第 1 章　場合の数と確率

1.1　集合と要素の個数

1.1.1　集合

数学では,「1 から 10 までの自然数の集まり」のように，範囲がはっきりしたものの集まりを**集合**といい，集合に入っている 1 つ 1 つのものをその集合の**要素**という．
ここでは，要素の個数が有限である集合について考えよう．

A 集合と要素

集合の表し方には，{　} の中に要素を書き並べて表す方法がある．

例 1.1 18 の正の約数全体の集合
この集合を A とすると
$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$$

要素の個数が多い場合は，一部の要素だけを並べて，残りは $\cdots$ を使って表すこともある．

例 1.2 (1)　12 以下の自然数全体の集合を B とすると
$$B = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$$
(2)　100 以下の正の偶数全体の集合を C とすると
$$C = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100\}$$

練習 1.1 次の集合を例 1.1，1.2 にならって表せ．

(1) 12 の正の約数全体の集合 A

(2) 100 以下の自然数全体の集合 B

(3) 50 以下の正の奇数全体の集合 C

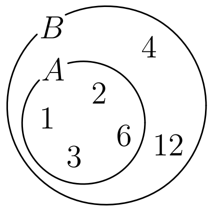
B 部分集合

集合 A と集合 B について，Aのすべての要素がBの要素でもあるとき，A を B の**部分集合**という．このとき，A は B に**含まれる**，または B は A を**含む**ともいい，$\boldsymbol{A \subset B}$，または $\boldsymbol{B \supset A}$ で表す．集合 A 自身は A の部分集合である．すなわち，$A \subset A$ である．

また，A と B の要素がすべて一致しているとき，A と B は**等しい**といい，$\boldsymbol{A = B}$ と表す．

例 1.3 2 つの集合の関係

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ と
$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ については，
$A \subset B$ である．
また，6 の正の約数全体の集合を C とすると，$A = C$ である．



練習 1.2 次の 2 つの集合の関係を，$\subset$，$\supset$，$=$ を使って表せ．

(1) $A = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$，$B = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$

(2) 12 以下の自然数全体の集合 C，12 の正の約数全体の集合 D

(3) $P = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，8 の正の約数全体の集合 Q

要素が 1 つもない集合も考えることができる．これを**空集合**といい，$\boldsymbol{\phi}$ で表す．空集合 ϕ は，どんな集合においても，その部分集合であると約束する．

例 1.4 文字 a, b の集合 {a, b} の部分集合は，次の 4 個である．

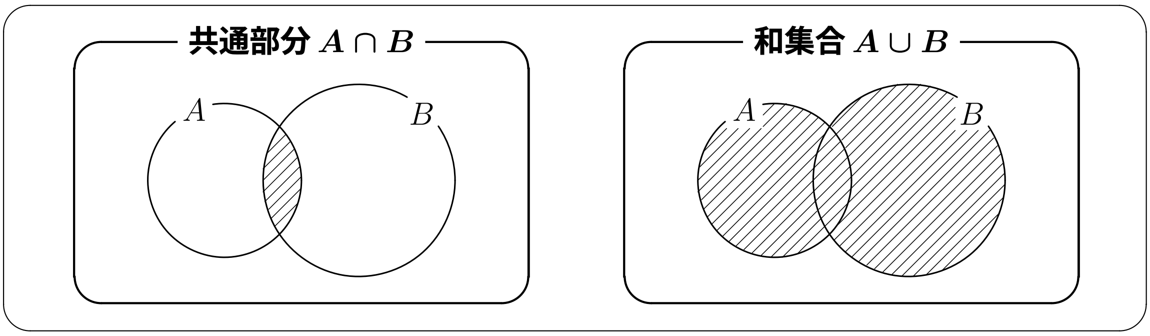
ϕ，{a}，{b}，{a, b}　　　$\longleftarrow$ 空集合 ϕ および {a, b} 自身も部分集合である．

練習 1.3 次の集合の部分集合をすべてあげよ．

(1) $\{1,\ 2\}$　　　(2) {a, b, c}

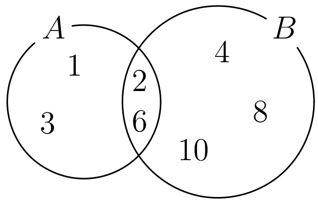
C 共通部分と和集合

集合 A, B の両方に入っている要素全体の集合を A と B の**共通部分**といい，$\boldsymbol{A \cap B}$ で表す．また，A, B の少なくとも一方に入っている要素全体の集合を A と B の**和集合**といい，$\boldsymbol{A \cup B}$ で表す.



例 1.5 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$,
$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ について

$$A \cap B = \{2,\ 6\},$$
$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$$



練習 1.4 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$C = \{1,\ 3\}$ について，次の集合を求めよ.

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

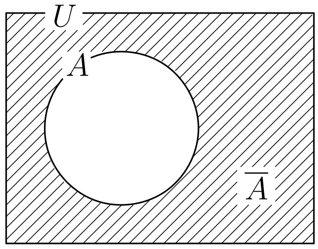
(3) $B \cap C$

(4) $B \cup C$

D 補集合

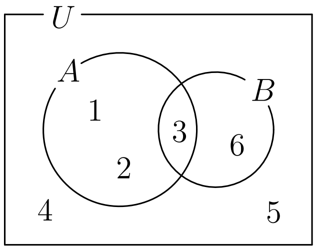
集合を考えるときは，1 つの集合 U を決めて，その部分集合について考えることが多い．このとき，U を**全体集合**という.

U の部分集合 A に対して，U の要素で，A には入っていない要素全体の集合を，U に関する A の**補集合**といい，$\overline{\boldsymbol{A}}$ で表す.



例 1.6 補集合を求める．

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ を全体集合とする．
U の部分集合



$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\quad B=\{3,\ 6\}$$

について　$\overline{A}=\{4,\ 5,\ 6\}$
また，$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ であるから

$$\overline{A\cup B}=\{4,\ 5\}$$

練習 1.5 例 1.6 の集合 A，B について，次の集合を求めよ．

(1) $\overline{B}$　　(2) $\overline{A}\cap\overline{B}$

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　(4) $\overline{A\cap B}$

(5) $\overline{A}\cap B$　　(6) $A\cap\overline{B}$

補集合の定義から，次のことが成り立つ．

補集合の定義

U を全体集合とし，A，B をその部分集合とするとき

$$\boldsymbol{A\cap\overline{A}=\phi,\quad A\cup\overline{A}=U,\quad \overline{\overline{A}}=A}$$

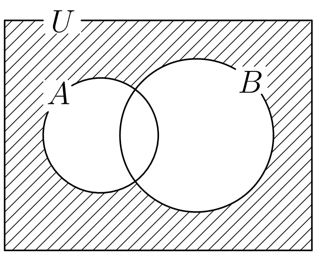
$$\boldsymbol{A\subset B}\quad \textbf{ならば}\quad \boldsymbol{\overline{A}\supset\overline{B}}$$

[注意] $\overline{\overline{A}}$ は $\overline{A}$ の補集合を表す．

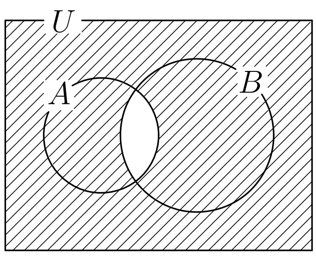
また，次の**ド・モルガンの法則**が成り立つ[1]．

ド・モルガンの法則

1 $\boldsymbol{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$
2 $\boldsymbol{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$



$\boldsymbol{\overline{A\cup B}}$**と**$\boldsymbol{\overline{A}\cap\overline{B}}$



$\boldsymbol{\overline{A\cap B}}$**と**$\boldsymbol{\overline{A}\cup\overline{B}}$

[1] この法則が成り立っていることは，例 1.6 と練習 1.5 の結果からも確かめられる．

1.1.2　集合の要素の個数

これまで集合についていろいろ調べてきたが，ここでは集合の要素の個数を考えることにしよう．

A 集合の要素の個数

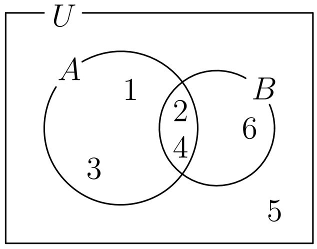
集合 A の要素の個数が有限のとき，その個数を $\boldsymbol{n(A)}$ で表す．

例 1.7 集合の要素の個数を求める．

全体集合を $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ とする．
U の部分集合

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ B = \{2,\ 4,\ 6\}$$

について　$n(A) = 4$
また　$n(A \cup B) = 5,\ n(\overline{A}) = 2$



練習 1.6 例 1.7 の集合 U，A，B について，次の個数を求めよ．

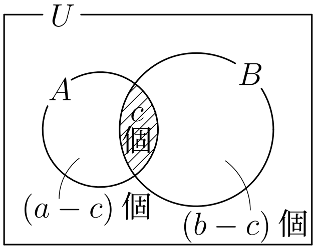
(1) $n(U)$　(2) $n(B)$　(3) $n(\overline{B})$

(4) $n(A \cap B)$　(5) $n(\overline{A \cup B})$　(6) $n(A \cap \overline{B})$

2つの集合 A，B に対して，$n(A \cup B)$ を考えよう．

$$n(A) = a,\quad n(B) = b,\quad n(A \cap B) = c$$

とすると，右の図から分かるように



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= (a - c) + (b - c) + c \\ &= a + b - c \end{aligned}$$

である．

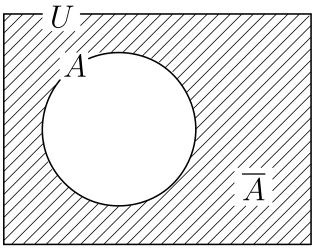
すなわち，次の等式が成り立つ．

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

A の補集合 $\overline{A}$ の要素は，U の要素から A の要素を除いたものである．

したがって，次の等式が成り立つ．

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$



これまでのことをまとめておこう．

和集合，補集合の要素の個数

1　$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

2　$\boldsymbol{n(\overline{A}) = n(U) - n(A)}$　　　　ただし，U は全体集合

1 において，とくに $A \cap B = \phi$ のときは，$n(A \cap B) = 0$ であるから，次のことが成り立つ．

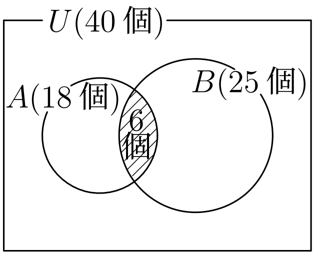
$$\boldsymbol{A \cap B = \phi} \textbf{ のとき} \qquad \boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

例 1.8　和集合，補集合の要素の個数を求める．

全体集合 U の部分集合 A，B について

$n(U) = 40$，$n(A) = 18$，$n(B) = 25$，

$n(A \cap B) = 6$ であるとき



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 18 + 25 - 6 = 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(\overline{A}) &= n(U) - n(A) \\ &= 40 - 18 = 22 \end{aligned}$$

練習 1.7　例 1.8 の集合 U，A，B について，次の個数を求めよ．

(1) $n(\overline{B})$　　(2) $n(\overline{A \cup B})$　　(3) $n(\overline{A} \cup \overline{B})$

B 倍数の個数

100 以下の自然数のうち，3 の倍数全体の集合を A とするとき，A は

$$A = \{3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2,\ 3{\cdot}3,\ \cdots,\ 3{\cdot}33\} \qquad \longleftarrow 3,6,9,\cdots,99$$

と表すことができる[2].

倍数の集合をこのように表すと，その要素の個数もわかりやすい.

上の集合 A については，$n(A) = 33$ である.

例題 1.1 100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ.

(1) 3 の倍数でない数　　(2) 3 の倍数または 5 の倍数

【解】 100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，3 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とすると

$$A = \{3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2,\ 3{\cdot}3,\ \cdots,\ 3{\cdot}33\},\quad n(A) = 33$$
$$B = \{5{\cdot}1,\ 5{\cdot}2,\ 5{\cdot}3,\ \cdots,\ 5{\cdot}20\},\quad n(B) = 20$$

(1) 求めるのは $n(\overline{A})$ であるから

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67$$　(答) 67 個

(2) 求めるのは $n(A \cup B)$ である.

$$A \cap B = \{15{\cdot}1,\ 15{\cdot}2,\ 15{\cdot}3,\ \cdots,\ 15{\cdot}6\} \qquad \longleftarrow A \cap B \text{ の要素は 15 の倍数.}$$

$n(A \cap B) = 6$ であるから

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 20 - 6 = 47 \end{aligned}$$　(答) 47 個

練習 1.8 100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ.

(1) 6 の倍数　　(2) 6 の倍数でない数

(3) 4 の倍数かつ 6 の倍数　　(4) 4 の倍数または 6 の倍数

---

[2] $3{\cdot}1$，$3{\cdot}2$ などにおける $\cdot$ は，積を表す記号である．また，この集合 A を $A = \{3n | n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 33\}$ のように表すこともある.

C 集合の応用

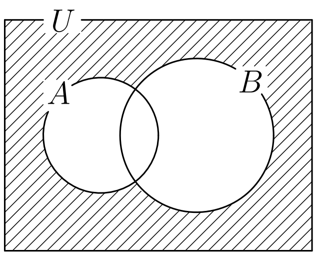
応用例題 1.1 100人の人に2つの提案a，bをしたところ，aに賛成の人は77人，bに賛成の人は83人，aにもbにも賛成の人は66人であった．aにもbにも賛成でない人は何人いるか．

考え方　集合でいうと，$n(\overline{A} \cap \overline{B})$ すなわち $n(\overline{A \cup B})$ を求めればよい．

【解】 この100人の集合を U とし，aに賛成の人の集合を A，bに賛成の人の集合を B とすると

$$n(A) = 77, \quad n(B) = 83, \quad n(A \cap B) = 66$$

aにもbにも賛成でない人の集合は $\overline{A \cup B}$ である．



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 77 + 83 - 66 = 94 \end{aligned}$$

より　$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 100 - 94 = 6 \end{aligned}$$　(答) 6人

練習 1.9 応用例題1.1について，右の図のような人数の表を作った．表の空らんをうめ，次の人数を求めよ．

(1) aにだけ賛成の人

(2) bにだけ賛成の人

	B	$\overline{B}$	合計
A	66		77
$\overline{A}$		6	
合計	83		100

練習 1.10 あるクラス40人の生徒を対象に通学方法を調べたところ，自転車を利用する人が13人，バスを利用する人が16人，自転車もバスも利用する人が5人いた．次の人は何人いるか．

(1) 自転車もバスも利用しない人

(2) 自転車を利用するが，バスは利用しない人

1.1.3　補充問題

1 100 から 200 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ．

(1) 3 の倍数

(2) 4 の倍数

(3) 3 の倍数または 4 の倍数

(4) 3 の倍数でも 4 の倍数でもない数

2 200 人の人に 2 つのテーマパーク A，B に行ったことがあるかどうかのアンケート調査をしたところ，A に行ったことのある人は 116 人，B に行ったことのある人は 90 人であった．また，A にも B にも行ったことのない人が 32 人いた．

(1) A または B に行ったことがある人は何人いるか．

(2) A にも B にも行ったことがある人は何人いるか．

【答】

1 (1) 33 個　(2) 26 個　(3) 51 個　(4) 50 個

2 (1) 168 人　(2) 38 人

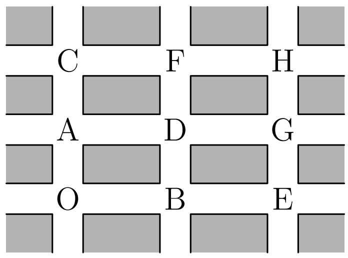
1.2　場合の数

1.2.1　和の法則・積の法則

ある事柄が起こる場合の数を知るには，すべての場合をもれがなくかつ重複もなく数える必要がある．ここでは，そのような方法について考えてみる．

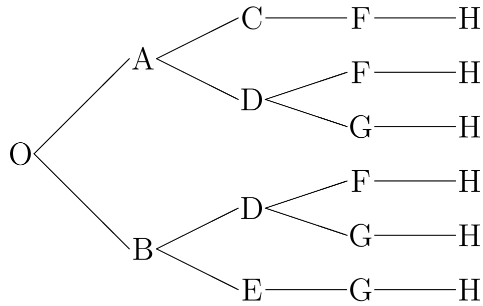
A 樹形図

右の図のように道路がある町で，地点Oから地点Hまで遠回りしないで行くのに，どのような道順があるかを調べてみよう．



条件を満たす道順を，交差点を示す文字の順にすべて書き出してみると

O → A → C → F → H
O → A → D → F → H
O → A → D → G → H
O → B → D → F → H
O → B → D → G → H
O → B → E → G → H



となる．

これらは，右の図のように次々と枝分かれしていく図でも表すことができる．このような図を**樹形図**という．樹形図は，起こりうるすべての場合を，もれも重複もなく示すのに便利である．

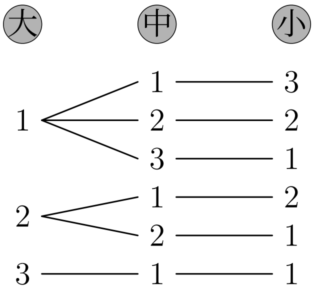
練習 1.11 アルファベットのA，B，Cを，ACBのように重複なしに1個ずつすべて並べるとき，その並べ方をすべて書き出せ．

樹形図を使って，起こりうる場合の数を求めてみよう．

例題 1.2 大中小の3個のさいころを投げるとき，目の和が5になる場合は何通りあるか．

【解】 右の樹形図により

6通り



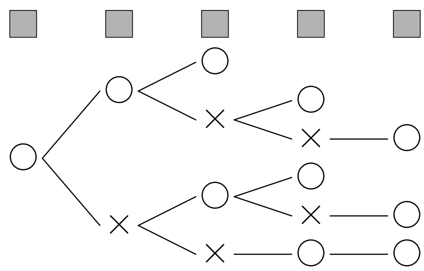
練習 1.12 大中小の3個のさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか．

(1) 目の和が6になる場合　　(2) 目の和が7になる場合

応用例題 1.2 ある競技の予選は5試合のうち3勝すれば通過できる．ただし，引き分けはなく，3勝したらそれ以降の試合はない．最初に1勝したとき，この競技の予選を通過するための勝敗の順は何通りあるか．

考え方　勝ちを○，負けを×で表し，5回目までに○が3回出てくる場合の樹形図をかく．

【解】 勝ちを○，負けを×で表し，3勝する場合の樹形図をかくと，右の図のようになる．
よって　　6通り



練習 1.13 赤玉2個と青玉2個の入った箱の中から，1個ずつ順に玉を取り出す．全部の玉を取り出すとき，出た順番の違いも考えると，玉の色の出方は何通りあるか．

B 和の法則

10 ページの道順の例では，A を通るものと B を通るものがある．これらに重複はなく，次の関係が成り立っている．

道順の総数		A を通るもの		B を通るもの
6 通り	$=$	3 通り	$+$	3 通り

一般に，次の**和の法則**が成り立つ．

和の法則

2 つの事柄 A と B の起こり方に重複はないとする．
A の起こり方が a 通りあり，B の起こり方が b 通りあれば，
A または B の起こる場合は，$\boldsymbol{a+b}$ 通りある．

3 つ以上の事柄についても，同様な法則が成り立つ．

例題 1.3 1 個のさいころを 2 回投げるとき，目の和が 5 の倍数になる場合は何通りあるか．

【解】 目の和が 5 または 10 になる場合である．
目の和が 5 になるのは，

$$(1,4),\ (2,3),\ (3,2),\ (4,1)$$ ←(1 回目，2 回目) の目を示している．

の 4 通り．目の和が 10 になるのは，

$$(4,6),\ (5,5),\ (6,4)$$

の 3 通り．よって，和の法則により

$$4+3=7$$ (答) 7 通り

練習 1.14 1 個のさいころを 2 回投げるとき，目の和が次のようになる場合は，何通りあるか．

(1) 7 または 8　　　(2) 4 の倍数

C 積の法則

2種類の食べ物と3種類の飲み物からそれぞれ1種類ずつ選ぶとき，そのセットの種類の数を求めよう．

食べ物の選び方は2通りあり，どの場合に対しても，飲み物の選び方は3通りある．

よって，食べ物と飲み物のセットは，

$$2 \times 3 = 6 \quad \text{すなわち} \quad 6\text{通り}$$

ある．

一般に，次の**積の法則**が成り立つ．

積の法則

事柄Aの起こり方が a 通りあり，そのどの場合に対しても
事柄Bの起こり方が b 通りあれば，AとBがともに起こる
場合は，$\boldsymbol{a \times b}$ 通りある．

3つ以上の事柄についても，同様な法則が成り立つ．

練習 1.15 大小2個のさいころを投げるとき，次の問いに答えよ．

(1) 2個のさいころの目の出方は何通りあるか．

(2) 大きいさいころの目が3以上，小さいさいころの目が偶数である出方は何通りあるか．

例題 1.4 大中小3個のさいころを投げるとき，すべての目が奇数である出方は何通りあるか．

【解】 1個のさいころで，奇数の目は3通りの出方がある．
よって，積の法則により　$3 \times 3 \times 3 = 27$　(答) 27通り

練習 1.16 次の問いに答えよ.

(1) $(a+b)(c+d)(x+y+z)$ を展開すると，項は何個できるか.

(2) 大中小 3 個のさいころを投げるとき，目の出方は何通りあるか.

応用例題 1.3 次の数について，正の約数は何個あるか.

(1) 8　　　(2) 72

考え方　約数を調べるときは，素数の積で表す.
(1) $8 = 2^3$　　(2) $72 = 2^3{\cdot}3^2$

【解】

(1) $8 = 2^3$ であるから，8 の正の約数は 1，2，2^2，2^3 である.
よって，4 個ある.　　(答) 4 個

(2) $72 = 2^3{\cdot}3^2$ であるから，72 の正の約数は，2^3 の正の約数と 3^2 の正の約数の積で表される.
2^3 の正の約数は (1) で求めたように 4 個あり，3^2 の正の約数は 1，3，3^2 の 3 個ある.
よって，積の法則により　$4 \times 3 = 12$　　(答) 12 個

応用例題 1.3 において，72 の正の約数は，次のような式の展開にすべて現れる.
展開した項の個数 4×3 が，72 の正の約数の個数に等しい.

2^3 の約数	3^3 の約数
1	1
2	3
2^2	3^2
2^3	
4 個	3 個

$$
\begin{aligned}
&(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)\\
&\quad = 1{\cdot}1 + 1{\cdot}3 + 1{\cdot}3^2 + 2{\cdot}1 + 2{\cdot}3 + 2{\cdot}3^2\\
&\qquad + 2^2{\cdot}1 + 2^2{\cdot}3 + 2^2{\cdot}3^2 + 2^3{\cdot}1 + 2^3{\cdot}3 + 2^3{\cdot}3^2
\end{aligned}
$$

練習 1.17 次の数について，正の約数は何個あるか.

(1) 16　　　(2) 144

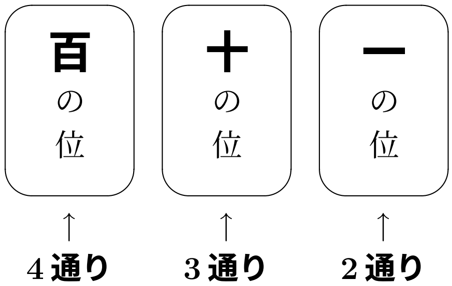
1.2.2　順列

いくつかのものの中からその一部を取り出して1列に並べるとき，並べ方の総数について調べてみよう．

A 順列の総数

4個の数字1，2，3，4のうちの異なる3個を並べて，3桁の数が何個できるかを考えてみる．

百の位から順に数字を決めていこう．



① 百の位は，どれでもよいから4通り．

② 十の位は，①で決めた以外の3通り．

③ 一の位は，①，②で決めた以外の2通り．

したがって，作ることできる3桁の数の個数は，積の法則により

$$4 \times 3 \times 2 = 24 \quad \text{すなわち} \quad 24\,\text{個}$$

である．

このように，いくつかのものを1列に並べるとき，並べる順序の違いを区別する並びを**順列**という．

一般に，異なるn個のものから異なるr個を取り出して並べる順列を

n 個から r 個取る順列

といい，その総数を，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r}$ で表す[3]．ただし，$r \leqq n$ である．

たとえば，4個から3個取り出す順列の総数は ${}_4\mathrm{P}_3$ で表され，上で調べたことから次のようになる．

$${}_4\mathrm{P}_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

[3] ${}_n\mathrm{P}_r$ の P は,「順列」を意味する英語 permutation の頭文字である．

n 個から r 個取る順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ も，積の法則を使って求めると，次のような結果が得られる．

順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}}}$$

$\longleftarrow {}_n\mathrm{P}_r$ は，r 個の数の積

1番目	2番目	3番目		r 番目
			$\cdots\cdots$	
n 通り	$(n-1)$ 通り	$(n-2)$ 通り		$\{n-(r-1)\}$ 通り $\|\|$ $n-r+1$

例 1.9 7人から3人を選んで1列に並べるとき，並べ方の総数は

$${}_7\mathrm{P}_3 = 7\cdot6\cdot5 = 210 \quad (\text{通り})$$

練習 1.18 次の値を求めよ．

(1) ${}_5\mathrm{P}_2$　　(2) ${}_8\mathrm{P}_4$　　(3) ${}_3\mathrm{P}_1$　　(4) ${}_6\mathrm{P}_6$

練習 1.19 次のものの総数を，それぞれ求めよ．

(1) 10人の生徒から3人を選んで1列に並べるときの並べ方

(2) 1から6までの数字から異なる4個を選んで作る4桁の数

順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ の式で，とくに $r=n$ のときは

$${}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

という等式が得られる．

この等式の右辺は，1から n までのすべての自然数の積である．

これを n の**階乗**といい，$\boldsymbol{n!}$ で表す．

$\boldsymbol{n}$ の階乗

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

一般に，次のことがいえる．

異なる n 個すべてを並べる順列の総数は $n!$ 通り

例 1.10 4 人の生徒全員を 1 列に並べるとき，並べ方の総数は

$$4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24 \text{ (通り)}$$

練習 1.20 次のような並べ方の総数を求めよ．

(1) A，B，C，D，E の 5 文字すべてを 1 列に並べる．

(2) 1 から 7 までの自然数すべてを 1 列に並べる．

B 順列の考え方の利用

順列の考え方を利用して，いろいろな場合の数を求めてみよう．

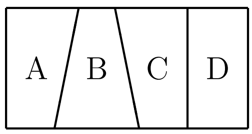
例題 1.5 10 枚の異なるカードがある．このカードのうちの 3 枚を A，B，C の 3 人に 1 枚ずつ配るとき，配り方は何通りあるか．

【解】 10 枚から 3 枚を選んで 1 列に並べる順列の総数と同じである．
よって，配り方の総数は

$${}_{10}\mathrm{P}_3 = 10{\cdot}9{\cdot}8 = 720 \qquad \text{(答) 720 通り}$$

練習 1.21 6 人の候補選手の中から，リレーの第 1 走者から第 4 走者までを選ぶとき，4 人の走者の選び方は何通りあるか．

練習 1.22 右の図のような A，B，C，D の 4 つの部分を，すべて違う色で塗り分ける．5 種類の色があるとき，何通りの塗り方があるか．



応用例題 1.4 男子4人と女子3人が1列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか．

(1) 両端が男子である．　　　(2) 女子3人が続いて並ぶ．

考え方　並びに決まりのある部分は別に考え，積の法則を使う．

(1) 男 | 残り5人 | 男　　　(2) 男 男 男 | 女子3人 | 男

【解】 (1) 両端の男子2人の並び方は，${}_4\mathrm{P}_2$ 通りある．
間に並ぶ残り5人の並び方は，5! 通りある．
よって，並び方の総数は，積の法則により

$$ {}_4\mathrm{P}_2 \times 5! = 4\cdot3 \times 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 1440 $$

(答) 1440通り

(2) 女子3人をひとまとめにする．
男子4人と女子ひとまとめの並び方は，5! 通りある．
また，ひとまとめにした女子3人の並び方は，3! 通りある．
よって，並び方の総数は，積の法則により

$$ 5! \times 3! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 \times 3\cdot2\cdot1 = 720 $$

(答) 720通り

練習 1.23 母音 a，i，u，e，o と子音 k，s，t の8個を1列に並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか．

(1) 両端が母音である．　　　(2) すべての母音が続いて並ぶ．

練習 1.24 1，2，3，4，5 の5個の数字を1個ずつ使って，3桁の数を作る．次のような数は何個作れるか．

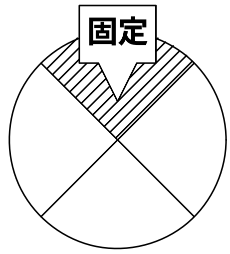
(1) 5の倍数　　　(2) 奇数

(3) 偶数　　　(4) 300より大きい数

C 円順列

ものを円形に並べる順列を**円順列**という．円順列では，適当に回転して並びが同じになれば同じ並べ方とみなす．

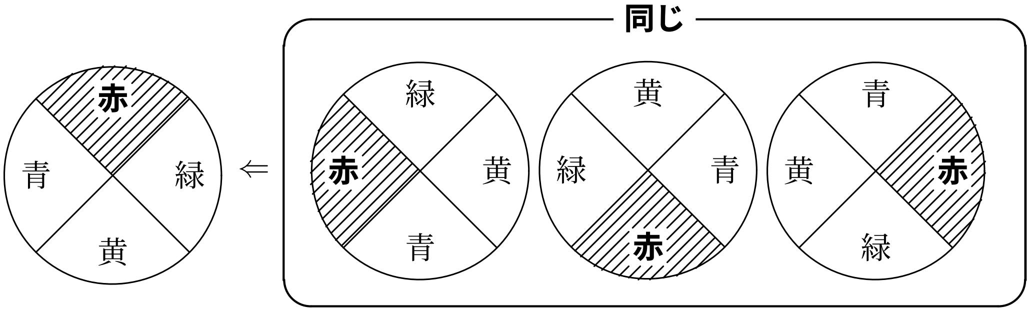
例 1.11　右の図のように円盤を 4 等分した各部分を，赤，青，黄，緑の 4 色をすべて使って塗り分けるとき，塗り方の総数を求める．



どれか 1 つの色の位置を固定して，残りの 3 色の並びだけを考えればよい．
よって，その総数は

$$(4-1)! = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6 \text{ (通り)}$$

残りの 3 色を並べる順列と考える．



円順列の総数については，次のことがいえる．

円順列の総数

異なる n 個の円順列の総数は $\boldsymbol{(n-1)!}$ 通り

← $(n-1)$ 個の順列の総数

例題 1.6　男子 5 人と女子 2 人が手をつないで輪を作るとき，並び方は何通りあるか．

【解】 7 人の円順列であるから

$$(7-1)! = 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720 \qquad \text{(答) 720 通り}$$

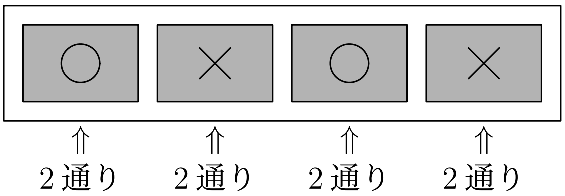
練習 1.25　丸いテーブルに席が 8 個用意してある．男性 4 人と女性 4 人をこの席に並べるとき，並べ方は何通りあるか．

D 重複順列

これまでは，異なるものだけを取って並べる順列を考えてきた．ここでは，重複を許して取って並べる順列を考えてみよう．

例 1.12 記号○と×を，重複を許して 4 個並べる順列の総数を求める．

右の図のように，4 個のどの場所にも，○と×の 2 通りの記号を並べることができる．
よって，このような順列の総数は，積の法則により



$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ (通り)} \qquad \leftarrow 2^4 = 16$$

一般に，異なる n 個のものから重複を許して r 個取って並べる順列を，n 個から r 個取る**重複順列**という．　$\longleftarrow$ 重複順列では，$r > n$ であってもよい．

重複順列の総数については，次のことがいえる．

重複順列の総数

n 個から r 個取る重複順列の総数は $\boldsymbol{n^r}$ 通り　$\leftarrow \underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{n\text{ が }r\text{ 個}}$

例題 1.7 3 個の数字 1，2，3 を重複を許して並べて，4 桁の数を作るとき，何個の数が作れるか．

【解】 3 個から 4 個取る重複順列であるから

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \qquad \text{(答) } 81 \text{ 個}$$

練習 1.26 4 種類の文字 a，b，c，d を，重複を許して次の個数だけ 1 列に並べるとき，何通りの文字列が作れるか．

(1) 2 個　　　　(2) 3 個

1.2.3　組合せ

いくつかのものの中からその一部を取り出して組を作るとき，その組の総数を調べてみよう．

A 組合せの総数

4 個の文字 a，b，c，d から，異なる 3 個を取り出して文字の組を作るとき，次のような組が作れる．

{a，b，c}，{a，b，d}，{a，c，d}，{b，c，d}　　　$\cdots$①

このように，ものを取り出す順序を無視した組を作るとき，これらの組を**組合せ**という．

一般に，異なるn個のものから異なるr個を取り出して作る組合せを

n 個から r 個取る組合せ

といい，その総数を $_n\mathrm{C}_r$ で表す[4]．ただし，$r \leqq n$ である．

たとえば，4 個から 3 個取る組合せの総数は $_4\mathrm{C}_3$ で表される．

上の ① から $_4\mathrm{C}_3 = 4$ であるが，これを順列の総数から求めてみよう．

① の 1 つの組 {a，b，c} について，3 個の文字の順列は 3! 通りできる．他の組についても同じだけできる．

よって，$_4\mathrm{C}_3$ 個ある組すべてでは，3 個の文字の順列は，$_4\mathrm{C}_3 \times 3!$ 個できる．4 個から 3 個取る順列の総数は $_4\mathrm{P}_3$ であるから

$$_4\mathrm{C}_3 \times 3! = {_4\mathrm{P}_3}$$

したがって　$_4\mathrm{C}_3 = \dfrac{_4\mathrm{P}_3}{3!} = \dfrac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} = 4$

組合せ		**順　列**	
		abc	acb
{a，b，c}	$\Longleftrightarrow$	bac	bca
		cab	cba
1 組		**6 通り** (3! = 6)	

n 個から r 個取る組合せの総数 $_n\mathrm{C}_r$ については，

$_n\mathrm{C}_r \times r! = {_n\mathrm{P}_r}$　となるから　$_n\mathrm{C}_r = \dfrac{_n\mathrm{P}_r}{r!}$　　$\longleftarrow$ $_n\mathrm{C}_r$ と $_n\mathrm{P}_r$ の関係式

したがって，$_n\mathrm{C}_r$ は次の式で表される．

組合せの総数 $_n\mathrm{C}_r$

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個の積}}}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$\longleftarrow$ $_n\mathrm{C}_r$ は分母と分子が r 個の数の積

[注意]　とくに，$_n\mathrm{C}_n = 1$ である．

また，$0! = 1$，$_n\mathrm{C}_0 = 1$ と定めると，$_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ とも表される．

[4] $_n\mathrm{C}_r$ の C は，「組合せ」を意味する英語 combination の頭文字である．

例 1.13 5人から3人を選ぶとき，選び方の総数は

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10\ (\text{通り}) $$

練習 1.27 次の値を求めよ．

(1) ${}_7\mathrm{C}_3$　(2) ${}_6\mathrm{C}_2$　(3) ${}_8\mathrm{C}_1$　(4) ${}_5\mathrm{C}_5$

練習 1.28 次のような選び方の総数を求めよ．

(1) 4人から2人を選ぶ　(2) 6色から3色を選ぶ

B ${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

例 1.13 において，5人から3人を選ぶことは，3人以外の2人を選ぶことと結果的には同じである．

よって，次の等式が成り立つ．

$$ {}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 $$

3人の組		**2人の組**
{a, b, c}		{d, e}
{a, b, d}		{c, e}
{a, b, e}		{c, d}
⋮		⋮
${}_5\mathrm{C}_3$ 個	=	${}_5\mathrm{C}_2$ 個

一般に，n 個から r 個取る組合せの総数は，n 個から $(n-r)$ 個取る組合せの総数に等しい．すなわち，次の等式が成り立つ．

${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} $$

例 1.14 **${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ を使って，${}_{10}\mathrm{C}_7$ を求める．**

$$ {}_{10}\mathrm{C}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_{10-7} = {}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = 120 $$

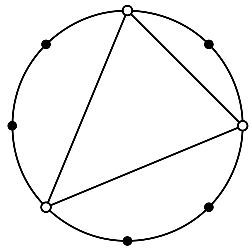
練習 1.29 次の値を求めよ．

(1) ${}_5\mathrm{C}_4$　(2) ${}_8\mathrm{C}_6$　(3) ${}_9\mathrm{C}_6$

C 組合せの考え方の利用

組合せの考え方を利用して，いろいろな場合の数を求めてみよう．

例題 1.8 円周上に異なる 8 個の点がある．これらの点を頂点とする三角形は，何個作れるか．



【解】 3 個の点を 1 組決めると三角形が 1 個作れる．
よって，作れる三角形の個数は

$${}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \qquad \text{(答) 56 個}$$

練習 1.30 正六角形について，次の数を求めよ．

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数

(2) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形の個数

例題 1.9 5 人の男子の中から 2 人，4 人の女子の中から 2 人を選んで 4 人の組を作るとき，何通りの組が作れるか．

【答】 男子 2 人の選び方は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通り，女子 2 人の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある．
よって，4 人の組の総数は，積の法則により

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 60 \qquad \text{(答) 60 通り}$$

練習 1.31 1 組のトランプのハートのカード 13 枚の中から 5 枚を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか．

(1) 絵札がちょうど 2 枚含まれる．　　(2) エースが含まれる．

D 組分けの総数

応用例題 1.5 6人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか.

(1) A，B，Cの3つの組に，2人ずつ分ける.

(2) 2人ずつの3つのグループに分ける.

考え方 (2) 同人数の3つのグループにA，B，Cの名前のつけ方が3! 通りあるから，(1) の総数 =(2) の総数 ×3! が成り立つ.

【解】 (1) Aの2人の選び方は，${}_6\mathrm{C}_2$ 通りある.

残りの4人からBの2人の選び方は，${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある.

A，Bの人が決まれば，残りのCの2人は決まる.

よって，分け方の総数は

$$ {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} \times \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = 90 $$

(答) 90通り

(2) (1) の分け方で，A，B，Cの区別をなくせばよい.

よって，分け方の総数は $\dfrac{90}{3!} = \dfrac{90}{6} = 15$　(答) 15通り

練習 1.32 8人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか.

(1) A，B，C，Dの4つの組に，2人ずつ分ける.

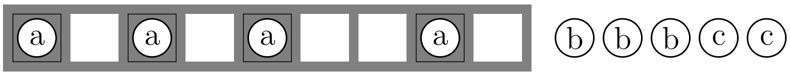
(2) 2人ずつの4つのグループに分ける.

(3) 3人，3人，2人の3つのグループに分ける.

E 同じものを含む順列

順列の総数を求めるのに，組合せの考え方が利用できるものがある．

例 1.15　a を 4 個，b を 3 個，c を 2 個全部 1 列に並べる順列の総数



［1］並べる 9 個の場所から，a を置く 4 個を選ぶ．

［2］残りの 5 個の場所から，b を置く 3 個を選ぶ．

［3］最後に残った場所には c を置けばよい．

よって，この順列の総数は，${}_9\mathrm{C}_4 \times {}_5\mathrm{C}_3$ 通りである．

例 1.15 と同様に考えると，a が p 個，b が q 個，c が r 個の合計 n 個全部を 1 列に並べる順列の総数は，次のようになる．

$$ {}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} = \frac{n!}{p!q!r!} $$

同じものを含む順列の総数

a が p 個，b が q 個，c が r 個あるとき，それら全部を 1 列に並べる順列の総数は

$$ \boldsymbol{\frac{n!}{p!q!r!}} \qquad \text{ただし} \quad p+q+r=n $$

[注意] $r=0$ のときは，順列の総数は $\dfrac{n!}{p!q!}$ である．

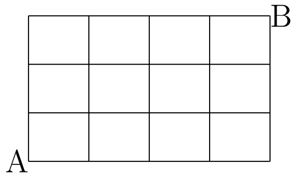
例題 1.10 1，1，1，2，2，3，3 の 7 個の数字全部を使って 7 桁の数を作るとき，何個の数ができるか．

【解】 同じ数字が 3 個，2 個，2 個あり，これらを 1 列に並べるから

$$ \frac{7!}{3!2!2!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1 \times 2\cdot1 \times 2\cdot1} = 210 \qquad \text{(答) 210 個} $$

練習 1.33 BANANA の 6 文字をすべて使って文字列を作るとき，何通りの文字列ができるか．

応用例題 1.6 右の図は，ある地域の道を直線で示したものである．交差点Aから交差点Bまで遠回りをしないで行く最短の道順は，何通りあるか．

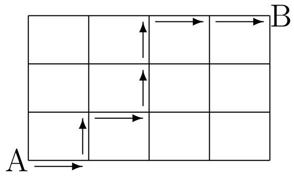


考え方 交差点から次の交差点まで行くのに，→と↑の向きがある．最短の道順は，→4個と↑3個を並べて表される．

【解】 右へ1区画進むことを→で，上へ1区画進むことを↑で表す．
Aから B まで行く最短の道順は，
→4個と↑3個の順列で表される．
よって，求める最短の道順の総数は

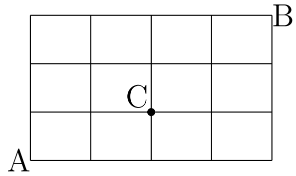
$$\frac{7!}{4!3!} = \frac{7{\cdot}6{\cdot}5}{3{\cdot}2{\cdot}1} = 35$$

(答) 35通り



この道順は
→↑→↑↑→→
で表される．

練習 1.34 右の図のような道のある地域で，次のような最短の道順は何通りあるか．



(1) CからBへ行く．

(2) Cを通ってAからBへ行く．

(3) Cを通らないでAからBへ行く．

1.2.4 二項定理

組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は，$(a+b)^n$ を展開した式における項の係数にも関連している．ここでは，そのことについて調べてみよう．

A $(a+b)^n$ の展開式

$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ の展開式は，次のようになる．

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

さらに，$(a+b)^4$ の展開式は，

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

として，右の計算より

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\begin{array}{rlllll} & a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3 & \\ \times) & a & +b & & & \\ \hline & a^4 & +3a^3b & +3a^2b^2 & +ab^3 & \\ & & a^3b & +3a^2b^2 & +3ab^3 & +b^4 \\ \hline & a^4 & +4a^3b & +6a^2b^2 & +4ab^3 & +b^4 \end{array}$$

この計算で，各項の係数だけを取り出してみると，右のようになる．

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \times) & 1 & 1 & & & \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

練習 1.35 次の式の展開式を，係数だけを取り出す計算によって求めよ．

(1) $(a+b)^5$　　(2) $(a+b)^6$

【答】 (1) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
(2) $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

B パスカルの三角形

$(a+b)^1$ から $(a+b)^6$ までの展開式で，各項の係数だけを取り出して順に並べると，右の図のようになる．

この三角形状の数の配列を**パスカルの三角形**という．

$$\begin{array}{l ccccccccccccc} (a+b)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ (a+b)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ (a+b)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ (a+b)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ (a+b)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ (a+b)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

パスカルの三角形は，左右対称である．また，次のことがいえる．

パスカルの三角形

1　各行の両端の数は1である．

2　2行目以降の両端以外の数は，左上と右上の数の和に等しい．

1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1

C 二項定理

$(a+b)^5$ を展開する仕組みから，項の係数を求めてみよう．

$$
\begin{array}{c}
(a+b)^5 = \underset{①}{(a+b)}\underset{②}{(a+b)}\underset{③}{(a+b)}\underset{④}{(a+b)}\underset{⑤}{(a+b)}
\end{array}
$$

右辺の式を展開するときは，①②$\cdots$⑤ それぞれから a または b を取り出す．たとえば，積が a^3b^2 となる項をかけた順番のまま書き出すと

$$aaabb,\ aabab,\ aabba,\ abaab,\ ababa,\ \cdots$$

となり，a を3個，b を2個並べる順列になっている．

そのような順列の総数は，$\dfrac{5!}{3!2!} = {}_5\mathrm{C}_2$ である．

よって，$(a+b)^5$ の展開式における a^3b^2 の項の係数は ${}_5\mathrm{C}_2$ である．

同様に考えて，一般の $(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-r}b^r$ の項[5] の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ である．一般に次の**二項定理**が成り立つ．

二項定理

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots \\
\cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n
\end{aligned}
$$

二項定理における ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ を，$(a+b)^n$ の展開式の**一般項**といい，係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を**二項係数**という．

[5] 累乗の指数が0である数は1と約束する．すなわち，$a^0=1$，$b^0=1$ である．

二項定理を利用して，実際に展開式を求めてみよう．

例 1.16 $(x-2)^5$ の展開式

二項定理の等式

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots \\ \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

で，$n=5$ として，a を x，b を -2 におきかえると

$$\begin{aligned}(x-2)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0x^5 + {}_5\mathrm{C}_1x^4(-2) + {}_5\mathrm{C}_2x^3(-2)^2 \\ &\quad + {}_5\mathrm{C}_3x^2(-2)^3 + {}_5\mathrm{C}_4x(-2)^4 + {}_5\mathrm{C}_5(-2)^5 \\ &= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32\end{aligned}$$

[注意] $(x-2)^5$ の展開式の一般項は，${}_5\mathrm{C}_rx^{5-r}(-2)^r$ である．

練習 1.36 次の式の展開式を，二項定理を使って求めよ．

(1) $(x+1)^5$

(2) $(x-1)^5$

(3) $(x+2)^6$

練習 1.37 次の式の展開式における x^3 の項の係数を求めよ．

(1) $(2x+3)^4$

(2) $(3x-1)^5$

D 二項定理の応用

二項定理により，次の等式が成り立つ．

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \qquad \cdots ①$$

この等式で $x=1$ を代入すると，次の等式が得られる．

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$$

練習 1.38 次の等式を，上の等式 ① を利用して導け．

$${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0$$

応用例題 1.7 次の式の展開式における $a^3b^2c^2$ の項の係数を求めよ．

$$(a+b+c)^7$$

考え方 $a+b=A$ とおいて，$(A+c)^7$ の展開式で A^5c^2 の項の係数，さらに $(a+b)^5$ の展開式で a^3b^2 の項の係数を求める．

【解】 $\{(a+b)+c\}^7$ の展開式において，c^2 を含む項は，${}_7\mathrm{C}_2(a+b)^5c^2$ であり，$(a+b)^5$ の展開式における a^3b^2 の項の係数は ${}_5\mathrm{C}_2$ である．よって，求める係数は

$${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 21 \times 10 = 210$$

練習 1.39 $(a+b+c)^6$ の展開式における次の項の係数を求めよ．

(1) a^3bc^2

(2) $a^2b^2c^2$

(3) a^2b^4

研究

$(a+b+c)^n$ の展開式

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項の係数を求めよう．
この項 $a^pb^qc^r$ の係数は，二項定理を導いたときと同様に考えると，a を p 個，b を q 個，c を r 個並べる順列の総数に等しい．
したがって，次のことがいえる．

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項の係数は

$$\frac{n!}{p!q!r!} \qquad \text{ただし} \quad p+q+r=n$$

たとえば，$(a+b+c)^7$ における $a^3b^2c^2$ の項の係数は次のようになる．

$$\frac{7!}{3!2!2!}=210$$

1.2.5 補充問題

3 大中小3個のさいころを投げるとき，次のような場合は何通りあるか．

(1) すべて異なる目が出る．

(2) 目の積が奇数になる．

(3) 目の積が偶数になる．

(4) 目の積が20になる．

4 0，1，2，3，4の5個の数字を使って4桁の数を作る．

(1) 各桁の数字が異なるとき，偶数は何個作れるか．

(2) 各桁の数字に重複を許すとき，奇数は何個作れるか．

5 男子 6 人，女子 4 人の中から 3 人を選ぶとき，女子が 1 人以上含まれるような選び方は何通りあるか．

6 次の等式が成り立つことを，組合せの考えを用いて説明せよ．

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r $$

【答】

3 (1) 120 通り　(2) 27 通り　(3) 189 通り　(4) 9 通り
［(3) すべての目の出方 $-$(2)　(4) 積が 20 になる目の組は $(2,2,5)$，$(1,4,5)$］

4 (1) 60 個　(2) 200 個　［千の位に 0 は並べられないことに注意する.］

5 100 通り　［女子が 1 人，2 人，3 人の場合の数を，それぞれ求める.］

6 ［n 個のものから r 個を取り出すとき，n 個の中の特定のもの a に注目する．r 個の中に a を含む組の数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，a を含まない組の数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ ］

1.3　確率

1.3.1　事象と確率

私たちの身の回りには偶然に左右されて起こる事柄が多くある．このような事柄について，それがどの程度起こりやすいのか，または起こりにくいのかを考えることにしよう．

A 事柄の起こりやすさ

天気予報に，降水確率というものがある．たとえば

午前の降水確率は 30%，　午後の降水確率は 60%

という予報からは，
「午後は午前よりも雨が降りやすい」というような判断ができる．
事柄の起こりやすさという不確かなものも数値で表すと，降水確率のように，判断がしやすくなる．

トランプのハート1枚とスペード4枚の合計5枚から，2枚をでたらめに選ぶとき，次のどちらの方が起こりやすいのだろうか．

① 2枚ともスペードが出る

② 2枚のうちの1枚にハートが出る

以下では数学的に事柄の起こりやすさを考えることにしよう．

B 試行と事象

1個のさいころを投げると，

1，2，3，4，5，6

のいずれかの目が出る．
また，1組のトランプから1枚引くとき，

［1］ 絵札が出る　　［2］ ハートが出る

というような事柄に着目することがある．

「さいころを投げる」とか「トランプのカードを引く」などのように，同じ条件のもとで繰り返すことができる実験や観測を**試行**という．また，試行の結果として起こる事柄を**事象**（じしょう）という．

1 個のさいころを投げる試行では，たとえば 1 の目が出ることを，単に 1 で表すと，試行の結果全体は，次の集合 U で表すことができる．

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

このとき,「奇数の目が出る」という事象 A は，U の部分集合

$$A = \{1, 3, 5\}$$

で表される．

このように，1 つの試行の起こりうる結果全体を集合 U で表すとき，その試行におけるどの事象も，集合 U の部分集合で表すことができる．

U 自身で表される事象を**全事象**，U のただ 1 つの要素からなる集合で表される事象を**根元**（こんげん）**事象**という．

たとえば，1 個のさいころを投げる試行の根元事象は，次の 6 個である．

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

[注意] 今後，事象 A を表す集合を A で表し，事象と集合を区別しない．

例 1.17　10 円硬貨 1 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げるとき，表裏の出方を求める．

10 円硬貨に表が出て，100 円硬貨に裏が出ることを，(表，裏) で表すことにすると，起こりうるすべての場合は，

(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)

の 4 通りである．

練習 1.40 大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，すべての目の出方を例 1.17 にならって示せ．

C 同様に確からしいときの確率

1個のさいころを投げるとき，どの目が出ることも同程度に期待できる．一般に，ある試行において，どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という．このような試行で，起こりうるすべての場合の数を N，事象 A の起こる場合の数を a とするとき，$\dfrac{a}{N}$ を事象 A の**確率**といい，$\boldsymbol{P(A)}$ で表す[6]．

事象 A の確率

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{a}{N}}$$

[注意] 全事象を U とし，その要素の個数を $n(U)$，事象 A の要素の個数を $n(A)$ で表すと，事象 A の確率は $\boldsymbol{P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}}$ とも表される．

例 1.18 1個のさいころを投げるとき，偶数の目が出る確率を求める．

起こりうるすべての目の出方は，6通りある．
このうち，偶数の目が出るのは，3通りある．
よって，偶数の目が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \longleftarrow N = 6,\ a = 3$$

練習 1.41 1個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 奇数の目が出る．　　(2) 3以上の目が出る．

6 $P(A)$ の P は，「確率」を意味する英語 probability の頭文字である．

練習 1.42 赤玉 2 個と白玉 3 個の入った袋から，玉を 1 個取り出すとき，赤玉の出る確率を求めよ.

練習 1.43 ジョーカーを除く 1 組のトランプのカード 52 枚からカードを 1 枚引くとき，エースが出る確率を求めよ.

例 1.19 3 枚の硬貨を同時に投げるとき，そのうち 1 枚だけ表が出る確率を求める.

3 枚の硬貨に，それぞれ表，裏の 2 通りの出方がある.
よって，起こりうるすべての場合の数は

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (通り)}$$

このうち，1 枚だけ表が出るのは，3 通りある.
よって，1 枚だけ表が出る確率は

$$\frac{3}{8}$$

起こりうるすべての場合

(表, 表, 表)
(表, 表, 裏)
(表, 裏, 表)
(裏, 表, 表)
(表, 裏, 裏)
(裏, 表, 裏)
(裏, 裏, 表)
(裏, 裏, 裏)

練習 1.44 3 枚の硬貨を同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ.

(1) すべて表が出る. (2) 1 枚だけ裏が出る.

D いろいろな事象の確率

例題 1.11 2個のさいころを同時投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 同じ目が出る． (2) 目の和が5になる．

【解】 2個のさいころの目の出方は，6×6 の36通り．

(1) 同じ目が出るのは，以下の6通り．

$$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

(2) 目の和が5になるのは，以下の4通り．

$$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

よって，求める確率は $\dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

練習 1.45 2個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 目の和が7になる． (2) 2個とも偶数の目が出る．

例題 1.12 A君，B君の2人を含む6人のリレー選手がいる．走る順番をくじ引きで決めるとき，A君が1番目，B君が6番目になる確率を求めよ．

【解】 6人全員の並び方は，6! 通りある．

A君が1番目，B君が6番目になる並び方は，4! 通りある．

よって，求める確率は $\dfrac{4!}{6!} = \dfrac{1}{30}$

練習 1.46 1組のトランプの4枚のエースをでたらめに横1列に並べるとき，次の場合の確率を求めよ.

(1) ハートが左端に並ぶ.

(2) クラブが左端，ハートが右端に並ぶ.

例題 1.13 赤玉3個と白玉4個の入った袋から，同時に2個の玉を取り出すとき，2個とも白玉が出る確率を求めよ.

【解】 全部の7個から2個取る組合せは，${}_7\mathrm{C}_2$ 通りある.
白玉4個から2個取る組合せは，${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある.
よって，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{4\cdot3}{2\cdot1} \times \frac{2\cdot1}{7\cdot6} = \frac{2}{7}$$

練習 1.47 くじが10本あり，そのうち3本が当たりくじである.

(1) 同時に2本引くとき，2本とも当たる確率を求めよ.

(2) 同時に3本引くとき，3本ともはずれる確率を求めよ.

応用例題 1.8 1 組のトランプのハートのカード 13 枚から，同時に 4 枚引くとき，絵札を 1 枚だけ引く確率を求めよ．

考え方　3 枚の絵札から 1 枚，絵札以外の 10 枚から 3 枚引く．

【解】 全部の 13 枚から 4 枚引く組合せは，${}_{13}\mathrm{C}_4$ 通りある．
絵札 3 枚から 1 枚，絵札以外の 10 枚から 3 枚引く組合せは，
${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りある．
よって，求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_{10}\mathrm{C}_3}{{}_{13}\mathrm{C}_4} &= 3 \times \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} \times \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10} \\ &= \frac{72}{143}\end{aligned}$$

練習 1.48 男子 6 人，女子 4 人の合計 10 人の中から抽選で 5 人を選ぶとき，次のように選ばれる確率を求めよ．

(1) 男子が 3 人，女子が 2 人

(2) 女子は 1 人だけ

1.3.2 確率の基本性質

集合を使って確率の基本性質を明らかにし，複雑な事象の確率を求めるのに，その性質を利用してみよう．

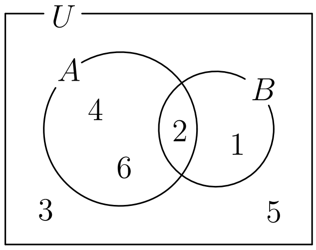
A いろいろな事象

確率の基本性質を調べる前に，事象 A，B に対して，次のような事象を定義しておく．

用 語	意 味	記 号
A，B の**積事象**	A と B がともに起こる事象	$A \cap B$
A，B の**和事象**	A または B が起こる事象	$A \cup B$

例 1.20 積事象と和事象

1 個のさいころを投げるとき,「偶数の目が出る」という事象を A,「2 以下の目が出る」という事象を B とする．



積事象 $A \cap B$ は

「偶数かつ 2 以下の目が出る」,

和事象 $A \cup B$ は

「偶数または 2 以下の目が出る」

という事象であり，それぞれ次のような集合で表される．

$$A \cap B = \{2\},\quad A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$$

練習 1.49 1 から 10 までの番号札 10 枚から 1 枚引くとき,「奇数番号を引く」という事象を A,「7 以上の番号を引く」という事象を B とするとき，積事象 $A \cap B$，和事象 $A \cup B$ を集合で表せ．

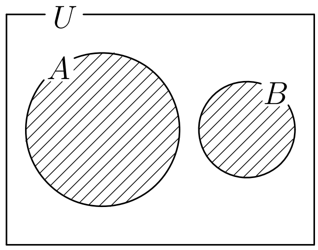
2つの事象 A，B が決して同時に起こらないこともある．このとき，

A，B は互いに**排反**である

という．または，

A，B は互いに**排反事象**である

ともいう．



A，B が互いに排反であるとは，$A \cap B = \phi$ と同じことである．

空集合 ϕ で表される事象を**空事象**という．

練習 1.50 ジョーカーを除く1組のトランプのカード52枚から1枚引くとき,「ハートが出る」という事象を A,「7が出る」という事象を B,「絵札が出る」という事象を C とする．どの事象とどの事象が互いに排反であるか．

B 確率の基本性質

1つの試行における全事象 U と事象 A の根元事象の個数について，

$$0 \leqq n(A) \leqq n(U) \qquad \longleftarrow A=\phi \text{ のとき } n(A)=0$$

が成り立つ．

よって，事象 A の確率 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$ の値の範囲は

$$0 \leqq P(A) \leqq 1 \qquad \longleftarrow 0 \leqq \frac{n(A)}{n(U)} \leqq \frac{n(U)}{n(U)}$$

とくに，$P(\phi) = 0$，$P(U) = 1$ である．

また，事象A,Bが互いに排反であるとき，$A \cap B = \phi$ であるから，6ページで学んだことにより，次の等式が成り立つ．

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

よって，両辺を $n(U)$ で割れば，次の等式が得られる．

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

これまでに得られた確率の性質をまとめると，次のようになる．

確率の基本性質

1 どんな事象 A についても $\boldsymbol{0 \leqq P(A) \leqq 1}$

2 空事象 ϕ について $\boldsymbol{P(\phi) = 0}$, 全事象 U について $\boldsymbol{P(U) = 1}$

3 A,Bが互いに排反であるとき $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

上の **3** を，確率の**加法定理**という．

3 つ以上の事象について，どの 2 つの事象も互いに排反であるとき，これらは 互いに排反である という．3 つ以上の排反な事象についても，2 つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ．

例 1.21 確率の加法定理の利用

各等の当たる確率が，右のようなくじがある．

	1 等	2 等	3 等	4 等
確率	$\dfrac{2}{100}$	$\dfrac{5}{100}$	$\dfrac{10}{100}$	$\dfrac{20}{100}$

このくじを 1 本引くとき，各等が当たる事象は互いに排反である．

このくじを 1 本引くとき，1 等または 2 等が当たる確率は

$$\frac{2}{100} + \frac{5}{100} = \frac{7}{100}$$ ← 確率の加法定理

また，1 等から 3 等までのいずれかが当たる確率は

$$\frac{2}{100} + \frac{5}{100} + \frac{10}{100} = \frac{17}{100}$$

練習 1.51 例 1.21 のくじを 1 本引くとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 3 等または 4 等が当たる．

(2) 2 等から 4 等までのいずれかが当たる．

例題 1.14 赤玉4個，白玉5個の入った袋から，2個の玉を同時に取り出すとき，2個が同じ色である確率を求めよ．

【解】「2個が同じ色である」という事象は,「2個とも赤玉である」という事象 A,「2個とも白玉である」という事象 B の和事象 $A \cup B$ である．

A，B は互いに排反であるから，加法定理により

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} + \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$$
$$= \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

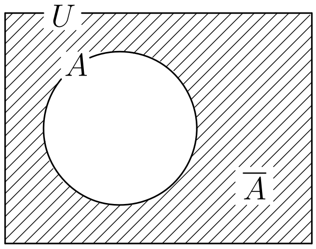
練習 1.52 赤玉2個，白玉3個，青玉4個の入った袋から，3個の玉を同時に取り出すとき，3個とも同じ色である確率を求めよ．

C 余事象とその確率

ある試行における事象 A に対して,「A が起こらない」という事象を，A の**余事象**といい，$\boldsymbol{\overline{A}}$ で表す．A，$\overline{A}$ は互いに排反である．

加法定理により

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$



一方，$A \cup \overline{A} = U$ であるから

$$P(A \cup \overline{A}) = P(U) = 1$$

したがって，次のことがいえる．

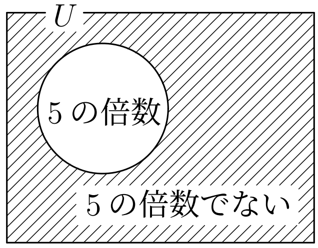
余事象と確率

$$\boldsymbol{P(A) + P(\overline{A}) = 1} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

例題 1.15 1 から 100 までの番号札から 1 枚引くとき，5 の倍数でない番号を引く確率を求めよ．

【解】「5 の倍数でない」という事象は,「5 の倍数である」という事象の余事象である．
5 の倍数の番号を引く確率は $\dfrac{20}{100}$
よって，求める確率は

$$1-\frac{20}{100}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$



練習 1.53 1 から 200 までの番号札から 1 枚引くとき，3 の倍数でない番号を引く確率を求めよ．

応用例題 1.9 1 組のトランプのハートのカード 13 枚から 3 枚を同時に引くとき，3 枚のうちの少なくとも 1 枚が絵札である確率を求めよ．

> **考え方**　「少なくとも 1 枚が絵札」という事象は,「絵札が 1 枚もない」という事象の余事象である．

【解】絵札でないカードは 10 枚ある．
よって，絵札が 1 枚もない確率は

$$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_3}{{}_{13}\mathrm{C}_3}=\frac{60}{143}$$

求めるのはこの余事象の確率であるから

$$1-\frac{60}{143}=\frac{83}{143}$$

練習 1.54 1から9までの番号札9枚から4枚を同時に引くとき，少なくとも1枚が偶数の番号である確率を求めよ．

練習 1.55 3個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

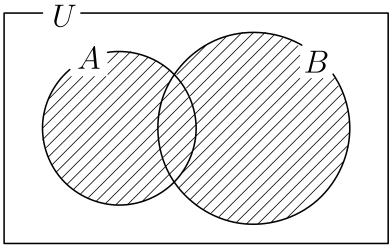
(1) 少なくとも1個は1の目が出る．

(2) 少なくとも1個は偶数の目が出る．

D 和事象の確率

一般の 2 つの事象 A，B について，確率 $P(A \cup B)$ を考えてみよう．

5 ページで学んだように，等式



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立つ．

よって，両辺を $n(U)$ で割れば，次の等式が得られる．

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

例 1.22　1 から 30 までの番号札から 1 枚引くとき，その番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率を求める．

$$A = \{2, 4, 6, \cdots, 30\}, \quad B = \{3, 6, 9, \cdots, 30\}$$

とすると　$A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30\}$

$$n(A) = 15, \quad n(B) = 10, \quad n(A \cap B) = 5$$

よって，番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

練習 1.56 1 から 50 までの番号札から 1 枚引くとき，その番号が次のような数である確率を求めよ．

(1) 3 の倍数または 4 の倍数

(2) 3 の倍数でも 4 の倍数でもない数

1.3.3　独立な試行と確率

これまでは，1つの試行における事象の確率を考えてきた．ここでは，複数の試行を考え，それぞれの試行における事象が同時に起こる確率を考えよう．

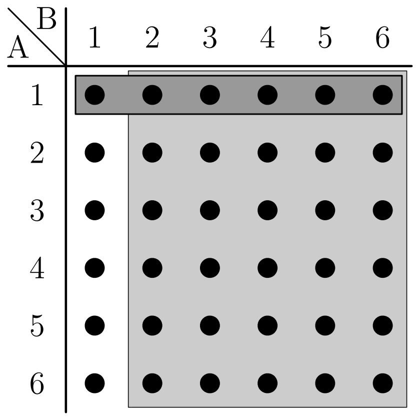
A 独立な試行の確率

Aが1個のさいころを投げる試行と，Bが1個のさいころを投げる試行を考える．
この2つの試行を行った結果は 6×6 通りあり，それらは同様に確からしい．
このうち，

「Aは1の目が出る」

「Bは1以外の目が出る」

という2つの事象が同時に起こる場合は，1×5 通りある．



よって，それが起こる確率 p は

$$p=\frac{1\times 5}{6\times 6}=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$$

のように表される．

この確率 p は，次のような2つの確率の積になっているといえる．

さいころを1回投げるときに，1の目が出る確率 $\frac{1}{6}$

さいころを1回投げるときに，1以外の目が出る確率 $\frac{5}{6}$

また，Aがさいころを投げる試行と，Bがさいころを投げる試行では，それぞれの結果は互いに影響を与えない．

このように，いくつかの試行において，どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき，これらの試行は**独立**であるという．

一般に，独立な2つの試行における事象の確率について，次のことが成り立つ．

独立な試行の確率

2つの試行SとTが独立であるとき，Sで事象 A が起こり，かつTで事象Bが起こる確率 p は，$P(A)$ と $P(B)$ の積に等しい．
すなわち　　$\boldsymbol{p=P(A)\times P(B)}$

独立な3つ以上の試行についても，上と同様なことが成り立つ．

例 1.23　1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるときの確率
これらの 2 つの試行は独立である.
たとえば,「硬貨は表が出て，さいころは 5 以上の目が出る」という事象の確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

練習 1.57　2 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ.

(1) 硬貨は 2 枚とも表が出て，さいころは偶数の目が出る.

(2) 硬貨は 1 枚だけ表が出て，さいころは 2 以下の目が出る.

例 1.24　1 個のさいころを 3 回続けて投げるときの確率
たとえば，3 回続けて 1 以外の目が出る確率は

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率は

$$1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

← 余事象は,「3 回続けて 1 以外の目が出る」

練習 1.58　1 枚の硬貨を 3 回続けて投げるとき，次の確率を求めよ.

(1) 3 回とも表が出る確率　　(2) 少なくとも 1 回は裏が出る確率

練習 1.59 A，B，C の3つのくじがあり，それぞれが当たる確率は右の表の通りである．
これらのくじを1本ずつ引くとき，次の確率を求めよ．

くじ	A	B	C
確率	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

(1) 3本とも当たる確率　(2) 少なくとも1本が当たる確率

例題 1.16 A の袋には青玉3個と白玉2個，B の袋には青玉2個と白玉4個が入っている．A，B の袋から1個ずつ玉を取り出すとき，同じ色の玉を取り出す確率を求めよ．

【解】 同じ色が青の場合と白の場合がある．
ともに青玉を取り出す確率は

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{30}$$

← A から玉を取り出すことと B から玉を取り出すことは独立である．

ともに白玉を取り出す確率は

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{30}$$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{30}+\frac{8}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

練習 1.60 例題 1.16 において，次の確率を求めよ．

(1) A から青玉，B から白玉を取り出す確率

(2) A，B から取り出す玉の色が異なる確率

B 反復試行の確率

1個のさいころを続けて3回投げるとき，6の目がちょうど1回出る確率を求めてみよう．

たとえば，1回目に6の目が出て，2回目と3回目はどちらも6以外の目が出る事象の確率は，次のようになる．

$$\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

1回目	2回目	3回目
○	×	×
×	○	×
×	×	○

$_3\mathrm{C}_1$ 通り

■表の説明■
○は6の目が出ること
×は6以外の目が出ることを表す．

また，3回のうち1回6の目が出る事象は，$_3\mathrm{C}_1$ 通りある．これらの事象は互いに排反であり，どの事象の確率も $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$ である．

よって，求める確率は，次のように計算される．

$$_3\mathrm{C}_1\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{72}$$

1個のさいころを何回か投げる場合などのように，同じ条件のもとで，1つの試行を何回か繰り返すとき，これらの試行は互いに独立である．このような試行の繰り返しを**反復試行**という．

反復試行の確率について，一般に次のことがいえる．

反復試行の確率

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とする．この試行を n 回行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}}$

← A が r 回起こり，$\overline{A}$ が $(n-r)$ 回起こる確率

例 1.25 1枚の硬貨を5回投げて表がちょうど2回出る確率

硬貨を1回投げるとき，表が出る確率は $\frac{1}{2}$

よって，5回投げて表がちょうど2回出る確率は

$$\begin{aligned}{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-2}&=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\\&=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

練習 1.61 1個のさいころを4回投げるとき，次の場合の確率を求めよ．

(1) 1の目がちょうど3回出る．

(2) 5以上の目がちょうど2回出る．

例題 1.17 赤玉2個と白玉3個の入った袋から玉を1個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を4回行うとき，赤玉が3回以上出る確率を求めよ．

【解】 1回の試行で，赤玉が出る確率は $\dfrac{2}{5}$

この試行を4回行って赤玉が3回以上出る確率は

$$
\begin{aligned}
&{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(1-\frac{2}{5}\right)^{4-3}+\left(\frac{2}{5}\right)^4 \\
&\qquad =4\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^4 \\
&\qquad =\frac{96}{625}+\frac{16}{625}=\frac{112}{625}
\end{aligned}
$$

$\longleftarrow$ 赤玉が3回または4回出る確率

練習 1.62 赤玉2個と白玉4個の入った袋から玉を1個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を5回行うとき，赤玉が4回以上出る確率を求めよ．

研究

くじ引きの確率

10 本のくじがあり，そのうちの 3 本が当たりであるとする．
このくじを，A 君，B 君がこの順に引くとき，B 君が当たる確率を求めてみよう．
ただし，引いたくじはもどさないとし，引いたくじが当たりかどうかは，2 人が引き終ってからわかるものとする．
このようなくじの引き方では，10 本のくじから 2 本を選んで並べ，その順に A 君，B 君の引くくじと考えることにしても，確率は変わらない．
10 本から 2 本を選んで並べる順列は

$$ {}_{10}\mathrm{P}_2 = 10\cdot 9 \text{ (通り)} $$

このうち，2 本目が当たりであるものは

$$ {}_{3}\mathrm{P}_1 \times {}_{9}\mathrm{P}_1 = 3\cdot 9 \text{ (通り)} $$

ある．よって，B 君が当たる確率は

$$ \frac{3\cdot 9}{10\cdot 9} = \frac{3}{10} $$

A	B	
当	当	3×2 通り
当	●	3×7 通り
●	当	7×3 通り
●	●	7×6 通り
合計		10×9 通り

これは，最初に引く A 君が当たる確率に等しい．
一般に，くじが当たる確率は引く順番に関係なく，いつでも

$$ \frac{\text{当たりの本数}}{\text{くじの本数}} $$

となる．

1.3.4　期待値

宝くじの1等賞金は高額であるが，それが当たる確率はかなり小さい．そして，2等，3等では賞金額は下がるが，当たる確率は大きくなる．
このようなくじでは，賞金の総額をくじの総数で割った平均の値に意味がある．この値と確率の関係を調べてみよう．

A 期待値

1000本のくじがあり，その賞金および本数は右の表のようになっている．

このくじを1本引くとき，期待できる賞金の額を考えてみよう．

このくじ1000本の賞金の総額は

$$10000 \times 1 + 1000 \times 5 + 100 \times 50 + 0 \times 944$$

	賞　金	本　数
1等	10000円	1本
2等	1000円	5本
3等	100円	50本
はずれ	0円	944本
計		1000本

である．これを，くじの総数で割ると

$$\frac{1}{1000}(10000 \times 1 + 1000 \times 5 + 100 \times 50 + 0 \times 944) = 20 \qquad \cdots ①$$

となる．すなわち，くじ1本当たりの賞金額は20円と考えられる．

右上の表を，確率を示す表に書き換えると，次のようになる．

賞 金	10000円	1000円	100円	0円	計
確 率	$\frac{1}{1000}$	$\frac{5}{1000}$	$\frac{50}{1000}$	$\frac{944}{1000}$	1

また，上の等式①は，次のように書き表すこともできる．

$$10000 \times \frac{1}{1000} + 1000 \times \frac{5}{1000} + 100 \times \frac{50}{1000} + 0 \times \frac{944}{1000} = 20$$

したがって，この等式の左辺は，賞金の額とそれが当たる確率の積をすべて加えたものになっていることがわかる．

一般に，ある試行の結果に応じて，x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_n のどれか1つの値をとる数量 X があり，各値をとる確率が

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n \qquad \text{ただし} \quad p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$

であるとき，$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n$ を数量 X の**期待値**という．

期待値

X のとる値と確率が右の表のようなとき，X の期待値は，次の式で与えられる．

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n$$

例 1.26 1 個のさいころを投げるとき，出る目の期待値を求める．

どの目が出る確率も

$$\frac{1}{6}$$

である．

目	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，出る目の期待値は

$$\begin{aligned} &1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

練習 1.63 2 個のさいころを投げて出る目の和を考える．下の表を完成させて，出る目の和の期待値を求めよ．

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$			$\frac{4}{36}$		$\frac{6}{36}$					$\frac{1}{36}$	1

B 期待値の利用

例題 1.18 赤玉2個と白玉4個が入った袋から，3個の玉を同時に取り出し，出た赤玉1個につき1000円をもらえるゲームがある．1回のゲームで受け取る金額の期待値を求めよ．

【解】 出る赤玉の個数は，0，1，2のいずれかである．

赤玉が0個の確率は　$\dfrac{{}_4C_3}{{}_6C_3} = \dfrac{4}{20}$

赤玉が1個の確率は　$\dfrac{{}_2C_1 \times {}_4C_2}{{}_6C_3} = \dfrac{12}{20}$

赤玉が2個の確率は　$\dfrac{{}_2C_2 \times {}_4C_1}{{}_6C_3} = \dfrac{4}{20}$

よって，受け取る金額を X 円とすると，右のような表ができる．
したがって，求める期待値は

X	0	1000	2000	計
確率	$\dfrac{4}{20}$	$\dfrac{12}{20}$	$\dfrac{4}{20}$	1

↑ 確率の和が1

$$0 \times \frac{4}{20} + 1000 \times \frac{12}{20} + 2000 \times \frac{4}{20}$$
$$= \frac{20000}{20} = 1000 \qquad \text{(答) } 1000\text{ 円}$$

例題1.18において，ゲームの参加料が1回1200円なら，参加料より受け取る金額の期待値の方が少ない．すなわち，このゲームに参加しても，得とはいえない．しかし，参加料が1回800円なら，得といえる．

期待値は，このような判断をするのに役に立つ．

練習 1.64 500円硬貨3枚を同時に投げて，表が出た硬貨を全部もらえるゲームがある．1回のゲームで，受け取る金額の期待値を求めよ．
また，このゲームの参加料が1回800円のとき，このゲームに参加することは得といえるか．

1.3.5　補充問題

7 A，B，C の 3 人がじゃんけんを 1 回行うとき，次の確率を求めよ．

(1) A だけが勝つ確率

(2) 全員が違う手を出す確率

(3) 誰も勝たない，すなわちあいこになる確率

8 1 組のトランプのハートのカード 13 枚すべてをでたらめに 1 列に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 枚の絵札が続いて並ぶ確率

(2) 両端に絵札が並ぶ確率

(3) エースが端には並ばない確率

9 三者択一式の問題が3問続けて出題される．どの問題でもでたらめに答えを選ぶとき，次のものを求めよ．ただし，各問題でどの答えを選ぶ確率も，それぞれ $\frac{1}{3}$ と考えてよいとする．

(1) 1問だけ正解する確率

(2) 正解する問題数の期待値

【答】

7 (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{1}{3}$

8 (1) $\frac{1}{26}$ (2) $\frac{1}{26}$ (3) $\frac{11}{13}$

9 (1) $\frac{4}{9}$ (2) 1題

1.4　章末問題

1.4.1　章末問題 A

1 0，1，2，3，4，5 の 6 個の数字を 1 個ずつ使って 3 桁の数を作る.

(1) 5 の倍数は何個できるか.

(2) 3 桁の数を小さい順に並べるとき，22 番目の数を求めよ.

2 大人 2 人と子供 4 人が，円形の 6 人席のテーブルに着席するとき，大人 2 人が隣り合わないような並び方は何通りあるか.

3 二項定理を用いて，次の不等式を証明せよ.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 \qquad \text{ただし}, n \text{ は 2 以上の自然数}$$

4 男子4人と女子3人をくじ引きで1列に並べるとき，次の確率を求めよ．

(1) 男子と女子が交互に並ぶ確率

(2) 両端に女子が並ぶ確率

5 1から9までの9枚の番号札から4枚選ぶとき，次の確率を求めよ．

(1) 全部が6以下である確率

(2) 最大の番号が7以上である確率

6 白玉4個と黒玉6個が入っている袋から，玉を2個取り出すとき，次の各場合に，取り出した2個の玉の色が異なる確率を求めよ．

(1) 最初に1個を取り出し，袋にもどしてから2個目を取り出す場合

(2) 2個を同時に取り出す場合

7 1から5までの番号札が，それぞれの番号の数だけ用意されている．この中から1枚を取り出すとき，次のどちらを選ぶ方が得といえるか．

① 出た番号と同じ枚数の100円硬貨をもらう．

② 5の番号が出たときだけ1000円をもらう．

1.4.2　章末問題B

8 A，B，C，Dの4人が品物を1個ずつ持ち寄り，それらを分けることにした．各人が他の人の品物をもらうような分け方は何通りあるか．

9 次の問いに答えよ．

(1) 6人をA，Bの2部屋に入れる方法は，何通りあるか．ただし，全部の人を1つの部屋に入れてもよい．

(2) 6人を2つに分ける方法は何通りあるか．

10 0000から9999までの番号のうちで，次のような番号は何個あるか．

(1) 0101，0033のように，同じ数字を2個ずつ含むもの

(2) 1248のように，異なる数字が左から小さい順に並んでいるもの

11 赤玉と白玉の入った3つの箱A，B，Cの中から玉を1個取り出すとき，赤玉の出る確率は，それぞれ$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{5}$であるとする．各箱の中から玉を1個ずつ取り出すとき，赤玉が2個出る確率を求めよ．

12 1枚の硬貨を投げて，表が出たときは数直線上の点Pを正の向きに2だけ進め，裏が出たときはPを負の向きに1だけ進める．硬貨を9回投げ終わったとき，Pが最初の位置にもどっている確率を求めよ．

ヒント

8　4人の品物を a，b，c，d として，適する場合の樹形図をかく．
10　(2) 異なる4つの数字の組合せ1組で，数字の並びが1つ決まる．
12　表の回数を r 回とすると，$2r-(9-r)=0$ が成り立つ．

【答】

1　(1) 36個　(2) 203　［(2) 百の位が1である3桁の数は ${}_5\mathrm{P}_2$ 個］

2　72通り　$[(6-1)!-(5-1)!\times 2!]$

3　$\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}\right)^n > 1+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{1}{n}=1+1\right]$

4　(1) $\dfrac{1}{35}$　(2) $\dfrac{1}{7}$　$\left[(1)\ \dfrac{4!\times 3!}{7!}\qquad (2)\ \dfrac{{}_3\mathrm{P}_2\times 5!}{7!}\right]$

5　(1) $\dfrac{5}{42}$　(2) $\dfrac{37}{42}$　$\left[(1)\ \dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}\qquad (2)\ (1)\text{の余事象}\right]$

6　(1) $\dfrac{12}{25}$　(2) $\dfrac{8}{15}$　$\left[(1)\ \dfrac{4}{10}\times\dfrac{6}{10}+\dfrac{6}{10}\times\dfrac{4}{10}\qquad (2)\ \dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\right]$

7　① の方が得　$\left[①\ 100\times\dfrac{1}{15}+200\times\dfrac{2}{15}+300\times\dfrac{3}{15}+400\times\dfrac{4}{15}+500\times\dfrac{5}{15}\right]$

8　9通り

9　(1) 64通り　(2) 31通り　$\left[(1)\ 2^6\qquad (2)\ \dfrac{2^6-2}{2!}\right]$

10　(1) 270通り　(2) 210通り　$\left[(1)\ {}_{10}\mathrm{C}_2\times\dfrac{4!}{2!2!}\qquad (2)\ {}_{10}\mathrm{C}_4\right]$

11　$\dfrac{2}{5}$　$\left[\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{2}{5}\right)+\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{5}+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\right]$

12　$\dfrac{21}{128}$　$\left[{}_9\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^6\right]$