第 3 章　平面図形

3.1　三角形の性質

3.1.1　三角形の辺と角

三角形の辺と角については，いろいろな興味深い性質がある．ここでは，辺と角の大小関係や，角の二等分線と辺の交点がその辺をどのような比に分けるかなどについて，調べることにしよう．

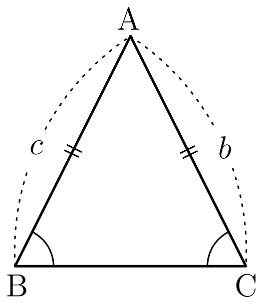
A 三角形の辺と角の大小

以下では，△ABC の ∠A，∠B，∠C に向い合う辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c で表す．

△ABC の辺と角については，次が成り立つ．

$b = c$　ならば　∠B = ∠C

これは二等辺三角形の性質である．
この逆も成り立つ．
それでは，$b > c$ のときはどうだろうか．



例 3.1 △ABC において，次が成り立つ．

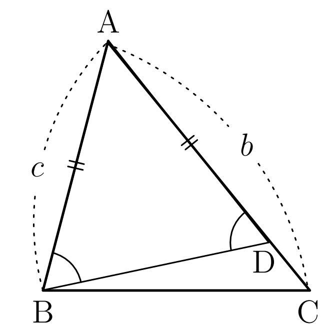
$b > c$　ならば　∠B > ∠C

[証明] $b > c$ であるならば，辺 AC 上に AB=AD となる点 D がとれる．
このとき，△ABD において

∠ABD = ∠ADB

ここで，∠B > ∠ABD，
∠ADB > ∠C であるから

∠B > ∠C　　**[証終]**



← ∠ADB = ∠C + ∠DBC > ∠C

例 3.1 の結果から，次が成り立つこともいえる．

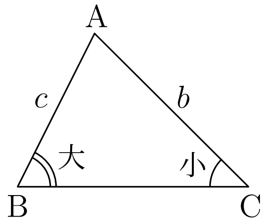
$$\triangle\mathrm{ABC}\text{ において}\quad b < c \quad\text{ならば}\quad \angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{C}$$

次に，例 3.1 の逆を考えよう．

例 3.2 $\triangle$ABC において，次が成り立つ．

$$\angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C} \quad\text{ならば}\quad b > c$$

[証明] $\angle$B $>$ $\angle$C であるとき，
$b > c$ でないと仮定すると，
$b = c$ または $b < c$ である．
$b = c$ ならば $\angle$B $=$ $\angle$C となり，
$\angle$B $>$ $\angle$C に矛盾する．
$b < c$ ならば $\angle$B $<$ $\angle$C となり，
$\angle$B $>$ $\angle$C に矛盾する．
よって，$\angle$B $>$ $\angle$C ならば $b > c$ である．　**[証終]**



[注意] 例 3.2 の証明では，背理法を用いている．

一般に，次の定理が成り立つ．

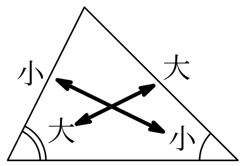
三角形の辺と角の大小関係

定理 1 $\triangle$ABC において

$$\boldsymbol{b > c \iff \angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C}}$$

$$\boldsymbol{b = c \iff \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}}$$

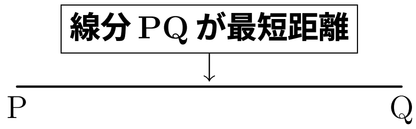
$$\boldsymbol{b < c \iff \angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{C}}$$



練習 3.1 次が成り立つことを示せ．
直角三角形では，3辺のうち斜辺が最大である．

さくらの個別指導（さくら教育研究所）

B 三角形の 3 辺の大小関係

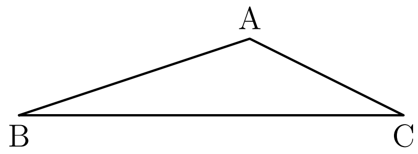


平面上で，2 点 P，Q を結ぶ最短経路は，線分 PQ で与えられる．

これにより，△ABC において

$$\mathrm{BC} < \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$$

であることがわかる．



一般に，次の定理が成り立つ．

三角形の 3 辺の長さ

定理 2 1 つの三角形において

［1］ 2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さよりも大きい．

［2］ 2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さよりも小さい．

また，正の数 a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在するための必要十分条件は，次の不等式が成り立つことである．

$$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}| < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

← $|\boldsymbol{A}|$ は $\boldsymbol{A}$ の絶対値を表す

練習 3.2 3 辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ．

(1) 4，6，8　　(2) 4，6，4　　(3) 4，6，10

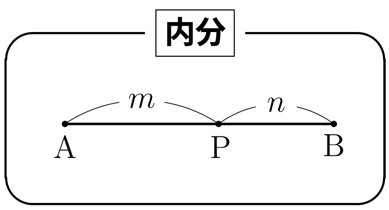
C 線分の比と三角形の角の二等分線

m，n を正の数とする．

線分 AB 上の点 P が

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

を満たすとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分する**という．

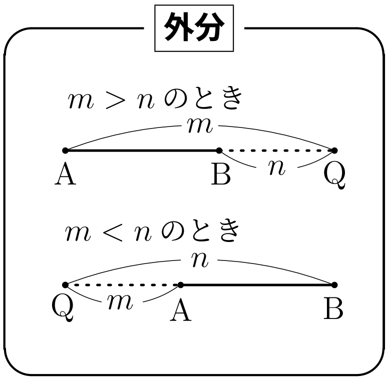


次に，m，n を異なる正の数とする．
線分 AB の延長上の点 Q が

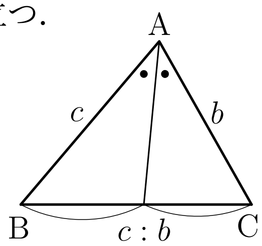
$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$$

を満たすとき，点 Q は線分 AB を
$m : n$ に**外分する**という．

[注意]　m と n の大小関係と点 Q の位置は，
右の図のようになる．



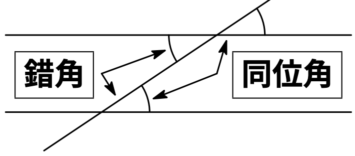
三角形の角の二等分線に関して，次の定理が成り立つ．



三角形の角の二等分線と比

定理 3　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点は，辺 BC を AB : AC に内分する．

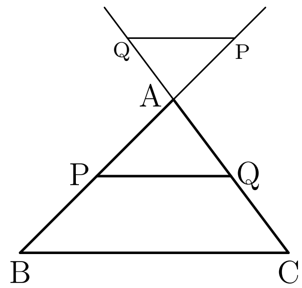
この定理を証明するために，平行線に関する次の性質を確認しておく．



［1］平行な 2 直線に 1 つの直線が交わるとき，同位角は等しい．
また，錯角も等しい．

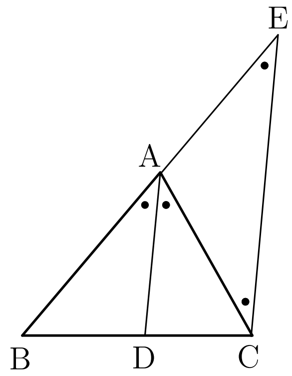
［2］△ABC において，辺 AB 上に点 P があり，辺 AC 上に点 Q があるとき，次が成り立つ．

$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC} \iff \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{QC}$$
$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC} \iff \mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{AQ} : \mathrm{AC}$$
$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC} \implies \mathrm{AP} : \mathrm{AB} = \mathrm{PQ} : \mathrm{BC}$$



[注意]　［2］は，点 P が辺 AB の A を越える延長上，点 Q が辺 AC の A を越える延長上にあっても成り立つ．

［定理 3 の証明］ $\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると



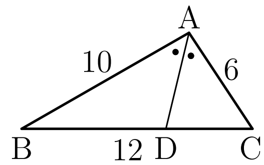
$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{DAC} \qquad ①$$

頂点 C を通り直線 AD に平行な直線を引き，辺 AB の A を越える延長との交点を E とすると，AD // EC から

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{AEC} \qquad ②$$
$$\angle \mathrm{DAC} = \angle \mathrm{ACE} \qquad ③$$

①，②，③ から，△ACE において
$\angle$AEC $=$ $\angle$ACE となるから　　AE $=$ AC
また，AD // EC から　BD : DC $=$ BA : AE
しがたって　　　　　BD : DC $=$ AB : AC　**［証終］**

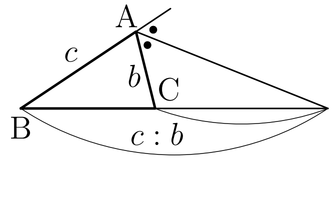
練習 3.3 AB $= 10$，BC $= 12$，AC $= 6$ である △ABC において，$\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D とする．次のものを求めよ．
(1) BD : DC　　(2) 線分 BD の長さ



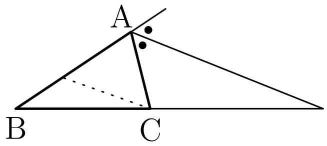
三角形の外角の二等分線に関して，次の定理が成り立つ．

三角形の外角の二等分線と比

定理 4 AB $\neq$ AC である △ABC の $\angle$A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は，辺 BC を AB : AC に外分する．

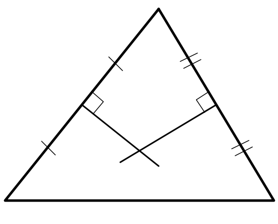


練習 3.4 定理 4 を定理 3 の証明にならって証明せよ．
ただし，AB > AC の場合でよい．

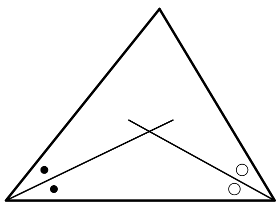


3.1.2　三角形の外心・内心・重心

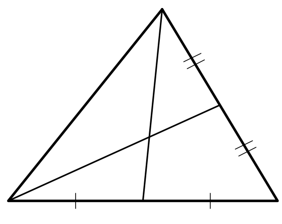
三角形において，3 辺の垂直二等分線を引いてみよう．また，3 つの角の二等分線を引いてみよう．それらには興味深い性質が成り立つのである．さらに，頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分についても，興味深い性質が成り立つ．ここでは，それらの性質について学ぶことにしよう．



辺の垂直二等分線



角の二等分線



頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分

A 三角形の外心

三角形には，どんな形の三角形にも共通する性質がある．
まず，三角形の辺の垂直二等分線について，次の定理が成り立つ．

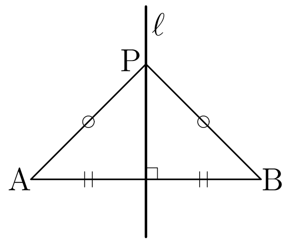
三角形の辺の垂直二等分線

定理 5　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる．

この定理を証明してみよう．
そのために，次のことを確認しておく．

線分 AB の垂直二等分線 ℓ と点 P について，
次が成り立つ．

$$\text{点 P が } \ell \text{ 上にある} \iff \mathrm{PA} = \mathrm{PB}$$

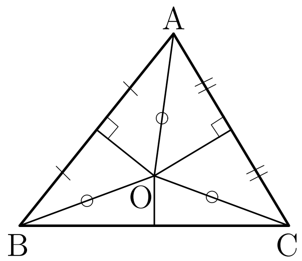


[定理 5 の証明]

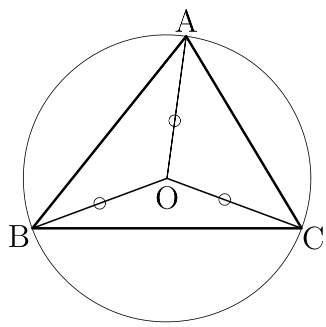
△ABC において，辺 AB の垂直二等分線と辺 AC の垂直二等分線の交点を O とすると

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}, \quad \mathrm{OA} = \mathrm{OC}$$

よって，OB = OC となるから，O は辺 BC の垂直二等分線上にもある．
したがって，三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる．　**[証終]**



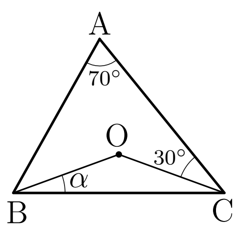
上の証明の中で示したように，点 O は △ABC の 3 つの頂点から等距離にある．
よって，この点 O を中心とする半径 OA の円は，△ABC の 3 つの頂点を通る．
この円を △ABC の**外接円**といい，点 O を △ABC の**外心**という．



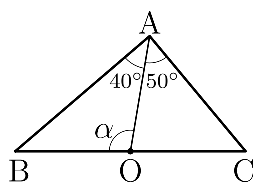
三角形の外心は，3辺の垂直二等分線の交点である．

練習 3.5　下の図で，点 O は △ABC の外心である．それぞれについて，α を求めよ．

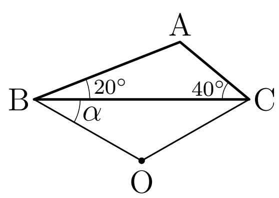
(1)



(2)



(3)



B 三角形の内心

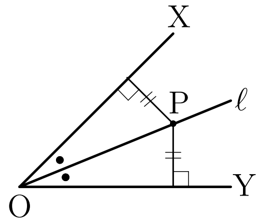
三角形の角の二等分線について，次の定理が成り立つ．

三角形の角の二等分線

定理 6　三角形の3つの角の二等分線は1点で交わる．

この定理を証明するために，次のことを用いる．

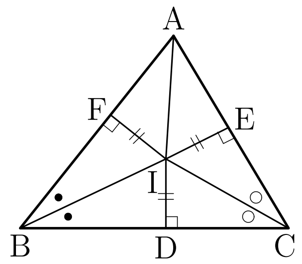
∠XOYの二等分線 ℓ と点Pについて，次が成り立つ．



点Pが ℓ 上にある　$\Longleftrightarrow$　点Pが2辺OX，OYから等距離にある

[定理 6 の証明]

△ABCにおいて，∠Bの二等分線と∠Cの二等分線の交点をIとし，Iから辺BC，CA，ABに引いた垂線を，それぞれID，IE，IFとすると

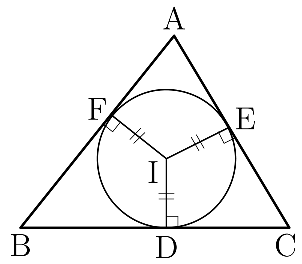


$$\mathrm{IF} = \mathrm{ID}, \quad \mathrm{IE} = \mathrm{ID}$$

よって，IF = IEとなるから，Iは∠Aの二等分線上にもある．

したがって，三角形の3つの角の二等分線は1点で交わる．　**[証終]**

上の証明により，次のことがいえる．



$$\mathrm{ID}\perp\mathrm{BC},\ \mathrm{IE}\perp\mathrm{CA},\ \mathrm{IF}\perp\mathrm{AB}$$

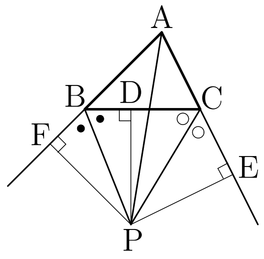
$$\mathrm{ID} = \mathrm{IE} = \mathrm{IF}$$

よって，この点Iを中心とする半径IDの円は，△ABCの3辺に接する．この円を△ABCの**内接円**といい，点Iを△ABCの**内心**という．

以上のことから，次のことがいえる．

三角形の内心は，3つの角の二等分線の交点である．

練習 3.6 △ABC において，右の図のように ∠B の外角の二等分線と ∠C の外角の二等分線との交点を P とするとき，P は ∠A の二等分線上にある．このことを証明せよ．

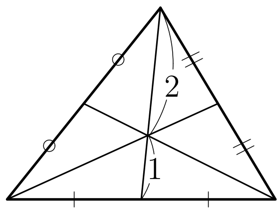


C 三角形の重心

三角形の頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分を，三角形の**中線**という．三角形の中線には，次のような性質がある．

三角形の中線

定理 7 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その点は各中線を 2 : 1 に内分する．



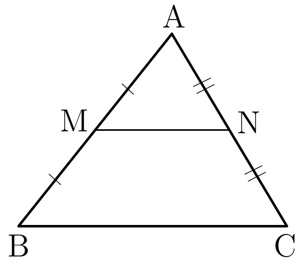
三角形の3本の中線が交わる点を，三角形の**重心**という．

定理 7 を証明するために，次の**中点連結定理**を確認しておく．

中点連結定理

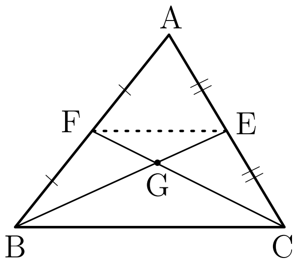
△ABC において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とするとき，次のことが成り立つ．

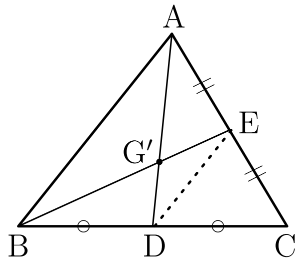
$$\mathrm{MN} \,/\!/\, \mathrm{BC}, \quad \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$$



[定理 7 の証明]

$\triangle$ABC の中線 BE と中線 CF の交点を G とし，中線 AD と中線 BE の交点を G$'$ とする．
このとき，まず 2 点 G，G$'$ が一致することを示せばよい．





中点連結定理により

$$\mathrm{FE} \,/\!/\, \mathrm{BC}, \quad \mathrm{BC} : \mathrm{FE} = 2 : 1$$

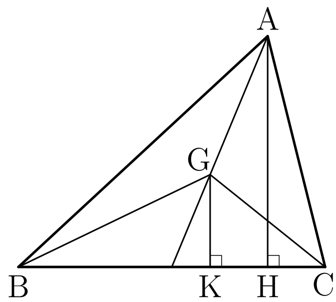
となるから　$\mathrm{BG} : \mathrm{GE} = \mathrm{BC} : \mathrm{FE} = 2 : 1$　　← 平行線と線分の比 82 ページ下の注意を参照

よって，点 G は線分 BE を 2 : 1 に内分する．
同様にして　$\mathrm{BG}' : \mathrm{G}'\mathrm{E} = \mathrm{AB} : \mathrm{ED} = 2 : 1$
よって，点 G$'$ は線分 BE を 2 : 1 に内分する．
線分 BE を 2 : 1 に内分する点は 1 点だけであるから，2 点 G，G$'$ は一致する．
したがって，3 つの中線は点 G で交わる．
また，$\mathrm{AG} : \mathrm{GD} = \mathrm{BG} : \mathrm{GE} = \mathrm{CG} : \mathrm{GF} = 2 : 1$ であるから，3 つの中線の交点は各中線を 2 : 1 に内分する．　**[証終]**

練習 3.7 $\triangle$ABC の重心を G とし，G から辺 BC に下ろした垂線を GK，A から辺 BC に下ろした垂線を AH とする．

(1) GK : AH を求めよ．

(2) $\triangle$GBC と $\triangle$ABC の面積の比を求めよ．



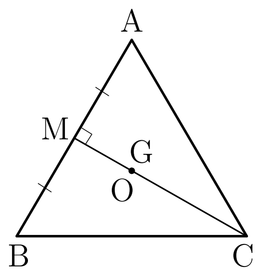
D 正三角形の外心，内心，重心

正三角形については，辺の垂直二等分線は中線でもあるから，外心と重心は一致する．このことの逆を調べてみよう．

例題 3.1 三角形の外心と重心が一致すれば，その三角形は正三角形である．このことを証明せよ．

考え方　△ABC について，AB = BC = CA となることを示す．
中線が辺の垂直二等分線となることに着目する．

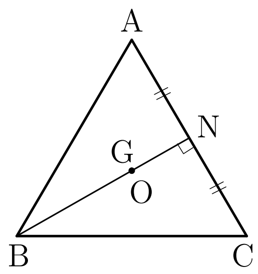
[証明] △ABC の外心を O，重心を G とする．△ABC の辺 AB の中点を M とするとき，O と G が一致すれば，中線 CM は辺 AB の垂直二等分線である．



よって

$$\mathrm{BC} = \mathrm{CA} \qquad ①$$

また，辺 CA の中点を N とするとき，O と G が一致すれば，中線 BN は辺 CA の垂直二等分線である．



よって

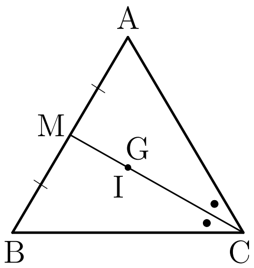
$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} \qquad ②$$

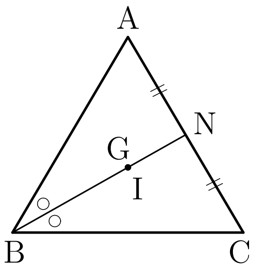
①，② から

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$$

したがって，外心と重心が一致する三角形は正三角形である．　**[証終]**

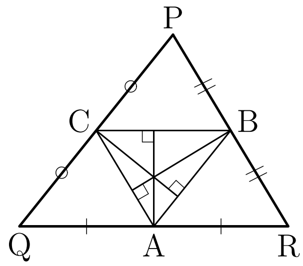
練習 3.8 三角形の内心と重心が一致すれば，その三角形は正三角形である．このことを証明せよ．





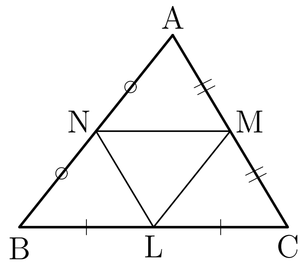
3.1.3 補充問題

1 △PQRの辺QR，RP，PQの中点を，それぞれA，B，Cとする．△ABCにおいて，各頂点からその向かい合う辺に下ろした3本の垂線は，△PQRの外心で交わることを証明せよ．



2 AB$=4$, BC$=5$, CA$=3$ である $\triangle$ABC の内心を I とする．直線 AI と辺 BC の交点を D とするとき，AI : ID を求めよ．

3 $\triangle$ABC の辺 BC, CA, AB の中点を，それぞれ L, M, N とするとき，$\triangle$ABC の重心と $\triangle$LMN の重心は一致する．このことを証明せよ．



【答】

1 ［中点連結定理により　CB // QR，CA // PR，AB // QP

$\triangle$ABC において，点 A から辺 BC に下ろした垂線を AD とすると，CB // QR から AD$\perp$QR である．よって，AD は辺 QR の垂直二等分線である．他の垂線についても同様.］

2 $7:5$ ［AD は$\angle$A の二等分線であるから　BD : DC $=$ AB : AC

BI は$\angle$B の二等分線であるから　AI : ID $=$ AB : BD $= 4 : \dfrac{20}{7}$］

3 ［中点連結定理により　AB // ML，AC // NL

よって，四角形 ANLM は平行四辺形であり，対角線 AL，MN の交点 D は線分 MN の中点である．四角形 BLMN，CMNL についても同様.］

3.2　円の性質

3.2.1　円周角

円については，次のような性質をすでに中学校で学んでいる．

円における弧の長さは，中心角の大きさに比例する．

円はその中心を通る直線について対称である．

ここでは，円についての性質をさらに調べることにしよう．

A 円の弧と弦の性質

円の弧と弦については，次のような性質がある．

円の弧と弦の性質

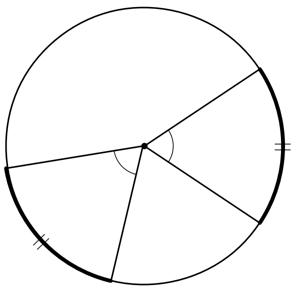
［1］1つの円で，等しい中心角に対する弧の長さは等しい．
逆に，長さの等しい弧に対する中心角は等しい．

［2］1つの円で，長さの等しい弧に対する弦の長さは等しい．

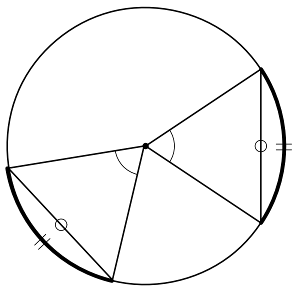
［3］弦の垂直二等分線は，円の中心を通る．

［4］円の中心から弦に引いた垂線は，その弦を2等分する．

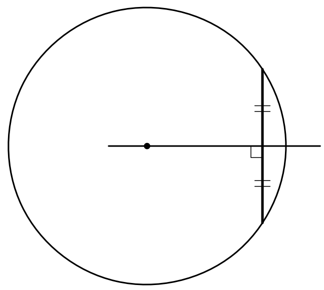
［1］



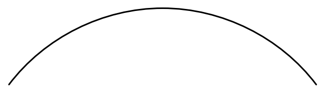
［2］



［3］，［4］



練習 3.9 右の図は円の一部分である．この円の中心を求める方法を述べよ．



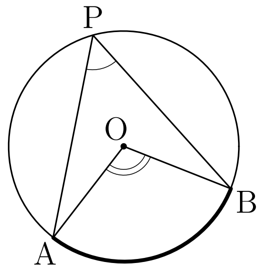
B 円周角

次の**円周角の定理**については，すでに中学校で学んでいる．

円周角の定理

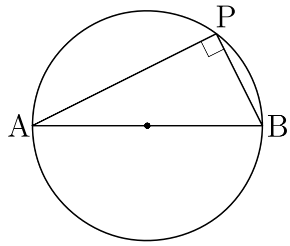
1つの弧に対する円周角は一定であり，
その弧に対する中心角の半分である．
たとえば，右の図の円Oにおいて

$$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$$



また，次のことがいえる．

線分ABを直径とする円の周上にA，Bと異なる点Pをとるとき，$\angle \mathrm{APB} = 90°$ である．逆に，$\angle \mathrm{APB} = 90°$ のとき，点Pは線分ABを直径とする円の周上にある．



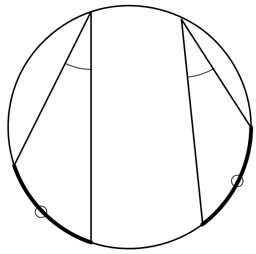
円周角と弧の長さについては，次の定理が成り立つ．

円周角と弧の長さ

定理 8　1つの円において

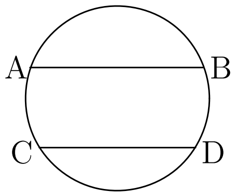
［1］等しい円周角に対する弧の長さは等しい．

［2］長さの等しい弧に対する円周角は等しい．



練習 3.10　定理8が成り立つことを証明せよ．ただし，円周角の定理と前ページに示した「円の弧と弦の性質」の［1］を用いよ．

練習 3.11 右の図のように，1つの円において平行な弦 AB，CD があるとき，$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}=\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ であることを証明せよ．



C 円周角の定理の逆

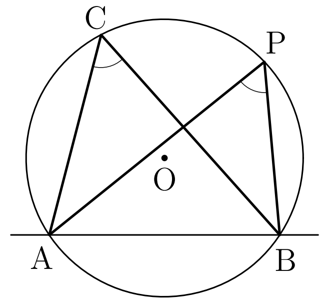
中心が点 O である円を**円 O** という．

円 O の周上に 3 点 A，B，C がある．

直線 AB について点 C と同じ側に点 P をとるとき，Pが円周上にあれば，円周角の定理により，

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{ACB}$$

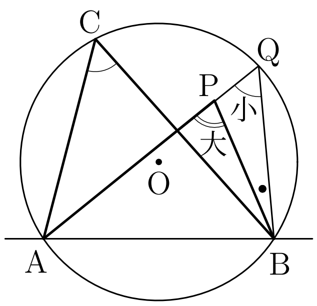
が成り立つ．

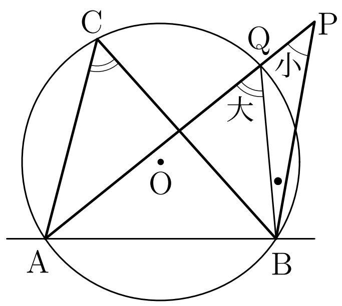


点 P が円の内部または外部にあるときは，次のことがいえる．

［1］　点 P が円 O の内部にあるとき
$\angle \mathrm{APB} > \angle \mathrm{ACB}$

［2］　点 P が円 O の外部にあるとき
$\angle \mathrm{APB} < \angle \mathrm{ACB}$





練習 3.12 上の図で，点 Q は直線 AP と円 O の交点である．［1］，［2］が成り立つことを示せ．

前ページで調べたことから，$\angle APB = \angle ACB$ が成り立つのは，点 P が円の周上にあるときに限られることがわかる．

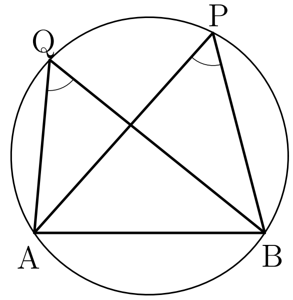
したがって，次の定理が得られる．

円周角の定理の逆

定理 9　2 点 P，Q が直線 AB について同じ側にあるとき，

$$\angle APB = \angle AQB$$

が成り立つならば，4 点 A，B，P，Q は 1 つの円周上にある．



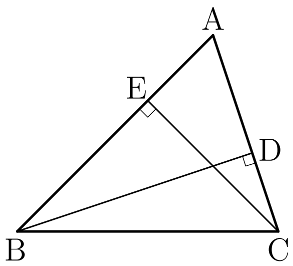
例題 3.2　$\triangle ABC$ の頂点 B から辺 CA に下ろした垂線を BD とし，頂点 C から辺 AB に下ろした垂線を CE とするとき，4 点 B，C，D，E は 1 つの円周上にあることを証明せよ．

［証明］ $BD \perp CA$，$CE \perp AB$ であるから

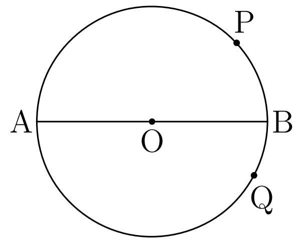
$$\angle BDC = 90^\circ, \quad \angle BEC = 90^\circ$$

よって　$\angle BDC = \angle BEC$

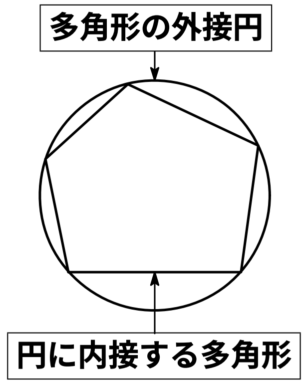
したがって，4 点 B，C，D，E は 1 つの円周上にある．　**［証終］**



練習 3.13　線分 AB を直径とする円 O の周上に，右の図のように 2 点 P，Q をとる．2 直線 AP，BQ が点 R で交わり，2 直線 AQ，BP が点 S で交わるとき，4 点 P，Q，R，S は 1 つの円周上にあることを証明せよ．



D 円に内接する四角形



右の図のように，多角形のすべての頂点が1つの円周上にあるとき，この多角形は円に**内接する**という．また，この円をその多角形の**外接円**という．

85 ページで調べたように，三角形には必ず外接円が存在する．四角形ではどうだろうか．

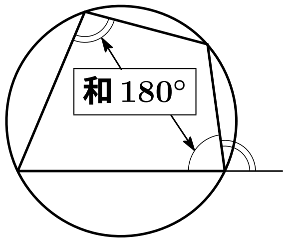
円に内接する四角形には，次の性質がある．

円に内接する四角形

定理 10 四角形が円に内接するとき，次の［1］，［2］が成り立つ．

［1］対角の和は 180° である．

［2］外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい．



［注意］ 四角形において，1つの内角に向かい合う内角をその**対角**という．

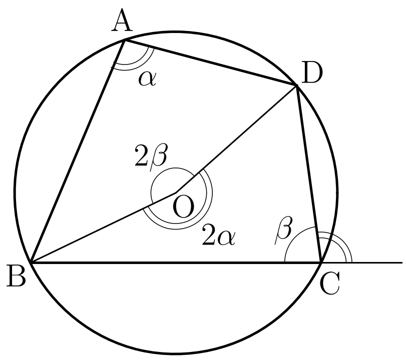
［定理 10 の証明］ 四角形 ABCD が円 O に内接するとき，

$$\angle\mathrm{BAD} = \alpha, \quad \angle\mathrm{BCD} = \beta$$

とする．中心角と円周角の関係により

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

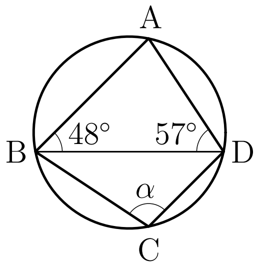
となるから，$\alpha + \beta = 180^\circ$ である．
よって，［1］が成り立つ．
また，$\angle\mathrm{BCD}$ の外角の大きさは
$180^\circ - \beta = \alpha$ となるから，［2］が成り立つ．



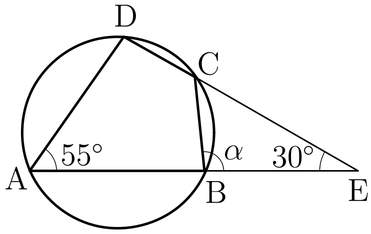
［証終］

練習 3.14 下の図において，α を求めよ．

(1)



(2)



定理 10 の逆も成り立つ．

四角形が円に内接するための条件

定理 11 次の［1］または［2］が成り立つ四角形は，円に内接する．

［1］1 組の対角の和が 180° である．

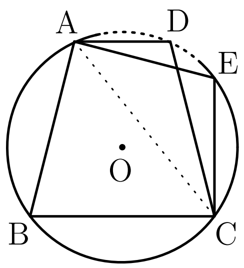
［2］1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい．

［2］が成り立つ四角形では［1］が成り立つから,［1］だけを証明する．

[定理 11［1］の証明] 四角形 ABCD において，

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \qquad \cdots ①$$

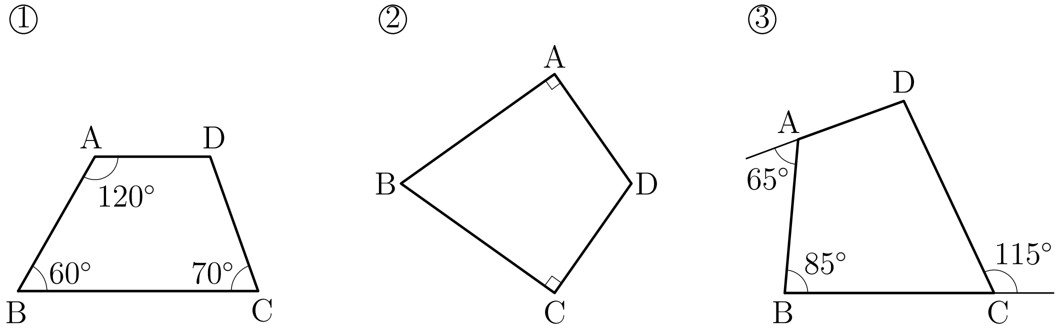
とする．右の図のように，△ABC の外接円 O の，B を含まない弧 AC 上に点 E をとると，四角形 ABCE は円 O に内接する．
よって，定理 10［1］により



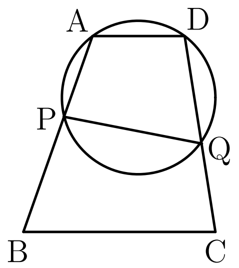
$$\angle ABC + \angle AEC = 180^\circ \qquad \cdots ②$$

①，② から　　$\angle ADC = \angle AEC$
よって，定理 9 により，4 点 A，C，E，D は 1 つの円周上にある．
そして，その円は △AEC の外接円すなわち円 O である．
点 B も円 O 上にあるから，四角形 ABCD は円 O に内接する．　**[証終]**

練習 3.15 次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか．

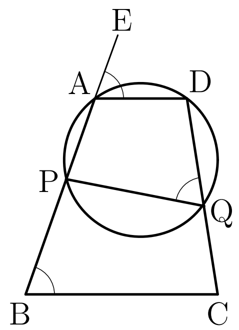


例題 3.3 AD // BC である台形 ABCD において，A，D を通る円が 2 辺 AB，CD と，右の図のように点 P，Q で交わるとき，四角形 PBCQ は円に内接する．このことを証明せよ．



考え方　定理 11 を使って証明する．AD // BC と四角形 APQD が円に内接することから，∠PBC = ∠PQD を導く．

[証明] AD // BC であるから，右の図で
∠EAD = ∠PBC となる．
また，四角形 APQD は円に内接するから，
∠EAD = ∠PQD となる．
よって，四角形 PBCQ において，
∠PBC = ∠PQD となるから，四角形 PBCQ は円に内接する．　**[証終]**

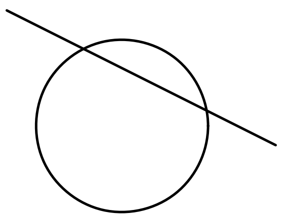


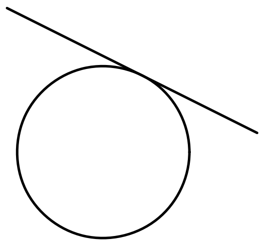
練習 3.16 AD // BC である台形 ABCD において，∠ABC = ∠BCD であるとき，この台形は円に内接する．このことを証明せよ．

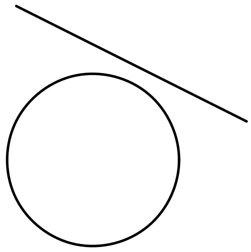
3.2.2　円と直線

円と直線の位置関係には，次のような 3 つの場合がある．

［1］2 点で交わる　**［2］接する**　**［3］離れている**







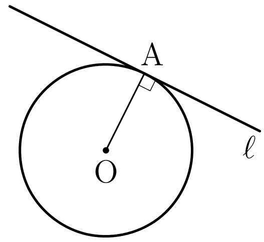
直線が円に接するのは，共有点がただ 1 点の場合である．このとき，この直線を円の接線といい，その共有点を接点という．
ここでは，円の接線や円と直線に関する性質を調べてみよう．

A 円の接線

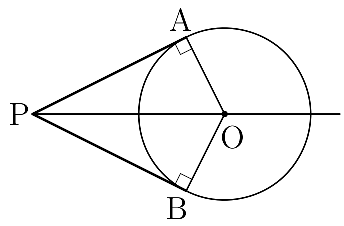
点 A を円 O 上の点とするとき，次が成り立つ．

直線 ℓ が点 A で円 O に接する　$\Longleftrightarrow$　$\mathrm{OA}\perp\ell$

この直線 ℓ が，点 A における円 O の接線である．



右の図のように，円 O には外部の点 P から 2 つの接線を引くことができる．
図で点 A，B が接点のとき，線分 PA または PB の長さを，P から円 O に引いた**接線の長さ**という．

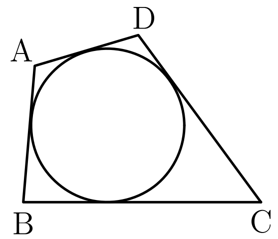


円の接線の長さについては，次のことがいえる．

円の外部の 1 点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しい．

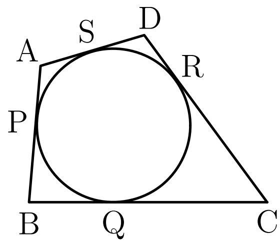
例題 3.4 右の図のように，円が四角形 ABCD の各辺に接している．
このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}+\mathrm{DA}$$



考え方　辺の長さを接線の長さの和に分解する．

[証明] 接点を右の図のように，P，Q，R，S とすると



$$\mathrm{AP}=\mathrm{AS},\quad \mathrm{BP}=\mathrm{BQ}$$
$$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR},\quad \mathrm{DR}=\mathrm{DS}$$

よって

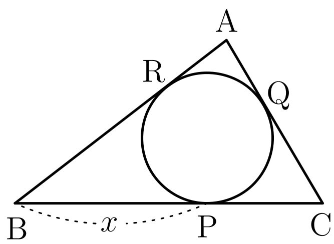
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}+\mathrm{CD}&=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})+(\mathrm{CR}+\mathrm{DR})\\&=(\mathrm{AS}+\mathrm{BQ})+(\mathrm{CQ}+\mathrm{DS})\\&=(\mathrm{BQ}+\mathrm{CQ})+(\mathrm{AS}+\mathrm{DS})\\&=\mathrm{BC}+\mathrm{DA}\end{aligned}$$

[証終]

練習 3.17 △ABC において，

$$\mathrm{AB}=7,\ \mathrm{BC}=8,\ \mathrm{CA}=5$$

であるとする．
この三角形の内接円と辺 BC，CA，AB との接点を，それぞれ P，Q，R とするとき，次の問いに答えよ．

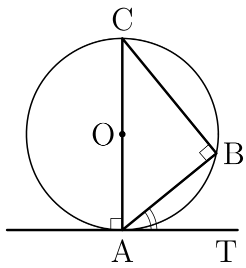


(1) BP の長さを x とするとき，AQ と QC の長さを，それぞれ x で表せ．

(2) BP の長さを求めよ．

B 円の接線と弦の作る角

右の図のように，円 O の弦 AB の端点 A における円の接線 AT と弦 AB が作る ∠BAT を考えてみよう．



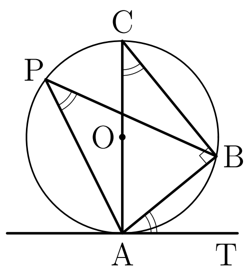
直径 AC を引くと，

$$\angle \mathrm{BAT} + \angle \mathrm{CAB} = 90^\circ$$
$$\angle \mathrm{ACB} + \angle \mathrm{CAB} = 90^\circ$$

となるから，次が成り立つ．

$$\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{ACB}$$

ここで，∠ACB は弧 AB の円周角であるから，右の図で



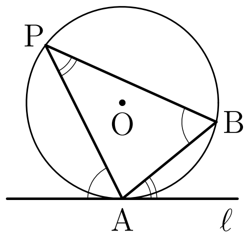
$$\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{APB}$$

となる．

一般に，次の定理が成り立つ．

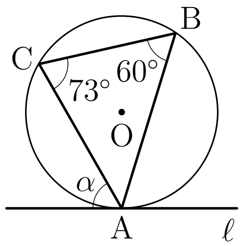
円の接線と弦の作る角

定理 12 円の弦と，その端点における接線が作る角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい．

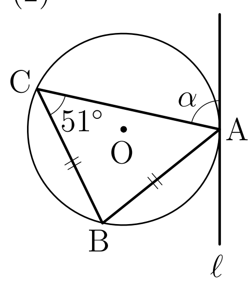


練習 3.18 右の図で，直線 ℓ は円 O の接線で，A は接点である．α を求めよ．

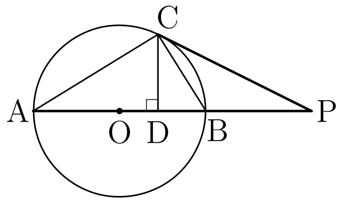
(1)



(2)



例題 3.5 右の図のように，円Oの直径ABの延長上の点Pから円Oに接線を引き，その接点をCとする．Cから線分ABに垂線CDを下ろすとき，弦BCは∠PCDを2等分することを証明せよ．



考え方　∠PCB = ∠BCD を示す．∠PCB は，接線PCと弦BCの作る角であるから，定理12を用いる．

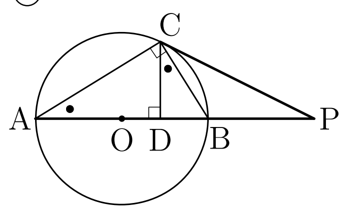
[証明] ABは直径であるから，∠ACB = 90° となる．
直角三角形ABCにおいて

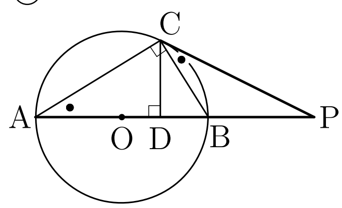
$$\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ - \angle \mathrm{DBC}$$

また，直角三角形BCDにおいて

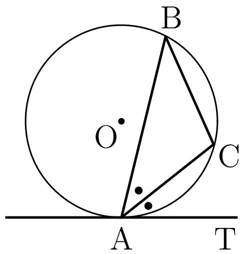
$$\angle \mathrm{BCD} = 90^\circ - \angle \mathrm{DBC}$$

よって　　∠BAC = ∠BCD　　①
一方，接線と弦の作る角により
　　∠PCB = ∠BAC　　②
①，②から　　∠PCB = ∠BCD
したがって，弦BCは∠PCDを2等分する．　**[証終]**

①


②


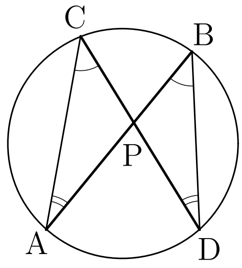
練習 3.19 右の図のように，円Oの弦ABと，点Aにおける接線ATの作る∠BATを弦ACが2等分するとき，△ABCは二等辺三角形であることを証明せよ．



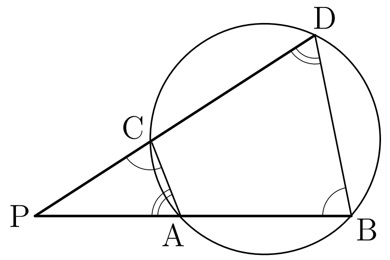
C 方べきの定理

下の図は，円における 2 つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とした図である．

［1］



［2］



上のいずれの場合も，△PAC と △PDB が相似[1]であることを示そう．
△PAC と △PDB において，次がいえる．

$$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{DBP}$$

$$\angle \mathrm{CAP} = \angle \mathrm{BDP}$$

← ［1］では円周角の定理,［2］では円に内接する四角形の性質.

よって，対応する 2 つの角が等しいから

$$\triangle \mathrm{PAC} \backsim \triangle \mathrm{PDB}$$

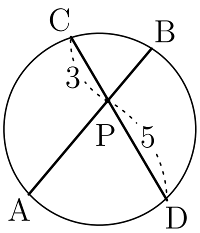
このことから，辺の比について，PA : PD = PC : PB が成り立つ．
したがって，次の**方べきの定理**が成り立つ．

方べきの定理

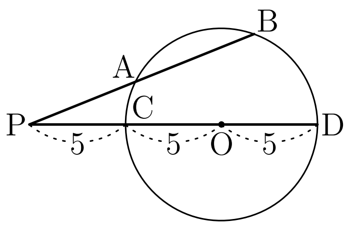
定理 13 円の 2 つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，PA·PB = PC·PD が成り立つ．

練習 3.20 次の図において，PA·PB を求めよ．

(1)



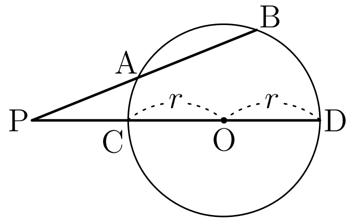
(2)



[1] 対応する 2 つの角が等しい 2 つの三角形は相似である．また，相似な三角形では，対応する辺の長さの比が等しい．

方べきの定理における PA·PB の値の意味を調べてみよう．

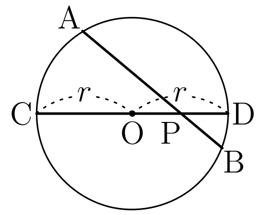
例 3.3 右の図において，円 O の半径を r とするとき



$$\begin{aligned}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} &= \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD} \\ &= (\mathrm{PO}-\mathrm{OC})(\mathrm{PO}+\mathrm{OD}) \\ &= (\mathrm{PO}-r)(\mathrm{PO}+r)\end{aligned}$$

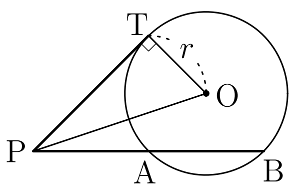
よって　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PO}^2 - r^2$

練習 3.21 右の図において，円 O の半径を r とするとき，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = r^2 - \mathrm{PO}^2$ である．このことを示せ．



例 3.3，練習 3.21 で調べたことからわかるように，方べきの定理における PA·PB の値は，その円の中心を O，半径を r とすると，$|\mathrm{PO}^2 - r^2|$ に等しい．

練習 3.22 右の図のように，円 O の外部の点 P を通る直線が円 O と 2 点 A，B で交わるとする．P から円 O に接線を引き，その接点を T とすると，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$ が成り立つ．このことを証明せよ．



研究

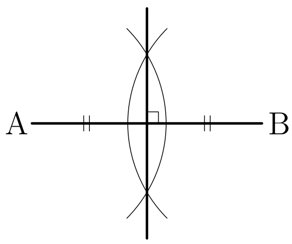
作図について

作図とは，定規とコンパスだけを道具として用いて，図形をかくことである．次の 2 つの作図は最も基本的なものである．

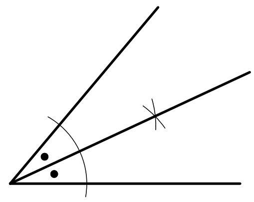
［1］与えられた線分の垂直二等分線を引く．

［2］与えられた角の二等分線を引く．

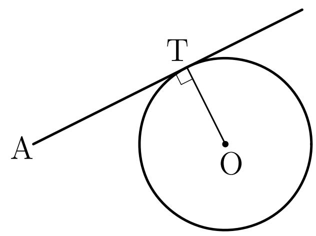
［1］



［2］



円 O の外部の点 A から円 O に接線を引く作図を考えよう．



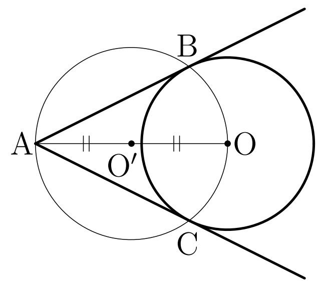
点 A から円 O に引いた接線の接点を T とすると，$\angle\mathrm{ATO} = 90^\circ$ である．
そこで，T は線分 OA を直径とする円の周上にもあることを利用する．
よって，次のような作図が考えられる．

① 線分 OA の中点 O′ を求めて，O′ を中心とする半径 O′A の円をかく．

② 円 O と円 O′ の交点を B，C とする．

③ 直線 AB，直線 AC を引く．

これらの直線が求める接線である．



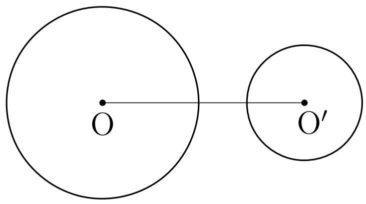
3.2.3　2つの円

ここでは，2つの円の位置関係や，2つの円に共通する接線があるかどうかについて調べることにしよう.

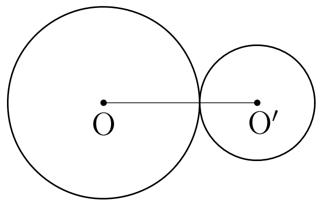
A 2つの円の位置関係

　大きさの異なる2つの円の位置関係には，次のような場合がある.

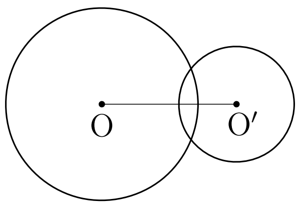
［1］一方が他方の外部にある



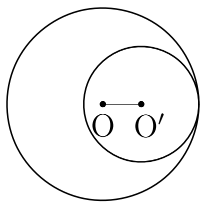
［2］1点を共有する



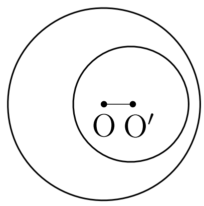
［3］2点で交わる



［4］1点を共有する



［5］一方が他方の内部にある

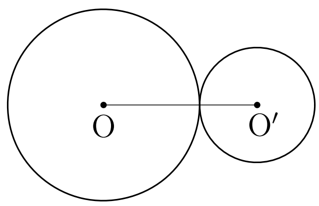


　［2］,［4］のように2つの円がただ1つの共有点をもつとき，2つの円は**接する**といい，この共有点を**接点**という.

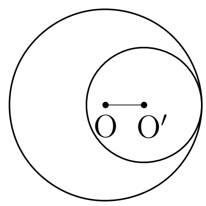
［2］のように接する場合，2つの円は**外接する**という.
［4］のように接する場合，2つの円は**内接する**という.

　2つの円が接するとき，接点は2つの円の中心を通る直線上にある.

外接する



内接する



練習 3.23 前ページ上の図で，円 O の半径を r，円 O$'$ の半径を r' とし，中心間の距離を d とする．［1］～［5］の各場合について，次の $\boxed{}$ に適する記号として，等号 $=$，不等号 $>$，$<$ のうちのいずれかを入れよ．

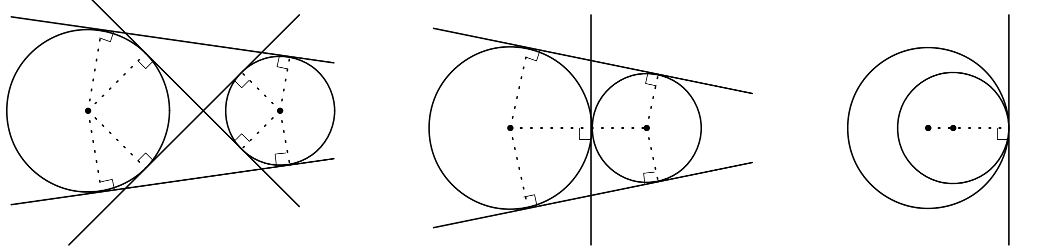
［1］ $d\ \boxed{}\ r+r'$　　［2］ $d\ \boxed{}\ r+r'$

［3］ $r-r'\ \boxed{}\ d\ \boxed{}\ r+r'$　　［4］ $d\ \boxed{}\ r-r'$

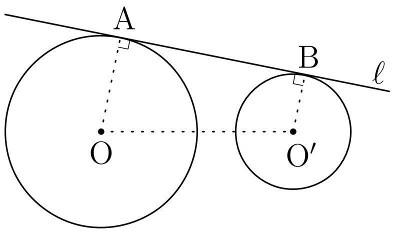
［5］ $d\ \boxed{}\ r-r'$

B 2 つの円の共通接線

2 つの円の両方に接している直線を，2 つの円の**共通接線**という．

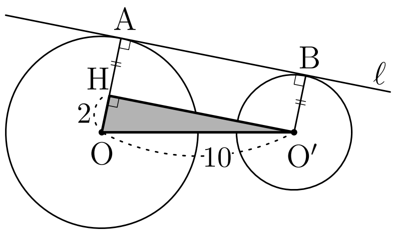


例題 3.6 右の図において，直線 ℓ は 2 つの円 O，O$'$ の共通接線で，A，B は接点である．円 O，O$'$ の半径を，それぞれ 5，3 とし，O，O$'$ 間の距離を 10 とするとき，線分 AB の長さを求めよ．



【解】 図のように，O$'$ から線分 OA に垂線 O$'$H を下ろすと

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}-\mathrm{O'B}=5-3=2$$

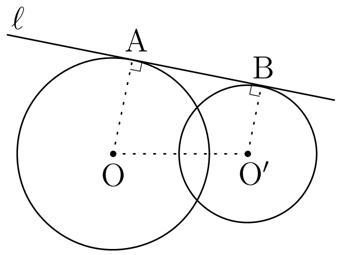


$\triangle$OO$'$H は直角三角形であるから

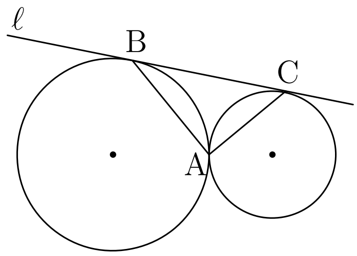
$$\mathrm{O'H}^2=\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2$$

よって　　$\mathrm{AB}=\mathrm{O'H}=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

練習 3.24 右の図において，直線 ℓ は2つの円O，O$'$の共通接線で，A，Bは接点である．円O，O$'$の半径を，それぞれ4，3とし，O，O$'$間の距離を5とするとき，線分ABの長さを求めよ．



応用例題 3.1 右の図において，2つの円は点Aで外接している．直線 ℓ は2つの円の共通接線で，B，Cはその接点であるとき，$\angle\text{BAC} = 90^\circ$ であることを証明せよ．

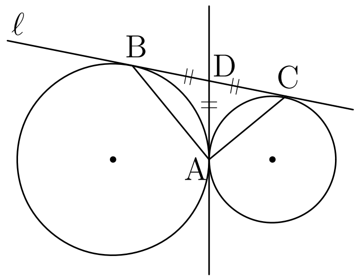


考え方　点Aにおける共通接線を引いてみる．

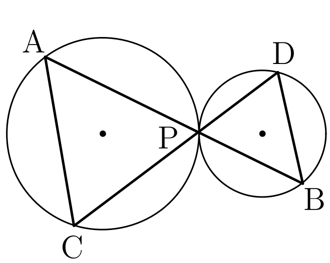
[証明] 点Aにおける共通接線を引き，直線 ℓ との交点をDとすると

$$\text{DA} = \text{DB},\quad \text{DA} = \text{DC}$$

よって，点Dは△ABCの外心で，点Aは線分BCを直径とする円周上にある．
したがって　$\angle\text{BAC} = 90^\circ$　**[証終]**

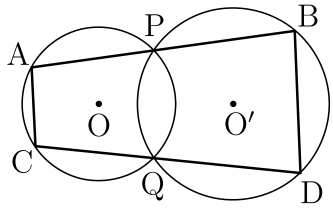


練習 3.25 点Pで外接する2つの円がある．Pを通る2本の直線を引き，右の図のように，2つの円とそれぞれA，BおよびC，Dで交わるとき，AC // DBであることを証明せよ．



3.2.4　補充問題

4 右の図のように，交わる 2 つの円 O，O′ の交点を P，Q とする．P を通る直線が，円 O，O′ と交わる点を，それぞれ A，B とし，Q を通る直線が円 O，O′ と交わる点を，それぞれ C，D とするとき，AC // BD であることを証明せよ．



5 2 つの線分 AB と CD，または AB の延長と CD の延長が点 P で交わるとき，PA·PB = PC·PD が成り立つならば，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある．このことを証明せよ．

【答】

4 ［四角形 ACQP は円に内接するので　∠ACQ = ∠BPQ
四角形 PQDB も円に内接するので，∠BPQ と ∠BDQ の外角は等しい.］

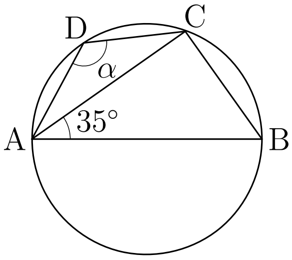
5 ［△ABC の外接円と直線 PC との交点を D′ とすると　PA·PB = PC·PD′
また，仮定より　PA·PB = PC·PD
これから D′ と D が一致することがいえる.］

3.3　章末問題

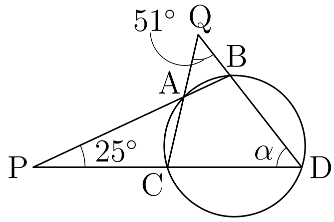
3.3.1　章末問題 A

1 右の図において，α を求めよ．ただし，(1) で線分 AB は円の直径とする．

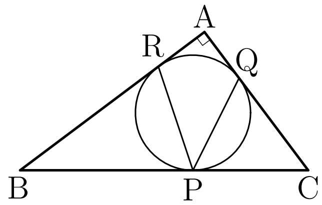
(1)



(2)



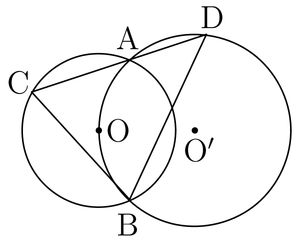
2 右の図で，P，Q，R は △ABC の辺と内接円との接点である．$\angle A = 90°$，$BP = 6$，$PC = 4$ であるとき，次の問いに答えよ．



(1) $\angle RPQ$ の大きさを求めよ．

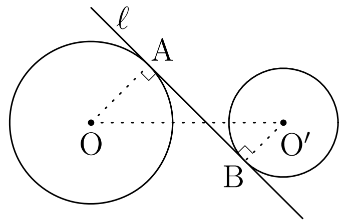
(2) 内接円の半径を求めよ．

3 右の図のように，点 A，B で交わる 2 つの円 O，O′ があり，円 O′ は円 O の中心を通る．A を通る直線と円 O，O′ との交点を，それぞれ C，D とするとき，△DCB は二等辺三角形であることを証明せよ．



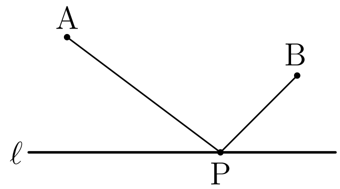
さくらの個別指導（さくら教育研究所）

4 右の図において，直線 ℓ は 2 つの円 O，O$'$ の共通接線で，A，B は接点である．円 O の半径を r，円 O$'$ の半径を r' とし，O，O$'$ 間の距離を d とするとき，線分 AB の長さを求めよ．

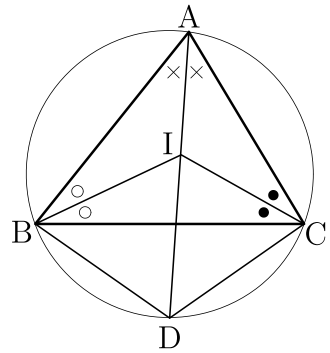


3.3.2 章末問題 B

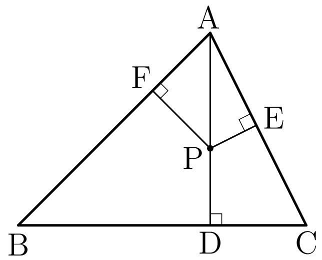
5 2 点 A，B は直線 ℓ について同じ側にある．ℓ 上に点 P をとり，A，B からの距離の和 AP+PB を最小とするには，点 P の位置はどこにとればよいか．



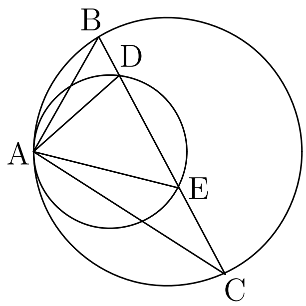
6 △ABC の内心を I とし，直線 AI と △ABC の外接円との交点を D とするとき，DB = DC = DI である．このことを証明せよ．



7 △ABC の頂点 A から底辺 BC に垂線 AD を下ろす．線分 AD 上に点 P をとり，P から辺 CA，AB に，それぞれ垂線 PE，PF を下ろすとき，四角形 BCEF は円に内接することを証明せよ．



8 点 A で内接する 2 つの円がある．外側の円の弦 BC が内側の円と 2 点 D，E で交わるとき，$\angle BAD = \angle CAE$ であることを証明せよ．



ヒント

5 直線 ℓ について，A と対称な点 A′ をとると，$AP = A'P$ である．
6 I と B，I と C を結んで，等しい角をみつける．
7 四角形 AFPE，FBDP が円に内接することを利用する．
8 A における共通接線を引いてみる．

【答】

1 (1)125°　(2)52°

2 (1)45°　(2)2　［(1) R と Q を結ぶと，$\angle\mathrm{RPQ} = \angle\mathrm{ARQ}$ である．また，$\mathrm{AR} = \mathrm{AQ}$ より，$\triangle\mathrm{ARQ}$ は直角二等辺三角形であるから，$\angle\mathrm{ARQ} = 45°$

(2) 内接円の半径を r として，直角三角形 ABC に三平方の定理を適用する.］

3 ［$\angle\mathrm{ACB} = \alpha$ とすると，中心角と円周角の関係により　$\angle\mathrm{AOB} = 2\alpha$

四角形 AOBD は円に内接するから　$\angle\mathrm{ADB} = 180° - 2\alpha$

$\triangle\mathrm{DCB}$ において　$\angle\mathrm{CBD} = 180° - \angle\mathrm{ACB} - \angle\mathrm{ADB} = \alpha$］

4 $\sqrt{d^2 - (r + r')^2}$　［点 O を通って直線 ℓ に平行な直線と，直線 $\mathrm{O'B}$ の交点を C とする．直角三角形 $\mathrm{OCO'}$ に三平方の定理を適用する.］

5 直線 ℓ について，点 A と対称な点 $\mathrm{A'}$ をとる．直線 $\mathrm{A'B}$ と ℓ の交点を P にとると，$\mathrm{AP} + \mathrm{PB}$ の長さは最小になる.

6 ［$\angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{BAI}$ であるから

$$\angle\mathrm{DBI} = \angle\mathrm{DBC} + \angle\mathrm{IBC} = \angle\mathrm{BAI} + \angle\mathrm{ABI} = \angle\mathrm{DIB}$$

よって，$\triangle\mathrm{DIB}$ は二等辺三角形で $\mathrm{DB} = \mathrm{DI}$ である．$\triangle\mathrm{DIC}$ についても同様.］

7 ［四角形 AFPE は円に内接するから　$\angle\mathrm{APF} = \angle\mathrm{AEF}$

四角形 FBDP は円に内接するから　$\angle\mathrm{APF} = \angle\mathrm{FBD}$

よって，四角形 BCEF において　$\angle\mathrm{FBC} = \angle\mathrm{AEF}$］

8 ［$\angle\mathrm{BAD} = \alpha$ とする．外側の円において，点 A を接点とする接線と弦 AB の作る角を β とすると，$\angle\mathrm{ACE} = \beta$ である．また，内側の円において，接線と弦 AD の作る角は $\angle\mathrm{AED}$ と等しく，$\angle\mathrm{AED} = \alpha + \beta$ である.

$\triangle\mathrm{ACE}$ において $\angle\mathrm{CAE} + \angle\mathrm{ACE} = \angle\mathrm{AED}$ であるから　$\angle\mathrm{CAE} = \alpha$］