする．

C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)\quad すなわち\quad (1,\ 3)$$



また

$$r = \mathrm{CA} = \sqrt{(3-1)^2+(4-3)^2} = \sqrt{5}$$

この円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-3)^2=(\sqrt{5})^2$$

すなわち　$(x-1)^2+(y-3)^2=5$

練習 3.22　2 点 A(4, 0)，B(0, 2) を直径の両端とする円について，中心の座標と半径を求めよ．また，その方程式を求めよ．

B $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

円の方程式 $(x+2)^2+(y+3)^2=5$ を変形すると

$$x^2+y^2+4x+6y+8=0$$

となる．このように，円の方程式は，l，m，n を定数として

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

← x^2 と y^2 の係数が 1 で，xy の項がない．

の形にも表される．

例 3.11　方程式 $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ が表す図形

方程式を変形すると

$$(x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)=9+1+6$$

← 平方完成と同じ

すなわち　$(x-3)^2+(y+1)^2=4^2$

これは，中心が点 $(3,-1)$，半径が 4 の円である．

練習 3.23 次の方程式はどのような図形を表すか．

(1) $x^2+y^2+4x-2y-4=0$

(2) $x^2+y^2+6x+8y+9=0$

C 3 点を通る円の方程式

例題 3.5 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ．

A(2, 4)，B(2, 0)，C(−1, 3)

【解】 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする．

点 A を通るから　$2^2 + 4^2 + 2l + 4m + n = 0$

点 B を通るから　$2^2 + 2l + n = 0$

点 C を通るから　$(-1)^2 + 3^2 + (-1)l + 3m + n = 0$

整理すると

$$\begin{aligned} &2l + 4m + n + 20 = 0 \\ &2l + n + 4 = 0 \\ &-l + 3m + n + 10 = 0 \end{aligned}$$

これを解くと　$l = -2,\ m = -4,\ n = 0$

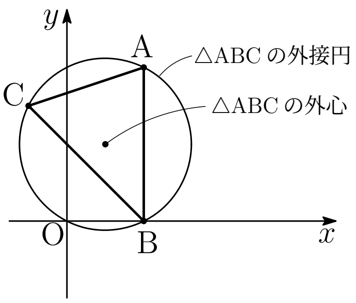
よって，求める円の方程式は　$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

例題 3.5 で求めた円の方程式を変形すると

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

よって，円の中心の座標は (1, 2) である．

この円のように，△ABC の 3 つの頂点を通る円を △ABC の**外接円**といい，その円の中心を △ABC の**外心**という．



練習 3.24 次の 3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 0)$

(2) $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(-2, -1)$，$\mathrm{C}(2, -3)$

3.2.2 円と直線

2 直線の共有点の座標は，それらの方程式を連立させた連立方程式の解である．これと同様な考えで，円と直線の共有点について調べてみよう．

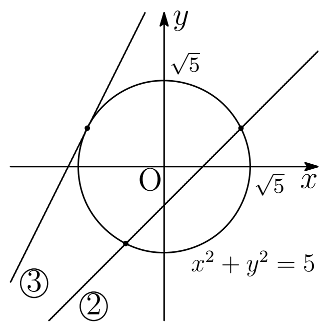
A 円と直線の共有点の座標

例題 3.6 円 $x^2+y^2=5$ と次の直線の共有点の座標を求めよ．

(1) $y=x-1$　　(2) $y=2x+5$

【解】

(1) 次の連立方程式を解く．



$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ y=x-1 & \cdots ② \end{cases}$$

② を ① に代入して

$$x^2+(x-1)^2=5$$

整理すると　$x^2-x-2=0$
これを解くと　$x=-1,\ 2$
② に代入して

$$x=-1 \text{ のとき } \quad y=-2, \quad x=2 \text{ のとき } \quad y=1$$

よって，共有点の座標は　$(-1,-2)$，$(2,\ 1)$

(2) 次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ y=2x+5 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ を ① に代入して　$x^2+(2x+5)^2=5$

整理すると　$x^2+4x+4=0$

これを解くと $x=-2$ で，③ に代入して　$y=1$

よって，共有点の座標は　$(-2,\ 1)$

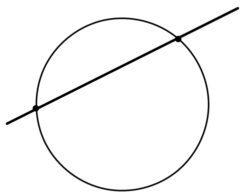
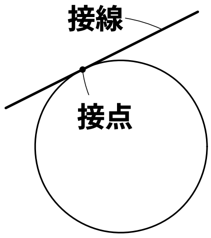
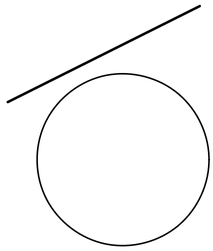
練習 3.25 次の円と直線は共有点をもつ．その座標を求めよ．

(1) $x^2+y^2=25$，$y=x+1$

(2) $x^2+y^2=8$，$x+y=4$

B 円と直線の位置関係

円の方程式と直線の方程式から y を消去して，x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が得られるとき，その判別式を $D=b^2-4ac$ とする．このとき，円と直線の位置関係は，次のようになる．

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる 2 つの実数解	重解 (ただ 1 つ)	なし
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点をもたない 
共有点の個数	2 個	1 個	0 個

例題 3.7 円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=x+m$ が共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

【解】 $x^2+y^2=8$ と $y=x+m$ から y を消去して整理すると

$$2x^2+2mx+(m^2-8)=0$$

判別式は　$D=(2m)^2-4\cdot 2(m^2-8)=-4(m^2-16)$

この円と直線が共有点をもつのは，$D \geqq 0$ のときである．

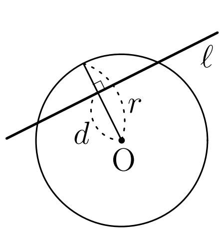
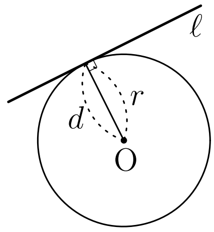
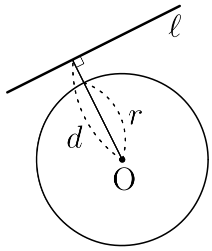
よって，$m^2-16 \leqq 0$ を解いて　$-4 \leqq m \leqq 4$　　$\longleftarrow (m+4)(m-4) \leqq 0$

練習 3.26 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+m$ について，次の問いに答えよ．

(1) 円と直線が共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(2) 円と直線が接するとき，定数 m の値と接点の座標を求めよ．

点 O を中心とする半径 r の円と直線 ℓ の位置関係は，円の中心 O と直線 ℓ の距離を d とするとき，次のようになる．

<table>
<tr><td>d と r の大小</td><td>$d < r$</td><td>$d = r$</td><td>$d > r$</td></tr>
<tr><td>円と直線の
位置関係</td><td>異なる
2 点で交わる
</td><td>接する
</td><td>共有点を
もたない
</td></tr>
</table>

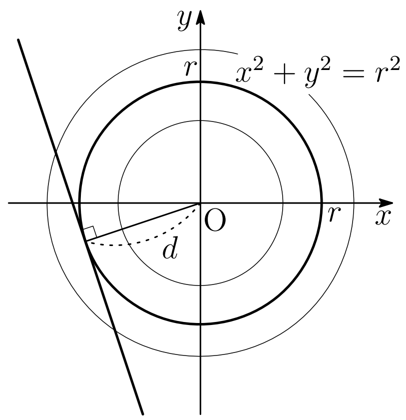
例題 3.8 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $3x + y + 10 = 0$ が接するとき，r の値を求めよ．

【解】 円の中心は原点であり，原点と直線 $3x + y + 10 = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

円と直線が接するのは $r = d$ のときである．

よって　　$r = \sqrt{10}$

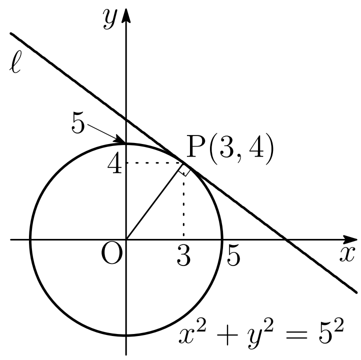


例題 3.8 において，円と直線が共有点をもつのは $r \geqq \sqrt{10}$ のときである．また，共有点をもたないのは $0 < r < \sqrt{10}$ のときである．

練習 3.27 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $4x + 3y - 10 = 0$ が接するとき，r の値を求めよ．

C 円の接線の方程式

原点 O を中心とする円 $x^2+y^2=5^2$ 上の点 P(3, 4) における接線 ℓ の方程式を求めてみよう．



接線 ℓ は直線 OP に垂直である．

直線 OP の傾きは $\dfrac{4}{3}$ であるから，

ℓ の傾きは $-\dfrac{3}{4}$ となる．

また，ℓ は点 P(3, 4) を通るから，その方程式は

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad 3x+4y=5^2$$

$\longleftarrow 3^2+4^2=5^2$

一般に，次のことが成り立つ．

円上の点における接線の方程式

> 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P$(a,\ b)$ における接線の方程式は
>
> $$\boldsymbol{ax+by=r^2}$$

[注意] 上のことは，点 P が座標軸上にあっても成り立つ．

例 3.12 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,-4)$ における接線の方程式は

$$3x+(-4)y=25 \quad \text{すなわち} \quad 3x-4y=25$$

練習 3.28 次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ．

(1) 円 $x^2+y^2=10$，点 P(3, 1)

(2) 円 $x^2+y^2=13$，点 P$(2,-3)$

(3) 円 $x^2+y^2=16$，点 P(4, 0)

円外の 1 点を通り円に接する直線は 2 本ある．このような直線の方程式を求めてみよう．

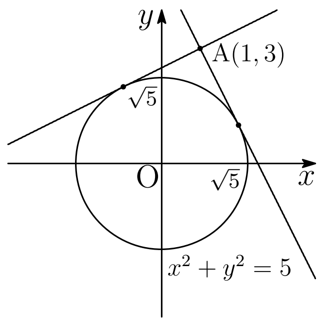
応用例題 3.3 点 A(1, 3) から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ．

> **考え方** 円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P$(a,\ b)$ におけるこの円の接線が，点 A(1, 3) を通るように，a，b の値を定める．

【解】 接点を P$(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから

$$a^2+b^2=5 \quad \cdots ①$$

また，P における円の接線の方程式は



$$ax+by=5$$

で，この直線が点 A(1, 3) を通るから

$$a+3b=5 \quad \cdots ②$$

①，② から a を消去して整理すると

$$b^2-3b+2=0$$

これを解くと　　$b=1,\ 2$

② に代入して

$$b=1 \text{ のとき } \ a=2, \qquad b=2 \text{ のとき } \ a=-1$$

よって，接線は 2 本あり，その方程式と接点の座標は，次のようになる．

接線 $2x+y=5$，接点 $(2,\ 1)$
接線 $-x+2y=5$，接点 $(-1,\ 2)$

← 接線の方程式は
$ax+by=5$
接点の座標は $(a,\ b)$

練習 3.29 点 A(2, 1) から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ.

研究

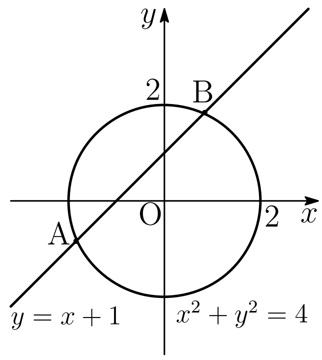
円と直線の交点を通る円

円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+1$ は，右の図のように異なる 2 点で交わる．
このとき，交点 A，B の x 座標，y 座標は

$$x^2+y^2-4=0 \text{ かつ } x-y+1=0$$

を満たす．
ここで，k を定数として，方程式

$$(x^2+y^2-4)+k(x-y+1)=0 \qquad \cdots ①$$



を考えると，① の表す図形は，2 点 A，B を通ることがわかる．

このことを利用して，円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+1$ の交点 A，B と原点 O の 3 点を通る円の方程式を求めてみよう．

① に $x=0$，$y=0$ を代入すると

$$(-4)+k=0$$
よって　　$k=4$

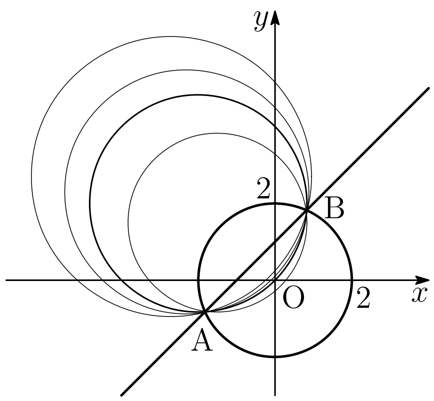
① に代入して整理すると

$$x^2+y^2+4x-4y=0$$

すなわち

$$(x+2)^2+(y-2)^2=8$$

これが，求める円の方程式である．



3.2.3 補充問題

5 3点 A$(-2,\ 1)$，B$(1,\ 4)$，C$(0,\ 5)$ を頂点とする △ABC の外接円の半径と，外心の座標を求めよ．

6 次の問いに答えよ．

(1) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $x+3y+c=0$ が異なる2点で交わるとき，定数 c の値の範囲を求めよ．

(2) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $x+3y-5=0$ の共有点をA，Bとする．原点OとA，Bの3点を通る円の方程式を求めよ．

【答】

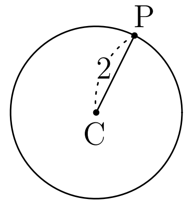
5 外接円の半径 $\sqrt{5}$，外心の座標 $(-1,\ 3)$

6 (1) $-5\sqrt{2}<c<5\sqrt{2}$ (2) $x^2+y^2-x-3y=0$

3.3 軌跡と領域

3.3.1 軌跡と方程式

平面上で，点Cに対して $\mathrm{CP}=2$ を満たしながら点P が動くとき，Pの描く図形は，点Cを中心とする半径2の円である．



一般に，ある条件を満たしながら動く点が描く図形を，その条件を満たす点の**軌跡**という．ここでは，軌跡について学ぼう．

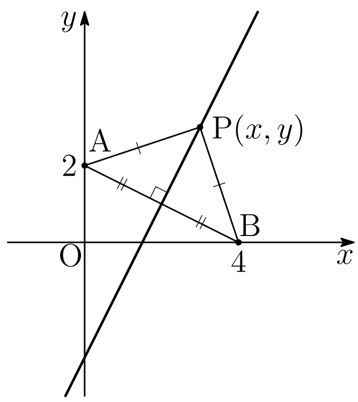
A 座標平面上の点の軌跡

座標平面上で，与えられた条件を満たす点の軌跡を求めてみよう．

例 3.13 2点 A(0, 2)，B(4, 0) に対して，AP = BP を満たす点Pの軌跡

点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{AP}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$
$$\mathrm{BP}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$



$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ であるから

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

すなわち　$x^2+(y-2)^2=(x-4)^2+y^2$
整理すると　　$2x-y-3=0$

よって，点Pは直線 $2x-y-3=0$ 上にある．
逆に，この直線上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$
すなわち $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ が成り立つ．
したがって，点Pの軌跡は，直線 $2x-y-3=0$ である．

[注意] 例 3.13 で求めた点Pの軌跡は，線分ABの垂直二等分線である．

座標を用いて点 P の軌跡を求める手順は，次のようになる．

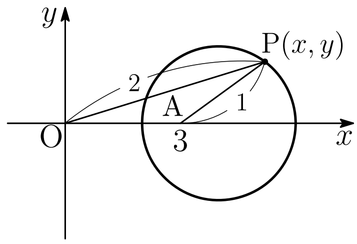
1 条件を満たす点 P の座標を $(x,\ y)$ として，P に関する条件を x，y の方程式で表し，この式が表す図形を調べる．

2 **1** で求めた図形上のすべての点 P が，与えられた条件を満たすことを確かめる．

練習 3.30 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ に対して，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=8$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．

例題 3.9 原点 O からの距離と点 A(3, 0) からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めよ.

【解】 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする.



P に関する条件は

$$\mathrm{OP} : \mathrm{AP} = 2 : 1$$

これより　$2\mathrm{AP} = \mathrm{OP}$

すなわち　$4\mathrm{AP}^2 = \mathrm{OP}^2$

$$\mathrm{AP}^2 = (x-3)^2 + y^2, \quad \mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2$$

を代入すると　$4\{(x-3)^2 + y^2\} = x^2 + y^2$

整理すると　$x^2 - 8x + y^2 + 12 = 0$

すなわち　$(x-4)^2 + y^2 = 2^2$

よって，点 P は円 $(x-4)^2 + y^2 = 2^2$ 上にある.

逆に，この円上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす.

したがって，求める軌跡は，点 (4, 0) を中心とする半径 2 の円である.

練習 3.31 2 点 A(−3, 0)，B(2, 0) からの距離の比が 3 : 2 である点 P の軌跡を求めよ.

B 線分の中点の軌跡

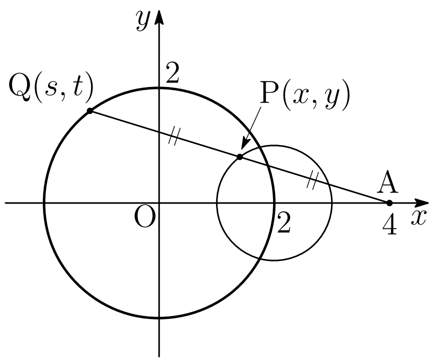
これまで調べた点 P の軌跡では，動く点は P だけであった．ここでは，別な点 Q がある条件を満たしながら動くとき，それにともなって動く点 P の軌跡について調べてみよう．

応用例題 3.4 点 Q が円 $x^2 + y^2 = 2^2$ 上を動くとき，点 A(4, 0) と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ．

考え方 Q(s, t)，P(x, y) とし，Q の満たす条件を表す式から，x，y だけの関係式を導く．

【解】 点 Q の座標を (s, t) とすると，Q は円 $x^2 + y^2 = 2^2$ 上にあるから

$$s^2 + t^2 = 2^2 \quad \cdots ①$$



また，点 P の座標を (x, y) とすると，条件から

$$x = \frac{s+4}{2},\quad y = \frac{t}{2}$$

すなわち　$s = 2x - 4$，$t = 2y$

これらを ① に代入して　$(2x-4)^2 + (2y)^2 = 2^2$

整理すると　$(x-2)^2 + y^2 = 1^2$

よって，点 P は円 $(x-2)^2 + y^2 = 1^2$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点 P(x, y) は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，点 (2, 0) を中心とする半径 1 の円である．

練習 3.32 直線 $y = x + 2$ を ℓ とする．点 Q が ℓ 上を動くとき，点 A(1, 5) と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ．

3.4 不等式の表す領域

座標平面上で，x，y の1次方程式 $y=-x+2$ を満たす点 $(x,\ y)$ の全体は直線である．では，x，y の1次不等式 $y>-x+2$ を満たす点 $(x,\ y)$ の全体は，どのような図形を表すのだろうか．このことについて調べてみよう．

A 直線を境界線とする領域

一般に，x，y の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体を，その不等式の表す**領域**という．

直線 $y=-x+2$ を ℓ とする．

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ が，不等式

$$y>-x+2 \quad \cdots ①$$

の表す領域にあれば

$$y_1>-x_1+2 \quad \cdots ②$$

が成り立つ．

また，直線 ℓ 上に点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_2)$ をとると

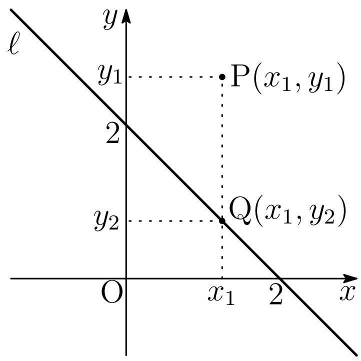
$$y_2=-x_1+2 \quad \cdots ③$$

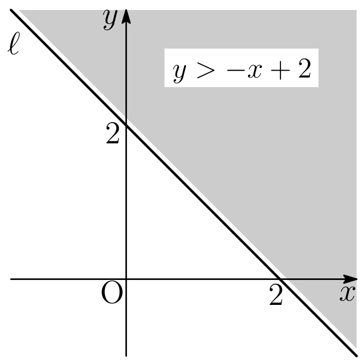
②，③ から　$y_1>y_2$

よって，点Pは直線 ℓ より上側にある．

逆に，点Pが直線 ℓ より上側にあれば，不等式 ② が成り立つ．

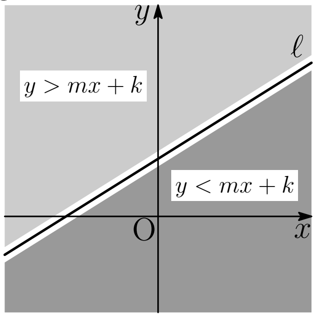
したがって，不等式 ① の表す領域は，直線 ℓ の上側の部分である．この場合，境界線を含まない．





同様にして，x，y の1次不等式 $y<-x+2$ の表す領域は，直線 ℓ の下側の部分である．この場合，境界線を含まない．

直線で分けられた領域について，一般に次のことがいえる．



直線と領域

直線 $y = mx + k$ を ℓ とする．

1　$y > mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ の上側

2　$y < mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ の下側

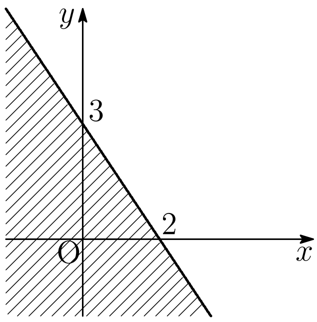
[注意] $y \geqq mx + k$ や $y \leqq mx + k$ の表す領域は，直線 ℓ を含む．

例 3.14 不等式 $3x + 2y - 6 \leqq 0$ の表す領域

不等式を変形すると

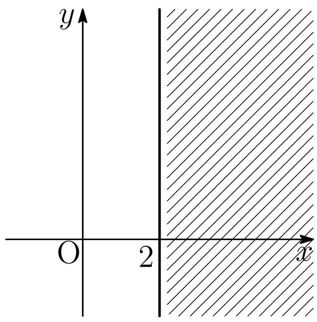
$$y \leqq -\frac{3}{2}x + 3$$

したがって，この領域は，直線 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ およびその下側で，右の図の斜線部分である．
ただし，境界線を含む．



例 3.15 不等式 $x > 2$ の表す領域

この領域は，x 座標が 2 より大きい点 $(x,\ y)$ の全体である．
したがって，この領域は，直線 $x = 2$ の右側で，右の図の斜線部分である．
ただし，境界線を含まない．



練習 3.33 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1)　$2x - 3y + 6 \geqq 0$　　(2)　$x + 2y - 4 > 0$　　(3)　$x \leqq -1$

B 円を境界線とする領域

次の不等式の表す領域を調べてみよう．

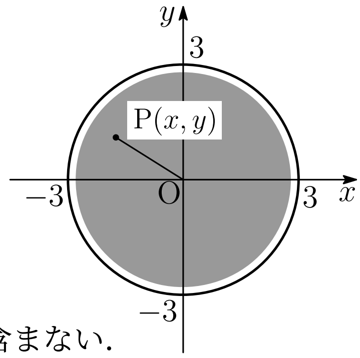
$$x^2+y^2<3^2 \quad \cdots ①$$

この不等式は，原点Oと点P$(x,\ y)$について

$$\mathrm{OP}^2<3^2 \quad すなわち \quad \mathrm{OP}<3$$

であることを示している．

したがって，不等式①の表す領域は，
円 $x^2+y^2=3^2$ の内部である．この場合，境界線を含まない．

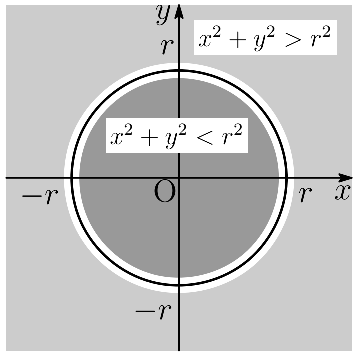


半径 r の円で分けられた領域について，一般に次のことがいえる．

円と領域

1 $x^2+y^2<r^2$ の表す領域は，
円 $x^2+y^2=r^2$ の**内部**.

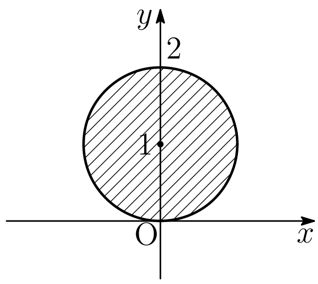
2 $x^2+y^2>r^2$ の表す領域は，
円 $x^2+y^2=r^2$ の**外部**



［注意］ $x^2+y^2\leqq r^2$ や $x^2+y^2\geqq r^2$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=r^2$ を含む．

例 3.16 不等式 $x^2+(y-1)^2\leqq 1$ の表す領域

この領域は，円 $x^2+(y-1)^2=1$ およびその内部である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



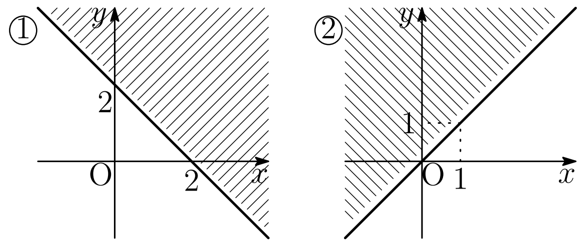
練習 3.34 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $x^2+y^2<4$　　(2) $x^2+y^2\geqq 5$　　(3) $(x-2)^2+y^2\leqq 4$

C 連立不等式の表す領域

不等式を連立させた連立方程式の表す領域を図示してみよう.

例 3.17 連立不等式 $\begin{cases} \boldsymbol{x+y-2>0} \\ \boldsymbol{x-y<0} \end{cases}$ **の表す領域**

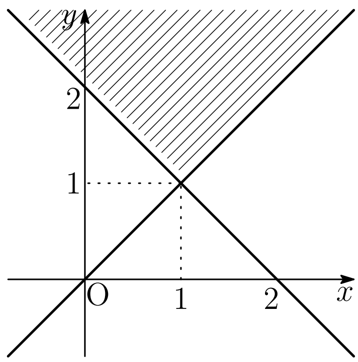


不等式

$x+y-2>0,\ \ x-y<0$

の表す領域は，それぞれ右の図の ①，② の斜線部分である.

連立不等式の表す領域は，それぞれの不等式の表す領域に共通する部分である.
よって，この領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない.



例題 3.10 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

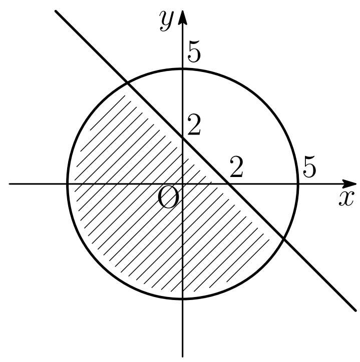
$$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ x+y<2 \end{cases}$$

【解】 この領域は

円 $x^2+y^2=25$ の内部と

直線 $x+y=2$ の下側

に共通する部分である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない.



練習 3.35 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

(1) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y - 1 > 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x + y - 3 \leqq 0 \\ 4x - y - 2 \geqq 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + 2y + 2 > 0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqq 25 \\ x - y + 3 \geqq 0 \end{cases}$

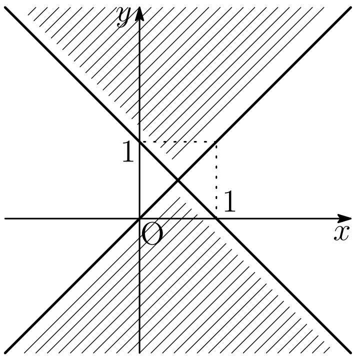
応用例題 3.5 次の不等式の表す領域を図示せよ．

$$(x-y)(x+y-1)<0$$

考え方　不等式の次の性質を利用する．

$$AB<0 \iff \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$$

【解】 不等式 $(x-y)(x+y-1)<0$ は



$$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y-1<0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-1>0 \end{cases}$$

が成り立つことと同じである．
よって，求める領域は右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．

[注意]　$AB>0 \iff \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

練習 3.36 次の不等式の表す領域を図示せよ．

$$(x+y)(x-y+1)>0$$

D 領域と最大・最小

不等式の表す領域を図示して解決できる問題を調べてみよう．

応用例題 3.6 x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad 2x+y \leqq 8,\quad 2x+3y \leqq 12$$

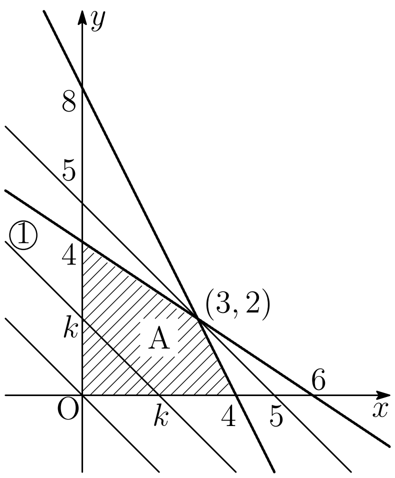
を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

考え方　$x+y=k$ とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す．この直線が連立不等式の表す領域と共有点をもつときの k の値の範囲を調べる．

【解】 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．領域 A は 4 点

(0, 0)，(4, 0)，(3, 2)，(0, 4)

を頂点とする四角形の周および内部である．



$$x+y=k \quad \cdots ①$$

とおいて，直線 ① が領域 A の点を通るときの k の値を調べる．

(0, 0) を通るとき $k=0$
(4, 0) を通るとき $k=4$
(3, 2) を通るとき $k=5$
(0, 4) を通るとき $k=4$
これ以外で領域 A の点を通るとき　$0<k<5$

したがって，$x+y$ は

$x=3$，$y=2$ のとき最大値 5 をとり，
$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる．

練習 3.37 x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad x+3y \leqq 5,\quad 3x+2y \leqq 8$$

を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

3.4.1 補充問題

7 直線 $3x-2y-4=0$ に対して，点 P$(1,-2)$ と同じ側にある点を，次の中から選べ．

原点 O，A$(-2,-6)$，B$(-1,\ 3)$，C$(3,\ 2)$

8 次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $1 \leqq x+y \leqq 3$　　(2) $4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$

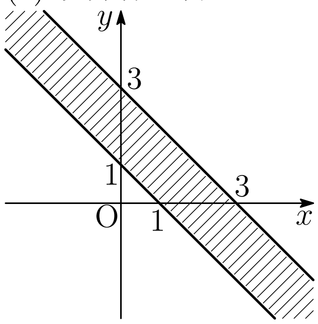
9 実数 x，y について「$x^2+y^2 \leqq 1$ ならば $x+y \leqq \sqrt{2}$」が成り立つ．このことを，それぞれの不等式の表す領域を図示することによって証明せよ．

【答】

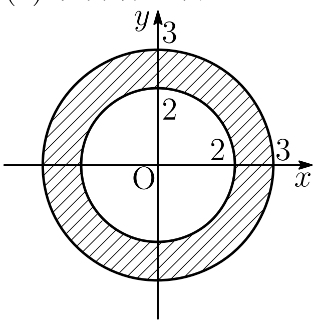
7 A，C

8

(1) 境界線を含む



(2) 境界線を含む

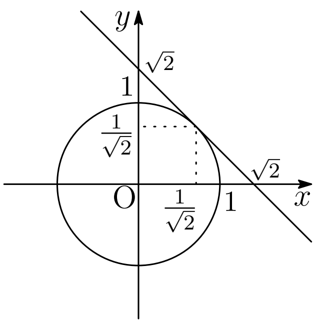


9 不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=1$ およびその内部．

不等式 $x+y \leqq \sqrt{2}$ の表す領域は，直線 $y=-x+\sqrt{2}$ およびその下側．

したがって，不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ の表す領域は，不等式 $x+y \leqq \sqrt{2}$ の表す領域に含まれる．

ゆえに，実数 x，y について「$x^2+y^2 \leqq 1$ ならば $x+y \leqq \sqrt{2}$」が成り立つ．



3.5 章末問題

3.5.1 章末問題 A

1 x 軸上の点 P が，2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(4,\ 3)$ から等距離にあるとき，点 P の座標を求めよ．

2 3 点 A$(1,\ 5)$，B$(6, -3)$，C$(x,\ y)$ を頂点とする △ABC の重心の座標が $(1,\ 3)$ であるとき，x，y の値を求めよ．

3 2 直線 $3x - 4y + 5 = 0$，$2x + y - 4 = 0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めよ．

(1) 直線 $2x + 3y = 0$ に平行　　(2) 直線 $2x + 3y = 0$ に垂直

4 円 $x^2+(y-a)^2=25$ と x 軸が異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．また，$a=1$ のとき，円が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

5 点 C(2, 1) を中心として，直線 $x+2y+1=0$ に接する円の方程式を求めよ．

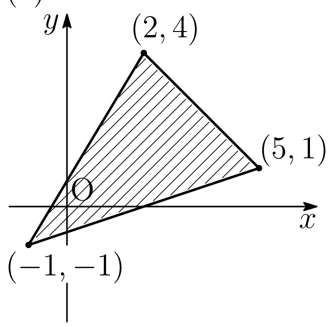
6 点 A(2, 1) について点 Q(a, b) と対称な点を P とする．

(1) P の座標を a，b を用いて表せ．

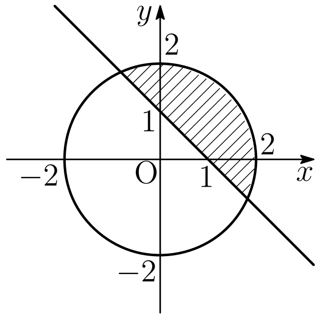
(2) Q が直線 $2x+y+1=0$ 上を動くとき，P の軌跡を求めよ．

7 図の斜線部分を表す不等式を求めよ．ただし，境界線を含むものとする．

(1)



(2)



3.5.2　章末問題 B

8 次の 3 点が一直線上にあるとき，a の値を求めよ．

$$\mathrm{A}(1, -2),\ \mathrm{B}(3,\ a),\ \mathrm{C}(a,\ 0)$$

9 3つの直線 $3x-y=0$，$2x+y=0$，$4x-3y+6=0$ で囲まれた三角形の面積を求めよ．

10 円 $x^2+y^2-4x+ay=0$ 上の点 A(4, 2) における接線を ℓ とする．

(1) a の値を求めよ．

(2) 円の中心 C の座標を求めよ．

(3) ℓ の傾きを求めよ．

(4) ℓ の方程式を求めよ．

11 放物線 $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 3$ について，次の問いに答えよ．

(1) 頂点Pの座標を $(x,\ y)$ とするとき，x，y をそれぞれ a で表せ．

(2) a がすべての実数値をとって変化するとき，点Pの軌跡を求めよ．

12 ある工場の製品A，Bを1トン生産するのに必要な原料P，Qの量と製品A，Bの価格は，それぞれ右の表の通りとする．

	原料P	原料Q	価格
A	2トン	2トン	3万円
B	1トン	3トン	4万円

この工場へ1日に供給できる原料Pが8トン，原料Qが12トンであるとき，工場で1日に生産される製品A，Bの総価格を最大にするには，A，Bをそれぞれ，1日に何トンずつ生産すればよいか．

ヒント

8　2 点 A，B を通る直線 AB 上に点 C がある．

9　三角形の高さは，点と直線の距離として求める．

11　(2)　(1) で求めた式から a を消去する．

【答】

1 $(2,\ 0)$　［P$(x,\ 0)$ とおくと　$(x+1)^2+(0-2)^2=(x-4)^2+(0-3)^2$］

2 $x=-4,\ y=7$

3 (1) $2x+3y-8=0$　(2) $3x-2y+1=0$

4 $-5<a<5$，線分の長さ $4\sqrt{6}$

5 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$　［点 C と直線の距離が円の半径］

6 (1) $(4-a,\ 2-b)$　(2) 直線 $2x+y-11=0$　［(1) 線分 PQ の中点の座標が $(2,\ 1)$　(2) $2a+b+1=0$，$a=4-x$，$b=2-y$］

7 (1) $y \leqq \dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}$，$y \leqq -x+6$，$y \geqq \dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$　(2) $x^2+y^2 \leqq 4$，$y \geqq -x+1$

8 $a=-3,\ 2$

9 $\dfrac{9}{5}$　$\left[\text{三角形の頂点の座標は } (0,\ 0),\ \left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{18}{5}\right),\ \left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)\right]$

10 (1) $a=-2$　(2) $(2,\ 1)$　(3) -2　(4) $y=-2x+10$　［(3) 直線 CA と接線 ℓ は垂直である］

11 (1) $x=a$，$y=a+3$　(2) 直線 $y=x+3$

12 A は 3 トン，B は 2 トン　［1 日の A，B の生産量を，それぞれ x トン，y トンとする．x，y が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$2x+3y \leqq 12$ を同時に満たすときの，$3x+4y=k$ の最大値を求める］