第 2 章　論理と集合

2.1.1　命題と条件

「正方形は長方形である」という文は，正しいといえるだろうか．ここでは，ある事柄について述べられた文や式が，正しいか正しくないかを論理的に考えるために，命題と条件について学ぼう．

A 命題

次の 2 つの文が述べている内容について考えてみよう．

(A)「自然数 4 は偶数である」

(B)「数 1 と数 2 の間に大小関係 $1 > 2$ が成り立つ」

(A) の文は正しく，(B) の文は正しくない．

一般に，正しいか正しくないかが定まる文や式を**命題**という．また，命題が正しいとき，その命題は**真**であるといい，正しくないとき，その命題は**偽**であるという．

たとえば，上の命題 (A) は真であり，命題 (B) は偽である．

命題の中には，次のような図形に関するものもある．

(C)「正方形は長方形である」

四角形の中で，正方形であるものはすべて長方形であるから，この命題は真である．

長方形の中で，
4 辺の長さが等しい
ものが正方形

練習 2.1 次の命題の真偽を調べよ．

(1) 自然数 4 は素数である．　　← 素数：1 とその数自身以外に約数をもたない数

(2) 数 -1 について，$(-1)^2 > 0$ が成り立つ．

(3) 正三角形は二等辺三角形である．

(4) 台形は平行四辺形である．

B 条件

命題の中には，次のように文字を含むものもある．

「どんな実数[1]x についても，$x^2 \geqq 0$ が成り立つ.」

この命題は真である．
一方，文字 x を含んだ文や式でも，次のようなものもある．

「x は素数である」，　「$x > 1$」

これらは，x に値を代入しないと正しいか正しくないかが定まらないから，命題ではない．しかし，たとえば x を自然数全体の集合の要素と指定し，x に 1，2，3 などを代入すると，代入した文や式はそれぞれが真偽の定まる命題になる．
このような文字 x を含んだ文や式を，x に関する**条件**という．
条件を考える場合には，条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく．この集合を，その条件の**全体集合**という．

例 2.1 自然数全体の集合を N とし，x は N の要素とする．
x の条件 $p(x)$ を,「$p(x)$：x は素数である」とするとき，

$p(2)$：2 は素数である　　← 条件 $p(x)$ の x に 2 を代入した結果を $p(2)$ で表す.
$p(4)$：4 は素数である

となり，$p(2)$ は真で，$p(4)$ は偽である．

練習 2.2 例 2.1 の条件 $p(x)$ について，次の命題の真偽を，それぞれ調べよ．

(1) $p(3)$　　(2) $p(6)$　　(3) $p(7)$　　(4) $p(15)$

条件の中には，文字を 2 つ以上含むものもある．
たとえば，a，b が実数を表すとき，

「$a > 0$ かつ $b > 0$」，　「$a + b > 0$」

などは，a，b に関する条件である．

[1]数直線上の点で表される数が実数である．

2.1.2　命題，条件と集合

命題には，条件を満たすものの集合を考えると，その真偽が調べやすいものがある．ここでは，命題や条件について集合との関係を調べることにしよう．
今後，条件は単に p，q などで表すことにする．

A 命題 $\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$

実数について「3 より大きければ，1 より大きい」という文は，
2 つの条件「p：$x > 3$」,「q：$x > 1$」を用いて，　←x は実数とする．

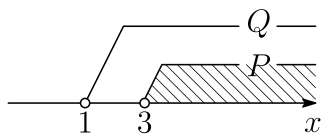
「p ならば q」

と表現することができる．このような命題を，$\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$ と書く．
命題 $p \Longrightarrow q$ について，p を**仮定**，q を**結論**という．

実数全体の集合 R の要素のうち，

$x > 3$ を満たす x の値全体の集合を P，
$x > 1$ を満たす x の値全体の集合を Q

とする[2]と，$P \subset Q$ が成り立つ．



一般に，全体集合を U とし，U の要素のうち，

条件 p を満たすもの全体の集合を P，
条件 q を満たすもの全体の集合を Q

とすると，命題 $p \Longrightarrow q$ は

P の要素はすべて Q の要素である

ということを表している (図 2.1).

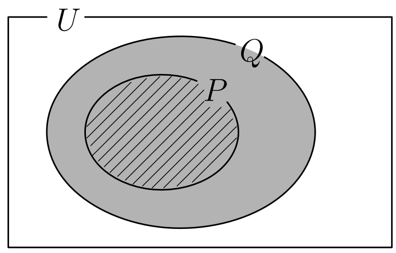


図 2.1: $P \subset Q$

以上のことから，次のことがいえる．

命題 $\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$

1 命題 $p \Longrightarrow q$ は,「p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す．

2 条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とするとき,「命題 $p \Longrightarrow q$ が真である」ことと「$P \subset Q$ が成り立つ」こととは同じである．

[2] x が集合 A の要素であることを，$x \in A$ と書くことがある．この記号を用いて，集合 P を $P = \{x \mid x > 3,\ x \in R\}$ または $P = \{x \in R \mid x > 3\}$ のように表すことがある．

練習 2.3 自然数 m に関する 2 つの条件

$$p：m \text{ は } 12 \text{ の約数}, \qquad q：m \text{ は } 24 \text{ の約数}$$

について，命題 $p \implies q$ の真偽を，集合を使って調べよ．

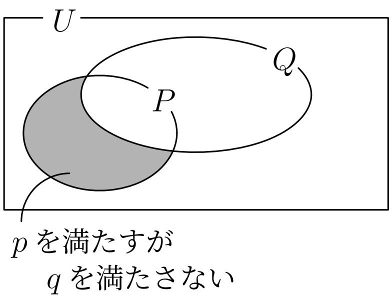
命題 $p \implies q$ が偽であるときは

p を満たすが，q を満たさないもの　　(＊)

が存在する．

したがって，命題 $p \implies q$ が偽であることをいうには，(＊) の例を 1 つだけ示せばよい．

そのような例を**反例**という．



例 2.2 実数 a，b についての命題「$a^2 = b^2 \implies a = b$」の真偽

$a = 1$，$b = -1$ は，$a^2 = b^2$ を満たすが，$a = b$ を満たさない．

よって，この命題は偽である．　　$\leftarrow a = 1$，$b = -1$ が反例の 1 つ

練習 2.4 自然数 n についての次の命題が偽であることを示せ．

n が素数ならば，n は奇数である．

B 命題の逆

命題 $p \implies q$ に対して，仮定と結論を入れかえた命題 $q \implies p$ を，もとの命題の**逆**という．

例 2.3 実数 a，b についての命題「$a = b \implies a^2 = b^2$」の逆は

「$a^2 = b^2 \implies a = b$」

例 2.3 において，もとの命題「$a = b \implies a^2 = b^2$」は真である．
しかし，その逆「$a^2 = b^2 \implies a = b$」は，例 2.2 で調べたように偽である．

一般に，命題とその逆の真偽については，次のことがいえる．

命題とその逆の真偽

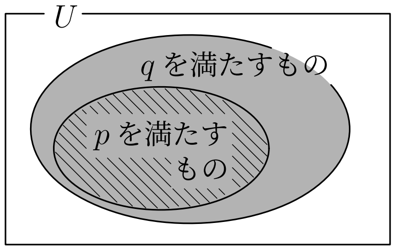
もとの命題が真であっても，その逆が真であるとは限らない．

練習 2.5 x，a，b，c は実数とする．次の命題の逆を述べ，逆の真偽を調べよ．

(1) $x = 2 \implies x^2 = 4$

(2) $a = b \implies ac = bc$

C 必要条件と十分条件



2 つの条件 p，q を考える．

命題 $p \implies q$ が真のとき，

q は p であるための**必要条件**である，

p は q であるための**十分条件**である

という．

例 2.4 実数 x についての命題

「$x > 0 \implies x^2 > 0$」は真であるから，

$x^2 > 0$ は $x > 0$ であるための必要条件であり，

$x > 0$ は $x^2 > 0$ であるための十分条件である．

$\boldsymbol{p} \implies \boldsymbol{q}$
十分条件　　必要条件

練習 2.6 a，b は実数とする．次の $\boxed{\quad}$ に，適する言葉を入れよ．

(1) $(a - b)a = 0$ は，$a = b$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件である．

(2) $a = b$ は，$a^2 = b^2$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件である．

2つの条件 p, q について,「$p \implies q$ かつ $q \implies p$」を $\boldsymbol{p} \iff \boldsymbol{q}$ と書く.
$p \iff q$ が成り立つとき，p と q は**同値**であるという.
また，このとき，q は p であるための**必要十分条件**であるという.
同様に，p は q であるための必要十分条件である.

例 2.5 実数 a について,「$a^2 = 0 \iff a = 0$」が成り立つ.
すなわち，$a^2 = 0$ と $a = 0$ は同値である.

練習 2.7 a，b，c は実数とする．次の条件の中で，$a = b$ と同値な条件を選べ.

① $a + c = b + c$　　② $a^2 = b^2$　　③ $(a - b)^2 = 0$

D 条件の否定

条件 p に対して,「p でない」という条件を p の**否定**といい，$\overline{\boldsymbol{p}}$ で表す.

例 2.6 実数 x に関する条件の否定

(1) 条件「x は有理数[3]である」の否定は,「x は有理数でない」
すなわち　「x は無理数である」

(2) 条件「$x > 0$」の否定は,「$x > 0$ でない」
すなわち　「$x \leqq 0$」

練習 2.8 自然数 n に関する次の条件の否定を述べよ.

(1) n は偶数である　　(2) n は5より小さい

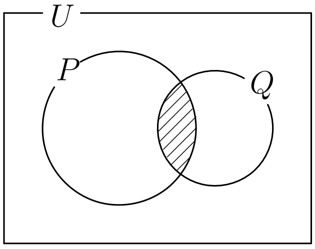
[3]実数のうち，分数の形に表せる数が有理数，表せない数が無理数である.

E 条件と集合

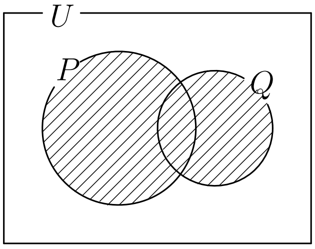
以下では全体集合を U とし，U の要素の中で，条件 p を満たすもの全体の集合を P で，条件 q を満たすもの全体の集合を Q で表す．

条件 p かつ q，p または q，$\overline{p}$ と集合の関係は，次のようになる．

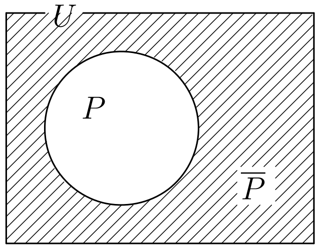
条件　$\boldsymbol{p}$ **かつ** $\boldsymbol{q}$
集合　$\boldsymbol{P \cap Q}$



条件　$\boldsymbol{p}$ **または** $\boldsymbol{q}$
集合　$\boldsymbol{P \cup Q}$



条件　$\overline{\boldsymbol{p}}$
集合　$\overline{\boldsymbol{P}}$



2 つの集合 P，Q について，ド・モルガンの法則

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}, \qquad \overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$$

←4 ページ参照

が成り立つことから，条件 p，q に対して，次が成り立つ．

条件「かつ」,「または」の否定

$\overline{\boldsymbol{p}\ \text{かつ}\ \boldsymbol{q}} \iff \overline{\boldsymbol{p}}$ **または** $\overline{\boldsymbol{q}}$

$\overline{\boldsymbol{p}\ \text{または}\ \boldsymbol{q}} \iff \overline{\boldsymbol{p}}$ **かつ** $\overline{\boldsymbol{q}}$

例 2.7　a，b は実数とする．

(1)　「$a = 0$ かつ $b = 0$」の否定は　　「$a \neq 0$ または $b \neq 0$」

(2)　「$a > 0$ または $b > 0$」の否定は　　「$a \leqq 0$ かつ $b \leqq 0$」

練習 2.9 a，b は実数とする．次の条件の否定を述べよ．

(1) $a < 1$ かつ $b < 1$　　(2) $a = 0$ または $b = 0$

F 命題の対偶

命題 $p \implies q$ に対し，$\overline{q} \implies \overline{p}$ をもとの命題の**対偶**という．

例 2.8 自然数 n についての命題の対偶

(1) 「n は 4 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 2 の倍数」の対偶は
「n は 2 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 4 の倍数でない」

(2) 「n は奇数 $\Longrightarrow$ n^2 は偶数」の対偶は　$\longleftarrow$「n は奇数」の否定は「n は偶数」
「n^2 は奇数 $\Longrightarrow$ n は偶数」

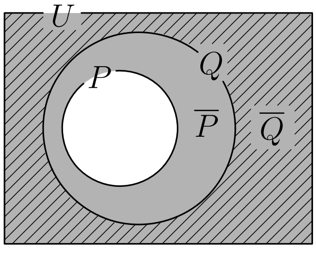
例 2.8 の (1) では，もとの命題は真であり，その対偶も真である．
また，(2) では，もとの命題は偽であり，その対偶も偽である．

練習 2.10 m，n は自然数とする．次の命題の対偶を述べよ．また，対偶の真偽を調べよ．

(1) n は 6 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数

(2) n^2 は偶数 $\Longrightarrow$ n は奇数

(3) 積 mn は偶数 $\Longrightarrow$ m は偶数 かつ n は偶数



一般に，集合 P，Q について

$$P \subset Q \iff \overline{Q} \subset \overline{P}$$

が成り立つ．
このことから，次のことがいえる．

命題とその対偶の真偽

命題 $p \implies q$ とその対偶 $\overline{q} \implies \overline{p}$ の真偽は一致する．

2.1.3　命題と証明

命題 $p \implies q$ が真であることを証明したいとき，p を仮定して q を導くのが困難なこともある．このような場合に有効な証明方法を学ぼう．

A 対偶を利用する証明

命題とその対偶の真偽は一致するから，次のことがいえる．

対偶を利用する証明

命題 $p \implies q$ を証明するのに，
その対偶 $\overline{q} \implies \overline{p}$ を証明してもよい．

[注意] 命題が真であることを証明することを，単に「命題を証明する」と表現した．

例題 2.1 n は整数とする．対偶を考えて，次の命題を証明せよ．

n^2 が偶数ならば，n は偶数である．

[証明] この命題の対偶は，次の命題である．

n が奇数ならば，n^2 は奇数である．　　$\cdots$ (A)

n が奇数ならば，整数 m を用いて $n = 2m + 1$ と表され，

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 \\
&= 2(2m^2 + 2m) + 1
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，n^2 は奇数である．
よって，命題 (A) は真であり，もとの命題も真である．　**[証終]**

練習 2.11 n は整数とする．対偶を考えて，次の命題を証明せよ．

n^2 が奇数ならば，n は奇数である．

B 背理法を利用する証明

例題 2.1 で証明した次の命題を，別な方法で証明することを考えよう．

n^2 が偶数ならば，n は偶数である．　$\cdots$(B)

証明の流れ

① 「n^2 が偶数」という条件のもとで,「n は偶数である」が成り立たない，すなわち「n は奇数である」と仮定する．

② 例題 2.1 の証明のように「n^2 は奇数である」を示す．

③ この結論は，命題 (B) の仮定「n^2 が偶数」に矛盾（むじゅん）する．

④ 矛盾が生じたのは，① の仮定が誤っているからである．

⑤ したがって,「n は偶数である」が成り立つ．　**[証終]**

このような証明法を**背理法**という．
背理法を利用して命題を証明するには，次のように行う．

命題 $p \Longrightarrow q$ の背理法による証明

条件 p のもとで，q でないと仮定して矛盾を導くことにより，
命題 $p \Longrightarrow q$ が真であると結論する．

例題 2.2 背理法を利用して，次のことを証明せよ．

$\sqrt{2}$ が無理数ならば，$1+\sqrt{2}$ は無理数である．

[証明] $1+\sqrt{2}$ は無理数でないと仮定すると，$1+\sqrt{2}$ は有理数である．
$1+\sqrt{2}=r$ とすると　$\sqrt{2}=r-1$
r が有理数ならば $r-1$ も有理数であるから，この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．
したがって，$1+\sqrt{2}$ は無理数である．　**[証終]**

練習 2.12 背理法を利用して，次のことを証明せよ．

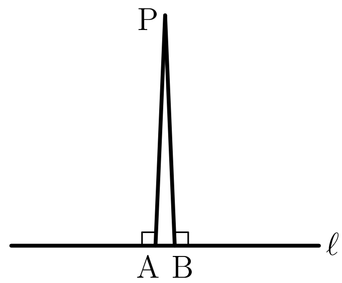
$\sqrt{2}$ が無理数ならば，$1+3\sqrt{2}$ は無理数である．

応用例題 2.1 三角形の内角の和は 180° である．このことを使って，次のことを証明せよ．

直線 ℓ 上にない点 P から直線 ℓ に引くことのできる垂線は，1 本だけである．

考え方 背理法を利用する．引くことのできる垂線が 2 本あると仮定して矛盾を導く．

[証明] 点 P から直線 ℓ に引くことのできる垂線が 2 本あると仮定し，ℓ との交点を A，B とすると



$$\angle\mathrm{PAB} = 90^\circ, \quad \angle\mathrm{PBA} = 90^\circ$$

となる．

よって，$\triangle\mathrm{PAB}$ において

$$\angle\mathrm{PAB} + \angle\mathrm{PBA} + \angle\mathrm{APB} > 180^\circ$$

となり，これは三角形の内角の和が 180° であることに矛盾する．
したがって，点 P から直線 ℓ に引くことのできる垂線は，1 本だけである．

[証終]

練習 2.13 平行でない異なる 2 直線は 1 点で交わる．
直線外の 1 点を通って，この直線に平行な直線は 1 本だけである．
これらのことを使って，次のことを証明せよ．
異なる 3 直線 ℓ，m，n について
$\ell // m$ かつ $m // n$　　ならば　　$\ell // n$

研究

$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

例題 2.2 では,「$\sqrt{2}$ は無理数である」ということを認めていた.
この事実を，背理法を利用して証明してみよう.
「$\sqrt{2}$ は無理数でない」すなわち

「$\sqrt{2}$ は有理数である」

と仮定すると，$\sqrt{2}$ は自然数 m，n を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad \cdots ①$$

とおくことができる．このとき，できる限り約分して，m と n に 1 以外の公約数がないような分数にする.　　$\longleftarrow$ このような分数を既約分数という.

①より　　$\sqrt{2}\,n = m$

この両辺を 2 乗すると

$$2n^2 = m^2 \qquad \cdots ②$$

よって，m^2 は偶数である.
73 ページの例題 2.1 により，m^2 が偶数ならば，mも偶数となる.
m が偶数ならば，ある自然数 k を用いて，$m = 2k$ と表されるから，② に代入して

$$2n^2 = 4k^2$$

すなわち　　$n^2 = 2k^2$

よって，n^2 は偶数となり，nも偶数となる.
m と n がともに偶数となることは，m と n に 1 以外の公約数がないことに矛盾する.
したがって，$\sqrt{2}$ は有理数ではなく，無理数である.　　**[証終]**

2.2 章末問題

2.2.1 章末問題 A

1 x は実数，n は自然数とする．次の命題の真偽を調べよ．

(1) $x^2 - x - 6 = 0 \implies x = -2$

(2) n^2 は 3 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数

2 m，n，k は自然数とする．次の命題の逆，対偶をそれぞれ述べ，それらの真偽を調べよ．

「積 mnk は偶数 $\Longrightarrow$ m，n，k の少なくとも 1 つは偶数」

3 次の $\boxed{}$ の中には,「必要条件である」「十分条件である」「必要十分条件である」のうち，それぞれどれが最も適するか.

ただし，a，b は実数とし，m，n は整数とする．

(1) 「△ABC が正三角形である」は「△ABC が二等辺三角形である」ための $\boxed{}$.

(2) 「$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$」は「$ab \neq 0$」であるための $\boxed{}$.

(3) 「積 mn が偶数である」は「m は偶数である」ための $\boxed{}$.

2.2.2 章末問題B

4 a，b は実数とする．次の命題が真であることを証明せよ．

$$a + b > 0 \quad \Longrightarrow \quad a > 0 \text{ または } b > 0$$

5 1から10までの10個の整数から異なる5個を取り，それらの積を a，残りの5個の積を b とする．このとき，$a \neq b$ であることを証明せよ．

【答】

1 (1) 偽　(2) 真　［(1) 反例は $x = 3$　(2) 対偶を利用する］

2 逆「m，n，k の少なくとも1つは偶数 $\Longrightarrow$ 積 mnk は偶数」は真
対偶「m，n，k のいずれも奇数 $\Longrightarrow$ 積 mnk は奇数」は真

3 (1) 十分条件である　(2) 必要十分条件である　(3) 必要条件である

4 ［対偶「$a \leqq 0$ かつ $b \leqq 0 \Longrightarrow a + b \leqq 0$」は，真である.］

5 ［$a = b$ であると仮定すると　$ab = a^2 = 1{\cdot}2{\cdot}3 \cdots 9{\cdot}10 = 2^8{\cdot}3^4{\cdot}5^2{\cdot}7$
$a > 0$ であるから　$a = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}\sqrt{7}$　これは，a が整数であることに矛盾する.］