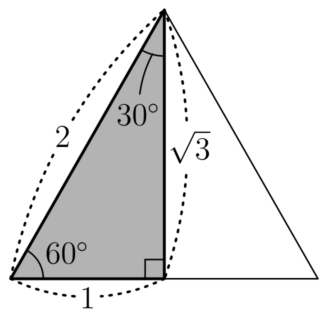
第 3 章　図形と計量

3.1　三角比

3.1.1　三角比

1 辺の長さが 2 の正三角形を半分に折ってできる直角三角形を考えると，3 辺の長さは，右の図のようになっている．
以下では，直角三角形の 2 辺の長さの関係に着目してみよう．



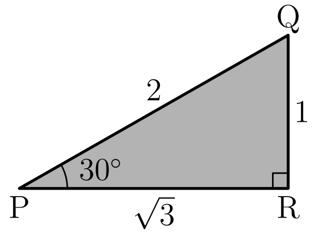
A 正弦・余弦・正接

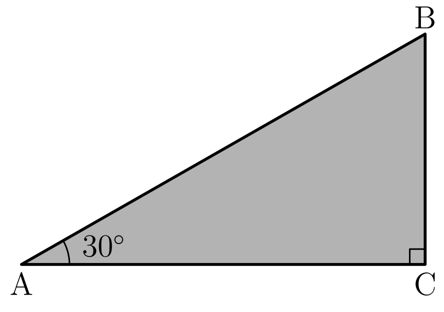
右の図の 2 つの直角三角形は，2 組の角がそれぞれ等しいので相似である．
直角三角形 ABC における

$$\frac{BC}{AB},\ \frac{AC}{AB},\ \frac{BC}{AC} \quad \cdots ①$$

の値は，それぞれ次のようになる．

$$\frac{BC}{AB} = \frac{QR}{PQ} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PR} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

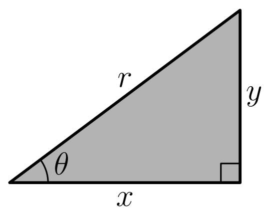




これから，次のことがわかる．

① の各値は，直角三角形 ABC の大きさに関係なく，いずれも一定になる．

右の図のように，直角三角形の鋭角の1つを $\boldsymbol{\theta}$（シータ）とし，斜辺の長さを r，他の辺の長さを x，y とするとき，



$$\frac{y}{r},\qquad \frac{x}{r},\qquad \frac{y}{x}$$

の各値は，三角形の大きさに関係なく，
いずれも角 θ の大きさだけで決まる．これらを，それぞれ θ の

正弦 (sine)，**余弦** (cosine)，**正接** (tangent)

といい，$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}$，$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$，$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta}$ と書く．

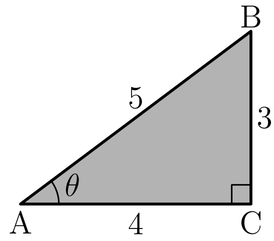
正弦を**サイン**，余弦を**コサイン**，正接を**タンジェント**ともいう．

正弦，余弦，正接をまとめて**三角比**という．

例 3.1　$\boldsymbol{\theta}$ の正弦，余弦，正接

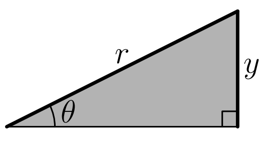
右の図の直角三角形 ABC では

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{3}{5}$$
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{4}{5}$$
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{4}$$

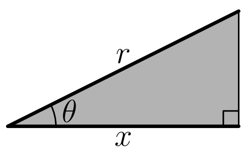


三角比の定義

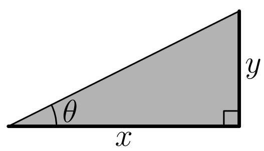
$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}}$



$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}}$



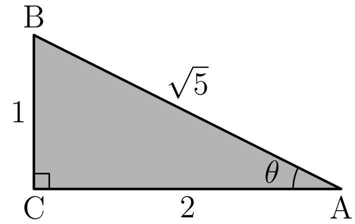
$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$



例 3.2　$\boldsymbol{\theta}$ の正弦，余弦，正接

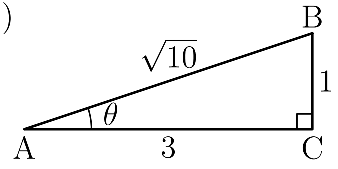
右の図の直角三角形 ABC では

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}$$

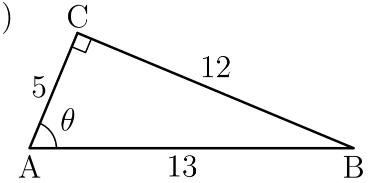


練習 3.1 下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ．

(1)



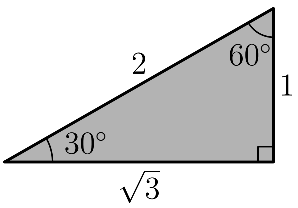
(2)

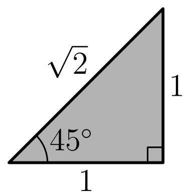


B 30°，45°，60° の三角比

30°，45°，60° の三角比は，下の図から求められる．

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$





練習 3.2 次の値を求めよ．

(1) $\cos 30^\circ$，$\tan 30^\circ$

(2) $\sin 45^\circ$，$\tan 45^\circ$

(3) $\sin 60^\circ$，$\cos 60^\circ$

C 三角比の表

三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値は，θ に対して決まっている．184 ページには，$1°$ ごとの角 θ について，それらの値を表にして載せた．

この表の値は，小数第5位を四捨五入して小数第4位まで示したものである．表の値を使うときは，たとえば

$$\sin 25° = 0.4226, \qquad \cos 28° = 0.8829$$
$$\tan 32° = 0.6249$$

のように三角比の値として使う．

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249

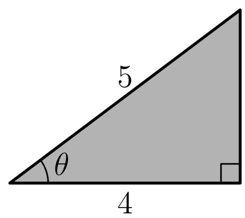
練習 3.3 次の値を三角比の表から求めよ．

(1) $\sin 12°$　　(2) $\cos 48°$　　(3) $\tan 75°$

例 3.3 右の図における θ のおよその大きさ

図より　$\cos\theta = \dfrac{4}{5} = 0.8$

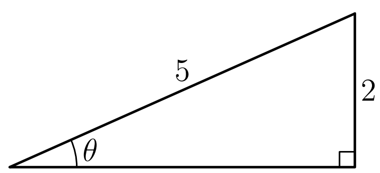
三角比の表から，$\cos\theta$ の値が 0.8 に近い θ を求めると　$\theta \fallingdotseq 37°$



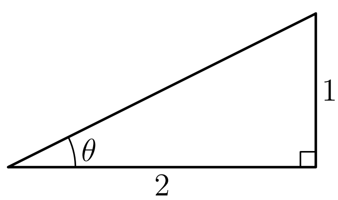
[注意] $a \fallingdotseq b$ は,「a と b がほぼ等しい」ということを意味する．

練習 3.4 下の図における θ のおよその大きさを求めよ．

(1)



(2)



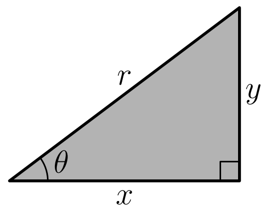
D 三角比の応用

右の図の直角三角形では，

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

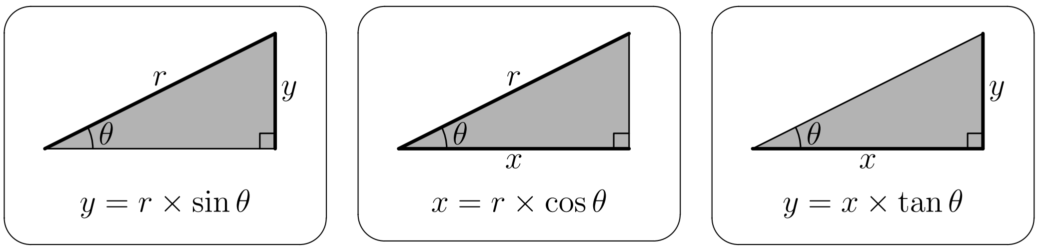
であるから，次が成り立つ．

$$y = r \times \sin\theta$$



同様にして，次が成り立つ．

$$x = r \times \cos\theta$$
$$y = x \times \tan\theta$$

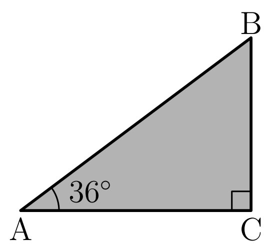


例 3.4 辺 BC の長さを表す式

右の図の直角三角形 ABC において，
辺 BC の長さを表す式は

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \sin 36^\circ$$
$$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} \times \tan 36^\circ$$

となる．



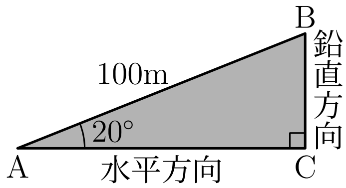
練習 3.5 例 3.4 の図の直角三角形 ABC において，辺 AC の長さを表す式は次のようになる． $\boxed{}$ に sin，cos，tan のいずれかを入れよ．

$$\mathrm{AC}{=}\mathrm{AB}\times\boxed{}36^\circ$$

$$\mathrm{AC}{=}\mathrm{BC}\times\boxed{}54^\circ \qquad \leftarrow \ \angle\mathrm{B} = 54^\circ$$

例題 3.1 傾斜角 20° の坂をまっすぐに 100m 登るとき，鉛直方向には何 m 登ったことになるか．1m 未満を四捨五入して求めよ．

【解】 右の図において



$$\begin{aligned} BC &= AB \times \sin 20^\circ \\ &= 100 \times 0.3420 \\ &= 34.2 \end{aligned}$$

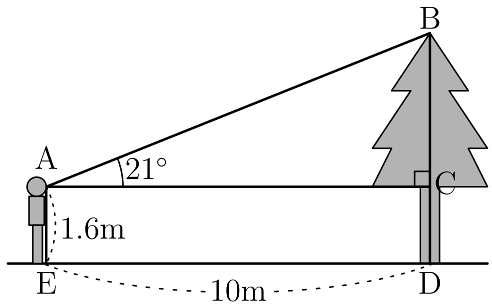
よって，鉛直方向に 34m 登ったことになる．

練習 3.6 例題 3.1 において，水平距離には何 m 進んだことになるか．1m 未満を四捨五入して求めよ．

応用例題 3.1 木の根もとから 10m 離れた地点に立って木の先端を見上げると，水平面とのなす角が 21° であった．目の高さを 1.6m として，木の高さを求めよ．ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ．

考え方 まず，目の位置より上にある部分の高さを求める．

【解】 右の図において



$$\begin{aligned} BC &= AC \times \tan 21^\circ \\ &= 10 \times 0.3839 \\ &= 3.839 \fallingdotseq 3.8 \end{aligned}$$

よって，木の高さ BD は

$$BD = 3.8 + 1.6 = 5.4$$

(答) 5.4m

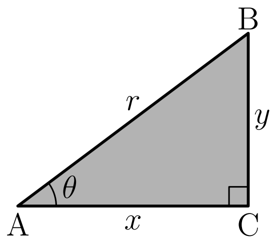
練習 3.7 鉄塔の先端の真下から 20m 離れた地点に立って鉄塔の先端を見上げると，水平面とのなす角が 40° であった．目の高さを 1.6m として，鉄塔の高さを求めよ．ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ．

3.1.2 三角比の相互関係

直角三角形では3辺の長さの関係として，三平方の定理が成り立つ．ここでは，三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の間に，どのような関係が成り立つかを調べてみよう．

A 三角比の相互関係

右の図の直角三角形ABCにおいて



$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

である．よって

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

となる．また，三平方の定理により

$$x^2 + y^2 = r^2$$

が成り立つことから

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \qquad \leftarrow \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

が得られる．また，この等式の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると

$$1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \qquad \leftarrow \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

となる．以上から，三角比の間に次の関係が成り立つ．

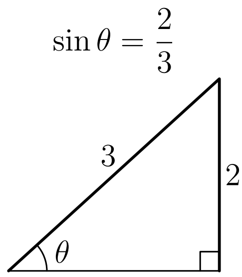
三角比の相互関係

1 $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ **3** $\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

2 $\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

[注意] $(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$，$(\tan\theta)^2$ を，それぞれ $\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\tan^2\theta$ と書く．

例題 3.2 $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．



【解】 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$\cos\theta > 0$ であるから

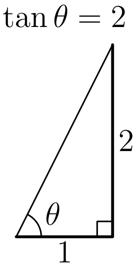
$$\cos\theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

また　$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

練習 3.8 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

例題 3.3 $\tan\theta = 2$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

【解】 $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から



$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$$

$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

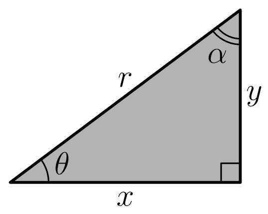
練習 3.9 $\tan\theta = \sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．ただし，θ は鋭角とする．

B $90^\circ - \theta$ の三角比

右の図において，次のことがいえる．

$$\sin\alpha = \frac{x}{r} = \cos\theta$$
$$\cos\alpha = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

また　$$\tan\alpha \times \tan\theta = \frac{x}{y} \times \frac{y}{x} = 1$$



$\alpha = 90^\circ - \theta$ であるから，鋭角 θ について，次の関係が成り立つ．

$90^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

例 3.5

(1) $53^\circ = 90^\circ - 37^\circ$ であるから

$$\sin 53^\circ = \cos 37^\circ \qquad \leftarrow \ 53^\circ + 37^\circ = 90^\circ$$

(2) $80^\circ = 90^\circ - 10^\circ$ であるから

$$\cos 80^\circ = \sin 10^\circ \qquad \leftarrow \ 80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$$

(3) $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$ であるから

$$\tan 75^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} \qquad \leftarrow \ 75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$$

練習 3.10 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ．

(1) $\sin 64^\circ$　(2) $\cos 78^\circ$　(3) $\tan 83^\circ$

練習 3.11 次の □ に適する角度を入れよ．

(1) $\sin 62^\circ = \cos(90^\circ - \square)$　(2) $\cos 78^\circ = \sin(90^\circ - \square)$

3.1.3　三角比の拡張

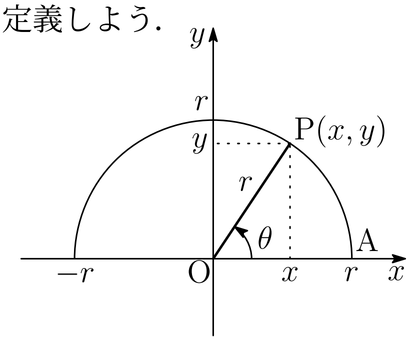
これまでは，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲にある θ についての三角比を扱ってきたが，ここでは θ の範囲を $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ に広げて三角比を定義しよう．

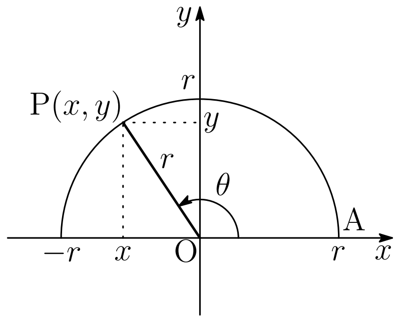
A 座標を用いた三角比の定義

右の図のように，座標平面上において原点 O を中心とする半径 r の半円をかき，この半円と x 軸の正の部分との交点を A とする．

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある θ に対して，$\angle \mathrm{AOP} = \theta$ となる点 P をこの半円上にとり，点 P の座標を (x, y) とする．

このとき，θ の三角比を次の式で定義する．$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のときは，126 ページの定義と同じになる．





$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

0°，90°，180° の三角比は，次のようになる．

$\boldsymbol{\theta}$	**P の座標**	**正弦**	**余弦**	**正接**
0°	$(r, 0)$	$\sin 0^\circ = 0$	$\cos 0^\circ = 1$	$\tan 0^\circ = 0$
90°	$(0, r)$	$\sin 90^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$	なし
180°	$(-r, 0)$	$\sin 180^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$	$\tan 180^\circ = 0$

[注意] $\theta = 90^\circ$ のときは，$x = 0$ であるから，$\tan\theta$ は定義されない．

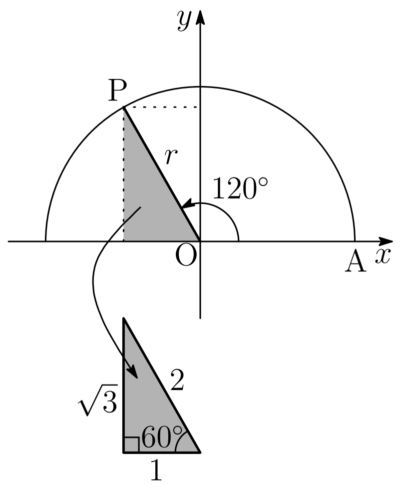
例 3.6　120° の正弦，余弦，正接

右の図で，$\angle \mathrm{AOP} = 120^\circ$ とする．
半円の半径を $r = 2$ にとると，
点 P の座標は $(-1, \sqrt{3})$ である．
そこで $x = -1$，$y = \sqrt{3}$ として

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

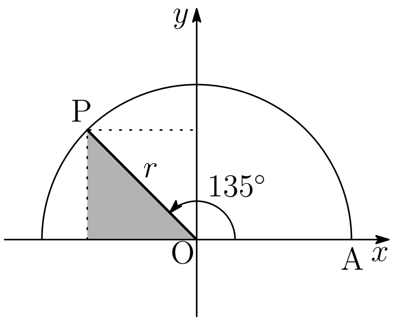


練習 3.12 次の角の正弦，余弦，正接の値を，下の図などを用いて求めよ．

(1) 135°

$r = \boxed{\quad}$ にとると，

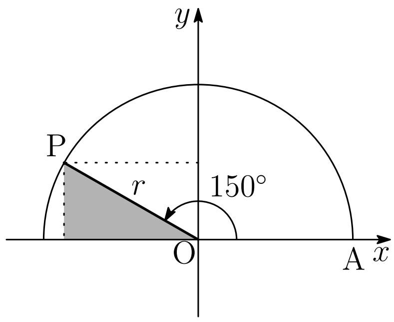
点 P の座標は $\boxed{\qquad\qquad}$



(2) 150°

$r = \boxed{\quad}$ にとると，

点 P の座標は $\boxed{\qquad\qquad}$



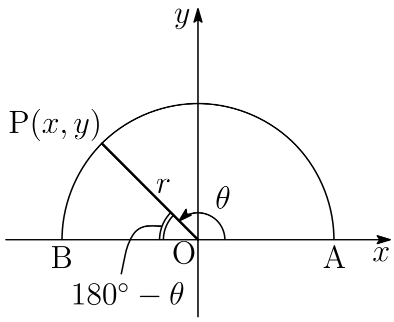
三角比の符号については，次のようになる．

θ	0°	**鋭角**	90°	**鈍角**	180°
$\sin\theta$	0	$+$	1	$+$	0
$\cos\theta$	1	$+$	0	$-$	-1
$\tan\theta$	0	$+$		$-$	0

θ が鋭角のとき
$0^\circ < \theta < 90^\circ$

θ が鈍角のとき
$90^\circ < \theta < 180^\circ$

B 180° − θ の三角比



右の図のように，半径 r の半円上に $\angle\mathrm{AOP}=\theta$ となる点 $\mathrm{P}(x,y)$ をとると，$\angle\mathrm{BOP}=180^\circ-\theta$ である．

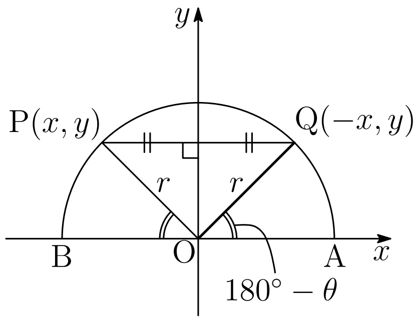
y 軸について点 P と対称な点 Q をとると，Q の座標は $(-x,y)$ である．

このとき，$180^\circ-\theta$ の三角比は，次のようになる．

$$\sin(180^\circ-\theta)=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\frac{-x}{r}=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{y}{-x}=-\tan\theta$$



一般に，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の関係が成り立つ．

180° − θ の三角比

$$\boldsymbol{\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta}$$

$$\boldsymbol{\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta}$$

$$\boldsymbol{\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta}$$

$\bigcirc+\square=180^\circ$

$\sin\bigcirc=\sin\square$
$\cos\bigcirc=-\cos\square$
$\tan\bigcirc=-\tan\square$

上の関係を使うと，鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができる．

例 3.7

(1) $\sin 120^\circ=\sin 60^\circ$　　$\leftarrow$ $120^\circ+60^\circ=180^\circ$

(2) $\cos 135^\circ=-\cos 45^\circ$　　$135^\circ+45^\circ=180^\circ$

(3) $\tan 150^\circ=-\tan 30^\circ$　　$150^\circ+30^\circ=180^\circ$

練習 3.13 次の値を，三角比の表を用いて求めよ．

(1) $\sin 140^\circ$　　(2) $\cos 156^\circ$　　(3) $\tan 100^\circ$

C 三角比が与えられたときの θ

ある角 θ の三角比が与えられたとき，その θ を求めてみよう．

例 3.8

(1) **$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ**

半径 2 の半円上で，y 座標が 1 である点は 2 つある．

求める θ は，下の図 (1) で $\angle$AOP と $\angle$AOQ である．

よって　　$\theta = 30^\circ,\ 150^\circ$　　　　$\leftarrow\ 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$

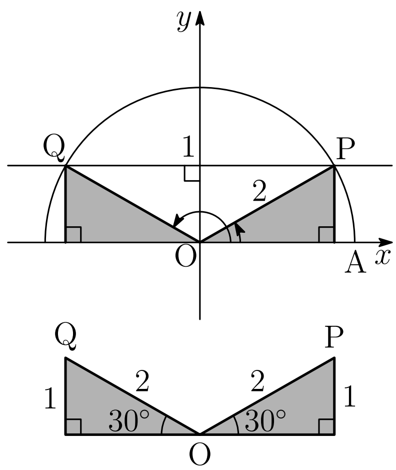
(2) **$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ**

半径 $\sqrt{2}$ の半円上で，x 座標が -1 である点は 1 つある．

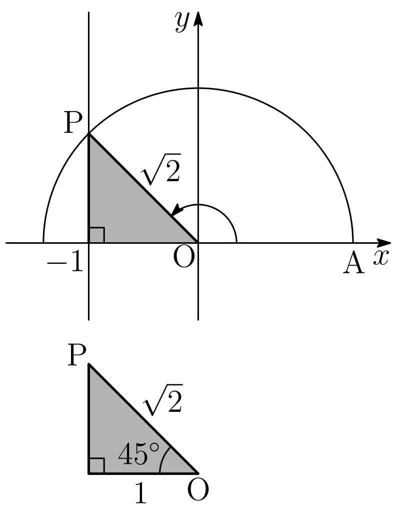
求める θ は，下の図 (2) で $\angle$AOP である．

よって　　$\theta = 135^\circ$　　　　$\leftarrow\ 135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$

(1)



(2)



練習 3.14 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のような θ を求めよ．

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

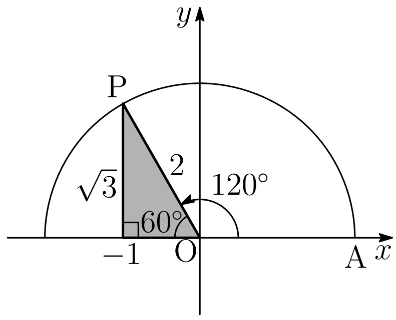
例 3.9 $\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ}$ **のとき，**$\boldsymbol{\tan\theta = -\sqrt{3}}$ **を満たす** $\boldsymbol{\theta}$

$-\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{-1}$ であるから，

求める θ は右の図で $\angle\mathrm{AOP}$

である．

よって　　$\theta = 120^\circ$



練習 3.15 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次のような θ を求めよ．

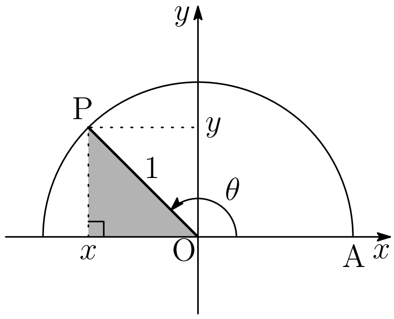
(1) $\tan\theta = 1$

(2) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

D 三角比の相互関係

右の図のような半径 1 の半円上に，$\angle \mathrm{AOP} = \theta$ となる点 $\mathrm{P}(x, y)$ をとる．

135 ページの三角比の定義で，$r = 1$ とすると，x，y は次のようになる．



$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

また，三平方の定理を用いると，

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

がいつでも成り立つことがいえる．

したがって，131 ページで導いた三角比の相互関係は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある角 θ についても，そのまま成り立つ．

三角比の相互関係

1 $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　**3** $\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

2 $\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

例題 3.4 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

【解】 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times (-3) = -2\sqrt{2}$$

練習 3.16 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき，各場合について他の 2 つの値を求めよ．

(1) $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$

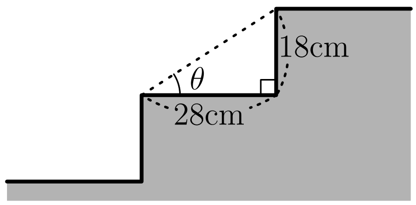
(2) $\tan\theta = -2$

■ 代表的な角の三角比のまとめ

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

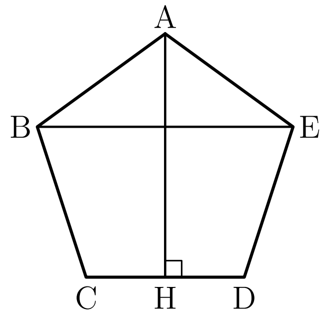
3.1.4 補充問題

1 右の図は，ある学校の階段の一部を図にしたものである．この階段の傾斜角 θ は，およそ何度か．



2 1 辺の長さが 10 の正五角形 ABCDE において，次の線分の長さを，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

(1) 対角線 BE



(2) 頂点 A から辺 CD に下ろした垂線 AH

3 $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき，次の各場合について，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(1) $0° < \theta < 90°$

(2) $90° < \theta < 180°$

【答】

1 およそ $33°$

2 (1) 16.2　(2) 15.4

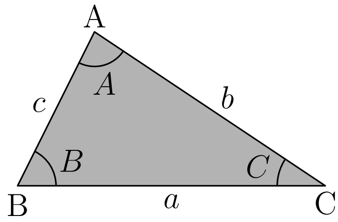
3 (1) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$　(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

3.2 正弦定理と余弦定理

3.2.1 正弦定理

以下では，△ABC における辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c で表す．また，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C で表す．

△ABC において，3 辺の長さ a，b，c と 3 つの角の正弦 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ の間に成り立つ関係を調べてみよう．



A 三角形の外接円と正弦

三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円**という．

△ABC の外接円の半径を R とする．

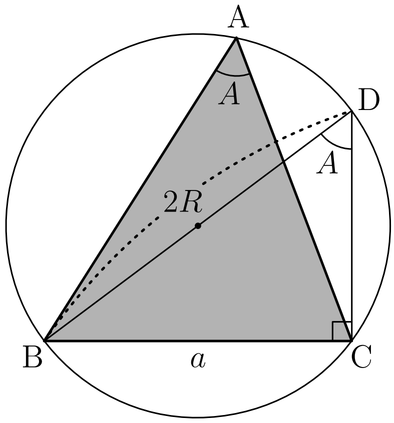
$0° < A < 90°$ のとき，右の図で，線分 BD は △ABC の直径とする．

このとき，円周角と中心角の性質[1]により，

$$\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{BAC} = A$$
$$\angle \mathrm{BCD} = 90°$$

が成り立つ．また，BD $= 2R$ であるから，

$$\sin A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} = \frac{a}{2R}$$



が成り立つ．$A = 90°$ と $90° < A < 180°$ のときは，次ページで調べる．

[1] 1 つの弧に対する円周角の大きさは一定で，中心角の大きさの半分である．
とくに，半円周に対する円周角の大きさは 90° である．

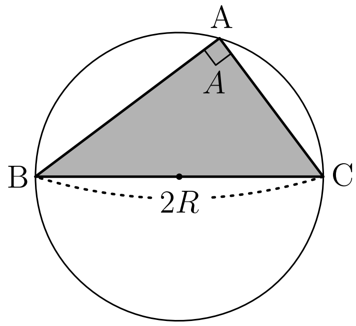
■ 次の $\boxed{}$ の中に適する文字や数値を入れ，説明を完成させよう．

$A = 90^\circ$ のとき

辺 BC は，△ABC の外接円の直径になる．外接円の半径は R であるから，$a = \boxed{}$ である．
一方，$\sin 90^\circ = \boxed{}$ であるから，

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

が成り立つ．



$90^\circ < A < 180^\circ$ のとき

△ABC の外接円の周上に，∠BDC が鋭角となるように，点 D をとる．
$\angle \mathrm{BDC} = D$ とすると，$0^\circ < D < 90^\circ$ であるから，△BDC においては，

$$\sin D = \frac{\boxed{}}{2R} \qquad \cdots ①$$

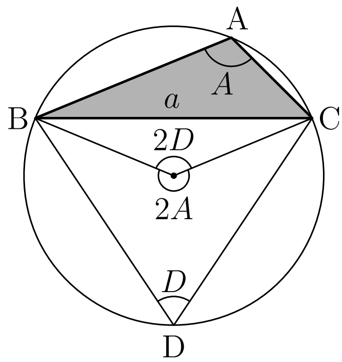
が成り立つ．
一方，円周角と中心角の性質により

$$2A+2D = \boxed{}^\circ \qquad \text{すなわち} \qquad A+D = 180^\circ$$

が成り立つ[2]から

$$\sin D = \sin\left(\boxed{}^\circ - A\right) = \sin A$$

したがって，① により，$\sin A = \dfrac{a}{2R}$ が成り立つ．



---

[2] 四角形が円に内接するとき，向かい合う角の和は 180° になる．

B 正弦定理

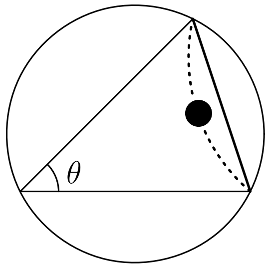
一般に，△ABC の外接円の半径を R とすると，$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ が成り立つ．

同様に，

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が成り立つ．

したがって，次の**正弦定理**が得られる．



$$\frac{\bullet}{\sin\theta} = 2R$$

正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

[注意] 上の関係式を比の形で書くと，$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$ となる．この比の関係を，$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ と書くことがある．

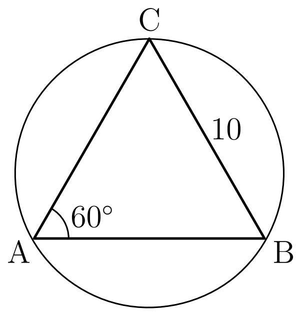
例 3.10 正三角形の外接円の半径

1 辺の長さが 10 の正三角形の外接円の半径を R とする．

正弦定理により

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = 2R$$

が成り立つから



$$R = \frac{10}{2\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}} \qquad \leftarrow \ \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5.77\cdots$$

練習 3.17 次のような $\triangle$ABC において，外接円の半径 R を求めよ．

(1) $a=5$，$A=45^\circ$　　(2) $b=\sqrt{3}$，$B=120^\circ$

練習 3.18 $c=10$ である $\triangle$ABC において，外接円の半径が $R=10$ のとき，角 C を求めよ．

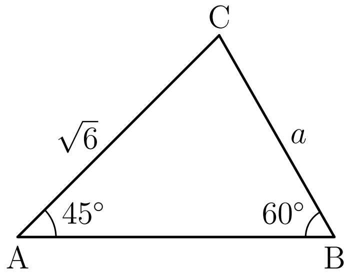
正弦定理によると，次が成り立つ．

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

三角形の 1 辺の長さと 2 角の大きさがわかっている場合には，これらを用いて，他の辺の長さを求めることができる．

例題 3.5 $\triangle$ABC において，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$，$b=\sqrt{6}$ であるとき，辺 BC の長さ a を求めよ．

【解】 正弦定理により



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

よって

$$a\sin 60^\circ=\sqrt{6}\sin 45^\circ$$

$$a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \leftarrow\ \sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$$

したがって　$a=2$

練習 3.19 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $a = \sqrt{2}$，$A = 30^\circ$，$B = 45^\circ$ のとき，辺 CA の長さ b

(2) $b = 4$，$B = 45^\circ$，$C = 60^\circ$ のとき，辺 AB の長さ c

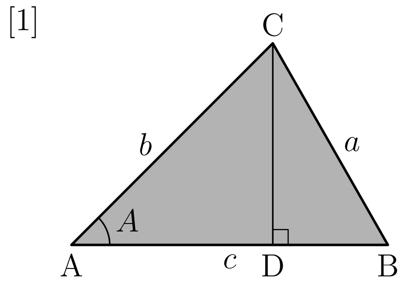
(3) $c = 3$，$A = 120^\circ$，$C = 30^\circ$ のとき，辺 BC の長さ a

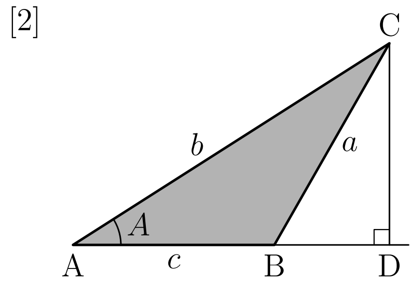
3.2.2　余弦定理

直角三角形においては，3 辺の長さについて三平方の定理が成り立つ．
ここでは，一般の三角形の 3 辺の長さの間に成り立つ関係を調べよう．

A 余弦定理

△ABC の頂点 C から辺 AB またはその延長に垂線 CD を下ろす．





上の図 [1]，[2] では，いずれの場合にも次が成り立つ．

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2$,　　← 三平方の定理

$\mathrm{CD}^2 = (b\sin A)^2$，$\mathrm{BD}^2 = (c - b\cos A)^2$　　← 図 [2] では $\mathrm{BD} = b\cos A - c$

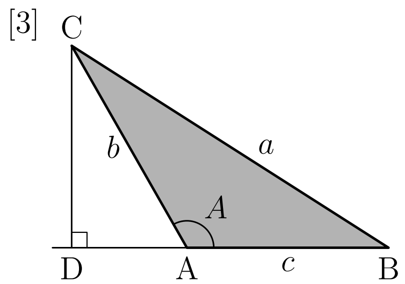
よって，BC^2 すなわち a^2 は次のように表される．

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \qquad \leftarrow \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

練習 3.20 右の図 [3] の場合にも

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2, \\ \mathrm{CD}^2 &= (b\sin A)^2, \\ \mathrm{BD}^2 &= (c - b\cos A)^2 \end{aligned}$$

が成り立つことを確かめよ．

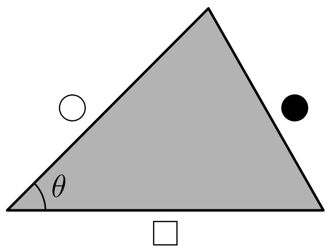


前ページで調べたことから，次の**余弦定理**が得られる．

余弦定理

△ABC において，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$



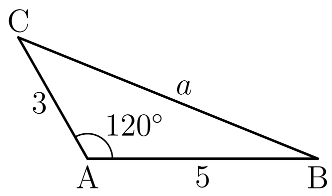
$$●^2 = ○^2 + □^2 - 2\,○□\cos\theta$$

三角形の 2 辺の長さとその間の角の大きさがわかっている場合には，余弦定理を用いて，残りの辺の長さを求めることができる．

例題 3.6　△ABC において，$b = 3$，$c = 5$，$A = 120°$ であるとき，辺 BC の長さ a を求めよ．

【解】 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cos 120° \\ &= 9 + 25 - 2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49 \end{aligned}$$



$a > 0$ であるから　　$a = 7$

練習 3.21 次のような $\triangle$ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $b = 4$，$c = 5$，$A = 60^\circ$ のとき，辺 BC の長さ a

(2) $a = 3$，$c = 2\sqrt{2}$，$B = 45^\circ$ のとき，辺 CA の長さ b

(3) $a = 2$，$b = \sqrt{3}$，$C = 150^\circ$ のとき，辺 AB の長さ c

B 三角形の角の余弦を表す式

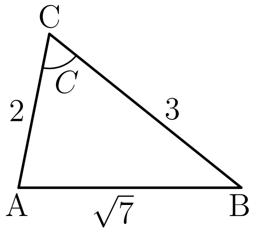
余弦定理によると，△ABC において，次が成り立つ．

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

△ABC において 3 辺の長さがわかっている場合には，上の式を用いることにより，3 つの角の大きさを求めることができる．

例題 3.7 △ABC において，$a = 3$，$b = 2$，$c = \sqrt{7}$ のとき，$\cos C$ の値と角 C を求めよ．

【解】 余弦定理により



$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{3^2 + 2^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}{2\cdot3\cdot2} \\ &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

また，$\cos C = \dfrac{1}{2}$ を満たす C は　　$C = 60^\circ$

練習 3.22 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ．

(1) $a = 7$，$b = 3$，$c = 8$ のとき，$\cos A$ の値と角 A

(2) $a=1$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{2}$ のとき，$\cos B$ の値と角 B

練習 3.23 $\triangle$ABC の 3 辺の長さが次のようなとき，$\cos A$ の符号から角 A が鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ．

(1) $a=9$，$b=4\sqrt{2}$，$c=7$

(2) $a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$

(3) $a=2\sqrt{10}$，$b=4$，$c=4$

3.2.3　正弦定理・余弦定理の応用

正弦定理と余弦定理は，三角形の形状を調べたり，土地の測量や空間図形における線分や角の計量などにも活用できる便利な定理である．

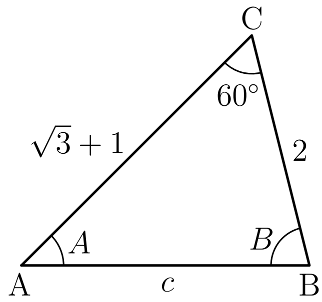
A 三角形の辺と角

三角形の辺や角についての条件が与えられたとき，その条件を満たす三角形の形状を調べよう．

応用例題 3.2 △ABC において，$a = 2$，$b = \sqrt{3} + 1$，$C = 60^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

考え方　余弦定理により c が，さらに正弦定理により A が求められる．B は $B = 180^\circ - (A + C)$ から．

【解】 余弦定理により



$$
\begin{aligned}
c^2 &= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2\cdot 2(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ \\
&= 4 + (3 + 2\sqrt{3} + 1) - 4(\sqrt{3}+1) \times \frac{1}{2} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

$c > 0$ であるから　　$c = \sqrt{6}$

正弦定理により　　$\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$

よって　　$\sin A = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

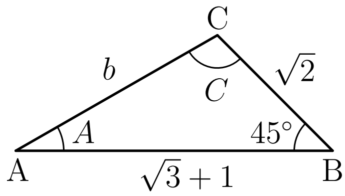
$A + B = 120^\circ$ より，$A < 120^\circ$ であるから

$$A = 45^\circ \qquad \leftarrow A = 135^\circ \text{ は不適}$$

したがって　　$B = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

(答) $c = \sqrt{6}$，$A = 45^\circ$，$B = 75^\circ$

練習 3.24 $\triangle$ABC において，$a = \sqrt{2}$，$c = \sqrt{3} + 1$，$B = 45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．



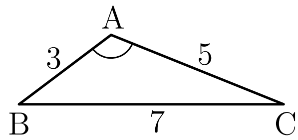
応用例題 3.3 $\triangle$ABC において次が成り立つとき，角 A を求めよ．

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

考え方　146 ページの注意を参照．角 A は，3 辺の長さ a，b，c の比がわかれば，余弦定理から求められる．

【解】 正弦定理により　$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$
が成り立つから　$a : b : c = 7 : 5 : 3$
となる．$a = 7$，$b = 5$，$c = 3$ としても A は同じであるから

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2\cdot 5\cdot 3}\\ &= \frac{-15}{30}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$



よって　$A = 120°$　**[終]**

[注意] $a : b : c = 7 : 5 : 3$ である $\triangle$ABC はどれも相似であり，対応する角の大きさは等しい．そこで，$a = 7$，$b = 5$，$c = 3$ の場合で求めている．

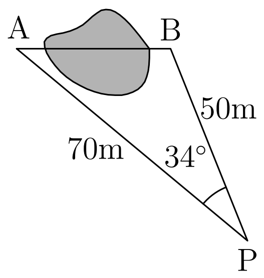
練習 3.25 $\triangle$ABC において次が成り立つとき，角 B を求めよ．

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 3$$

B 測量

建物や山の高さなどに限らず，平地でも 2 地点間の距離が直接は測れない場合がある．このような場合には，直接測れる距離や角度を使って，正弦定理や余弦定理などから求めるのも 1 つの方法である．

応用例題 3.4 右の図のように，池をはさんで 2 地点 A，B がある．地点 P から A と B を見て $\angle\mathrm{APB}$ を測ると 34° で，また A，P 間の距離は 70m，B，P 間の距離は 50m であった．
A，B 間の距離を求めよ．



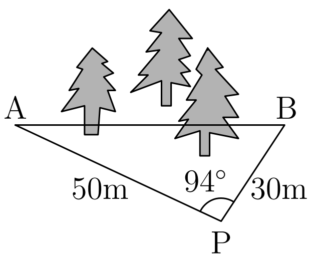
考え方　余弦定理を使う．なお，三角比の表から，
$\cos 34^\circ = 0.8290$ である．

【解】 $\triangle\mathrm{APB}$ において，余弦定理を使うと

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 - 2 \times \mathrm{AP} \times \mathrm{BP} \times \cos 34^\circ \\ &= 70^2 + 50^2 - 2 \times 70 \times 50 \times 0.8290 \\ &= 4900 + 2500 - 5803 \\ &= 1597\end{aligned}$$

$\mathrm{AB} > 0$ であるから　　$\mathrm{AB} = \sqrt{1597} \fallingdotseq 40$　　(答) 約 40m

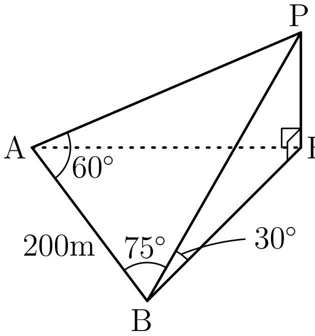
練習 3.26 右の図のように，林をはさんで 2 地点 A，B がある．地点 P から A と B を見て $\angle\mathrm{APB}$ を測ると 94° で，また A，P 間の距離は 50m，B，P 間の距離は 30m であった．A，B 間の距離を求めよ．



応用例題 3.5 山の高さを求めるため，200m 離れた山のふもとの 2 地点 A と B から，山の頂上 P を見ると

$$\angle \mathrm{PAB} = 60^\circ, \quad \angle \mathrm{PBA} = 75^\circ$$

であった．また，B から P を見上げた角度は 30° であった．図において，山の高さ PH を求めよ．



考え方 図で，$\mathrm{PH} = \mathrm{BP}\sin 30^\circ$ である．そこで，△ABP に正弦定理を使って，まず BP の長さを求める．

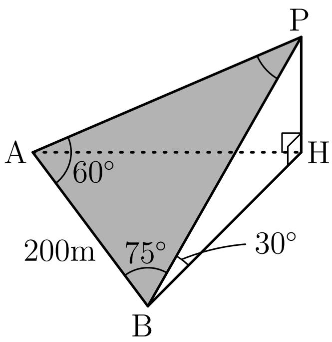
【解】

$$\angle \mathrm{APB} = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

△ABP に正弦定理を使うと $\dfrac{\mathrm{BP}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{200}{\sin 45^\circ}$

よって $\mathrm{BP} = 200 \times \sin 60^\circ \times \dfrac{1}{\sin 45^\circ}$

$$= 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = 100\sqrt{6}$$



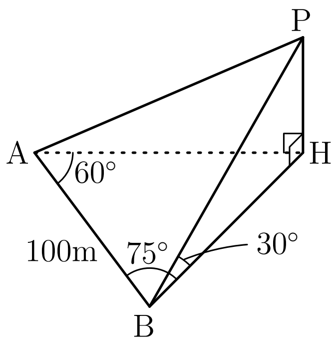
求める山の高さは $\mathrm{PH} = \mathrm{BP}\sin 30^\circ = 100\sqrt{6} \times \dfrac{1}{2} = 50\sqrt{6}$ (答) $50\sqrt{6}$ m

[注意] $50\sqrt{6} = 122.47\cdots$ となり，山の高さは約 122.5m である．

練習 3.27 100m 離れた 2 地点 A と B から，気球 P の真下の地点 H を見たとき，

$$\angle \mathrm{HAB} = 60^\circ, \quad \angle \mathrm{HBA} = 75^\circ$$

であった．また，B から P を見上げた角度は 30° であった．図において，気球 P の H からの高さ PH を求めよ．

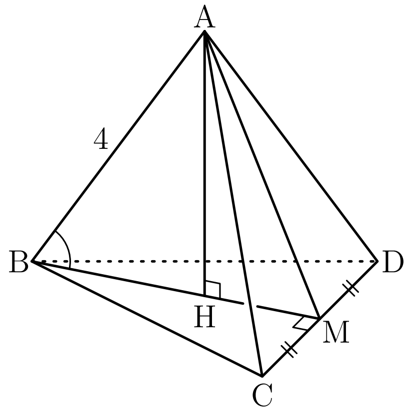


C 空間図形への応用

応用例題 3.6 1 辺の長さが 4 の正四面体 ABCD において，辺 CD の中点を M とし，頂点 A から線分 BM に下ろした垂線を AH とする．このとき，次のものを求めよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{ABM}$ の値

(2) 垂線 AH の長さ

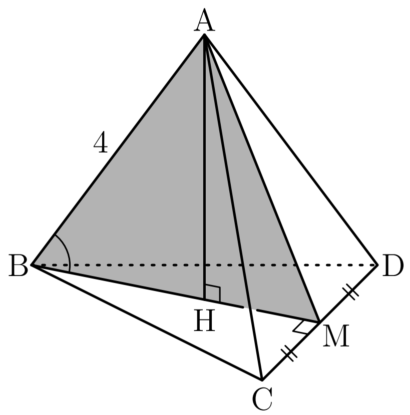


考え方 (1) $\triangle\mathrm{ABM}$ において，3 辺の長さから求める．
$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=4$ で，$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\mathrm{BC}\sin 60^\circ$ である．

【解】

(1) $\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\mathrm{BC}\sin 60^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$
よって，$\triangle\mathrm{ABM}$ において

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{ABM}&=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}^2-\mathrm{AM}^2}{2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BM}}\\&=\frac{4^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2\times4\times2\sqrt{3}}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$



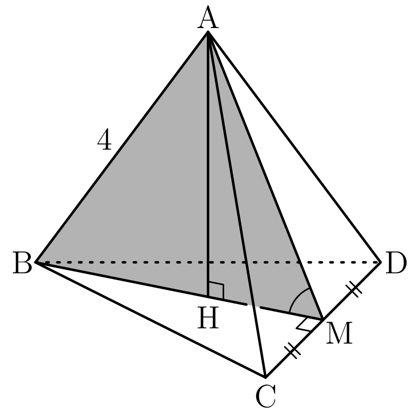
(2) $\sin\angle\mathrm{ABM}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって　$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABM}=4\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

[注意] 上で求めた垂線 AH の長さは，正四面体 ABCD において $\triangle\mathrm{BCD}$ を底面としたときの高さになっている．

練習 3.28 応用例題 3.6 において，次のものを求めよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{AMB}$ の値



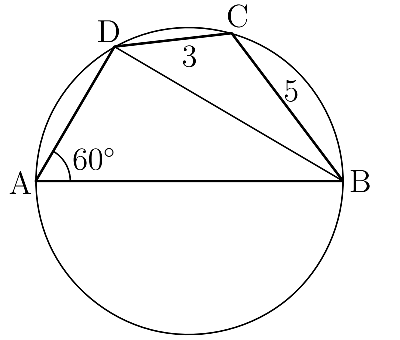
(2) 線分 MH の長さ

3.2.4　補充問題

4 円に内接する四角形 ABCD において，

$$\angle\mathrm{A} = 60^\circ,\ \mathrm{BC} = 5,\ \mathrm{CD} = 3$$

のとき，次のものを求めよ．



(1) 線分 BD の長さ

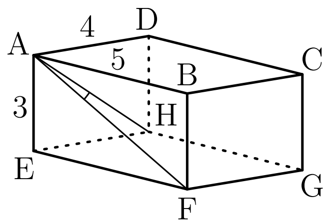
(2) 円の半径

5 △ABC において，$a : b = 7 : 3$，$A = 60^\circ$ であるとき，$\sin B$ の値を求めよ．

6 右の図のように，

$$\mathrm{AB} = 5,\ \mathrm{AD} = 4,\ \mathrm{AE} = 3$$

である直方体 ABCD-EFGH がある．
$\cos\angle\mathrm{HAF}$ の値を求めよ．



【答】

4 (1) 7　(2) $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

5 $\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

6 $\dfrac{9\sqrt{34}}{170}$　$\left[\dfrac{9}{5\sqrt{34}}\right]$

3.3 図形の計量

3.3.1 三角形の面積

三角形の面積を求めるには，次の計算式を使えばよかった．

三角形の面積 $=$ 底辺 $\times$ 高さ $\div 2$

ここでは，この計算式を，三角比を使って表してみよう．

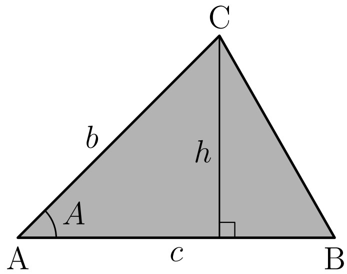
A 正弦と三角形の面積

△ABC において，辺 AB を底辺とするときの高さを h とすると，

$$h = b\sin A$$

である．よって，△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times c \times b\sin A$$

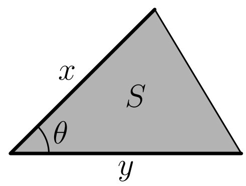


一般に，三角形の面積について，次のことが成り立つ．

三角形の面積

2 辺の長さが x，y で，その間の角の大きさが θ である三角形の面積 S は

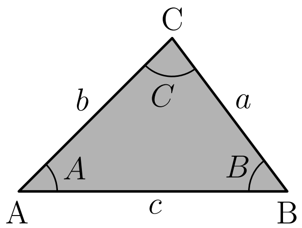
$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}xy\sin\theta}$$



△ABC の面積 S は，次の式で表される．

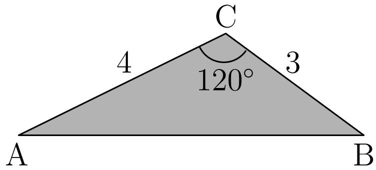
$$S = \frac{1}{2}bc\sin A,\quad S = \frac{1}{2}ca\sin B,$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$



例 3.11 $a = 3$，$b = 4$，$C = 120^\circ$ である △ABC の面積 S

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$



練習 3.29 次のような $\triangle$ABC の面積 S を求めよ．

(1) $b=10$，$c=8$，$A=45^\circ$　　(2) $a=6$，$c=5$，$B=150^\circ$

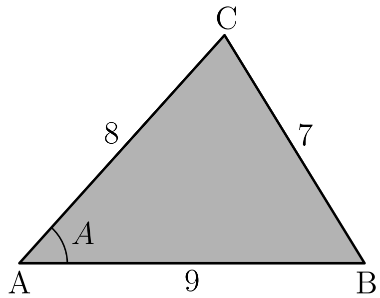
(3) 1 辺の長さが 4 である正三角形 ABC

B 三角形の 3 辺の長さと面積

例題 3.8 $\triangle$ABC において，3 辺の長さが $a=7$，$b=8$，$c=9$ であるとき，次のものを求めよ．

(1) $\cos A$ の値　　(2) $\sin A$ の値　　(3) 面積 S

【解】



(1) 余弦定理から

$$\cos A=\frac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 9}=\frac{96}{2\cdot 8\cdot 9}=\frac{2}{3}$$

(2) $\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(3) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}$
$$=12\sqrt{5}$$

練習 3.30 3辺の長さが次のような △ABC の面積 S を求めよ．

(1) $a=5$，$b=7$，$c=8$

(2) $a=13$，$b=14$，$c=15$

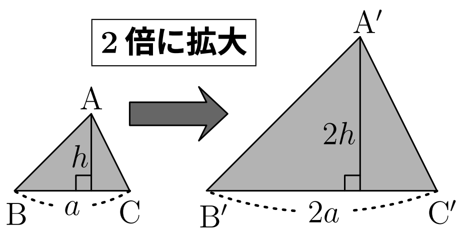
3.3.2　相似な図形の面積の比・体積の比

実物を拡大または縮小して作った複写物や実物の模型などは，大きさは違っても実物と同じ形をしている．
ここでは，図形を拡大または縮小すると，面積や体積がどう変化するかを調べよう．

A 相似な平面図形の面積の比

まず，相似[3]な2つの平面図形について，面積の比を調べてみよう．

例 3.12 相似な2つの三角形の面積の比
△A′B′C′ と △ABC は相似で，相似比は $2:1$ であるとする．△ABC の底辺 BC の長さを a，高さを h とすると，△A′B′C′ の底辺 B′C′ の長さは $2a$，高さは $2h$ である．



△ABC の面積を S，△A′B′C′ の面積を S' とすると

$$S=\frac{1}{2}ah,\qquad S'=\frac{1}{2}\times 2a\times 2h=2^2\times\frac{1}{2}ah$$

よって　$S':S=2^2:1$

[3]相似な2つの平面図形で，対応する線分の長さの比を相似比という．

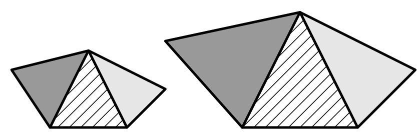
練習 3.31 $\triangle A'B'C'$ と $\triangle ABC$ の相似比が $3:1$ のとき，$\triangle A'B'C'$ の面積 S' と $\triangle ABC$ の面積 S の比 $S':S$ を求めよ．

相似な 2 つの三角形について，一般に次のことがいえる．

相似比が $k:1$ のとき，面積の比は $k^2:1$ である． $(*)$

相似な多角形については，三角形に分割して，それぞれに対応する三角形の面積の比を考えてみる．

すると，上に示した $(*)$ は，相似な 2 つの多角形についてもいえることがわかる．



相対比が $k:1$ ならば，どの三角形についても面積の比は $k^2:1$ である．

三角形や多角形に限らず，相似な図形について，次のことが成り立つ．

相似な図形の面積の比

1　相似比が $k:1$ である図形の面積の比は，$k^2:1$ である．

2　相似比が $m:n$ である図形の面積の比は，$m^2:n^2$ である．

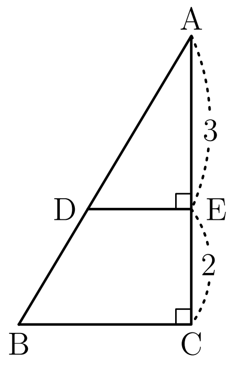
例 3.13 相似な三角形の面積の比

右の図で，$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ は相似である．相似比は

$$AC:AE=5:3$$

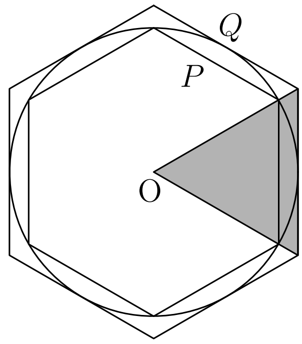
であるから，$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ の面積の比は

$$\triangle ABC:\triangle ADE=5^2:3^2=25:9$$



[注意] $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ の面積の比を，$\triangle ABC:\triangle ADE$ と書く．

例題 3.9 点Oを中心とする半径2の円に内接する正六角形 P と外接する正六角形 Q がある．



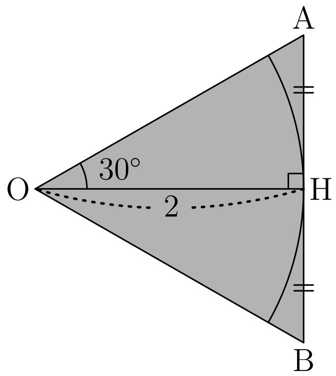
(1) Q の1辺の長さを求めよ．

(2) P と Q の相似比を求めよ．

(3) P と Q の面積の比を求めよ．

【解】

(1) 右の図において



$$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AH}$$

また　$\mathrm{AH} = \mathrm{OH}\tan 30^\circ$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

よって，正六角形の Q の1辺の長さは

$$\mathrm{AB} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

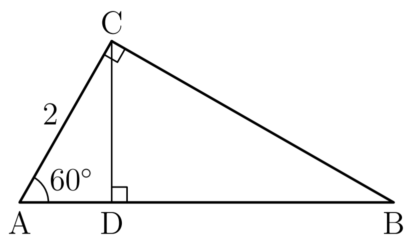
(2) 正六角形 P の1辺の長さは，円の半径と同じ2である．P と Q の相似比は1辺の長さの比であるから

$$2 : \frac{4}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 2$$

(3) P と Q の面積の比は

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 : 2^2 = 3 : 4$$

練習 3.32 右の図において，△ABCはABを斜辺とする直角三角形である．頂点Cから斜辺ABに垂線CDを下ろすとき，次の面積の比を求めよ．



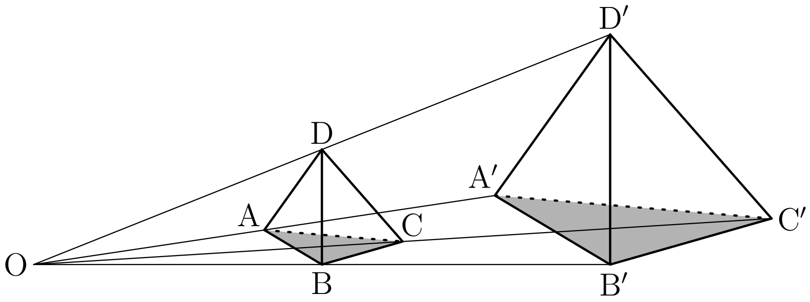
(1) △ADC : △CDB

(2) △ADC : △ACB

B 立体の相似

立体の相似についても，拡大や縮小を考えてみよう．

1つの立体を一定の比率で拡大または縮小して得られる立体は，もとの立体と**相似**であるという．



← 左の図で

OA : OA′

OB : OB′

OC : OC′

OD : OD′

がすべて等しい

相似な立体では，次のことがいえる．

相似な立体の性質

1 相似な立体においては，対応する線分の長さの比は，すべて等しい．

2 相似な立体においては，対応する角の大きさは，すべて等しい．

相似な立体で，対応する線分の長さの比を**相似比**という[4]．

練習 3.33 次の各組の立体のうち，つねに相似であるものはどれか．

(1) 2つの直方体　　(2) 2つの立方体

(3) 2つの正四面体　　(4) 2つの正四角錐（すい）

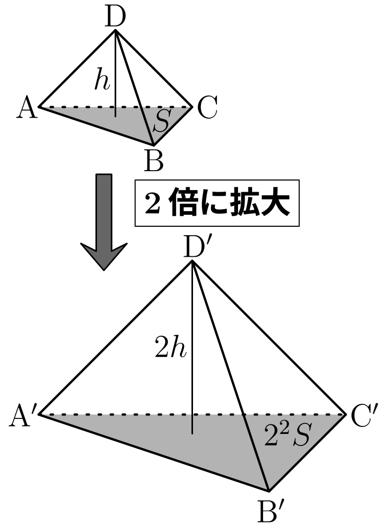
(5) 2つの円錐　　(6) 2つの球

[4]たとえば，実物と「$\dfrac{1}{25}$ 模型」の相似比は 25 : 1 である．

C 相似な立体の表面積の比，体積の比

相似な2つの立体について，表面積の比，体積の比を調べてみよう．

例 3.14 相似な2つの四面体の表面積の比，体積の比．



四面体 A′B′C′D′ と四面体 ABCD は相似で，相似比は $2:1$ であるとする．

△A′B′C′ と △ABC の面積の比は $2^2:1$ である．他の面も面積の比は $2^2:1$ であるから，2つの四面体の表面積の比は

$$2^2:1$$

である．

また，底面の △ABC の面積を S，高さを h とすると，対応する底面の面積は 2^2S，高さは $2h$ である．

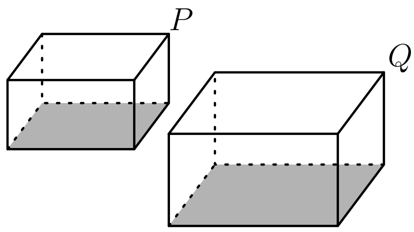
四面体 ABCD の体積を V，四面体 A′B′C′D′ の体積を V' とすると

$$V=\frac{1}{3}Sh,\qquad V'=\frac{1}{3}\times 2^2S\times 2h=2^3\times\frac{1}{3}Sh$$

したがって　　$V':V=2^3:1$

練習 3.34 2つの相似な直方体 P，Q がある．その相似比は，$k:1$ であるとする．

P と Q の表面積の比は $k^2:1$，体積の比は $k^3:1$ となることを確かめよ．



四面体や直方体に限らず，相似な立体について，次のことが成り立つ．

相似な立体の表面積の比と体積の比

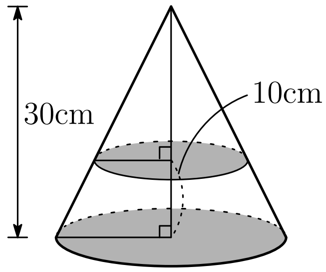
1 相似比が $k:1$ の立体について

表面積の比は，$k^2:1$，体積の比は $k^3:1$ である．

2 相似比が $m:n$ の立体について

表面積の比は $m^2:n^2$，体積の比は $m^3:n^3$ である．

例題 3.10 円錐 P を，右の図のように高さ 10cm のところで，底面に平行な平面で切ると，上に小さい円錐 Q ができる．円錐 P の高さは 30cm とする．



(1) P と Q の表面積の比を求めよ．

(2) P と Q の体積の比を求めよ．

【解】

(1) 2 つの円錐 P と Q は相似である．

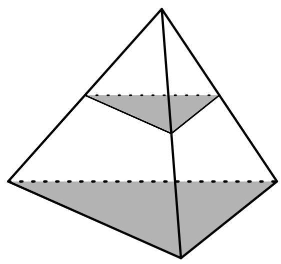
Q の高さは　$30-10=20$ (cm)

よって，相似比は　$30:20=3:2$　← 高さの比

したがって，表面積の比は　$3^2:2^2=9:4$

(2) 体積の比は　$3^3:2^3=27:8$

練習 3.35 正四面体 P を，半分の高さのところで，底面に平行な平面で切ると，上に小さい正四面体 Q ができる．



(1) P と Q の表面積の比を求めよ．

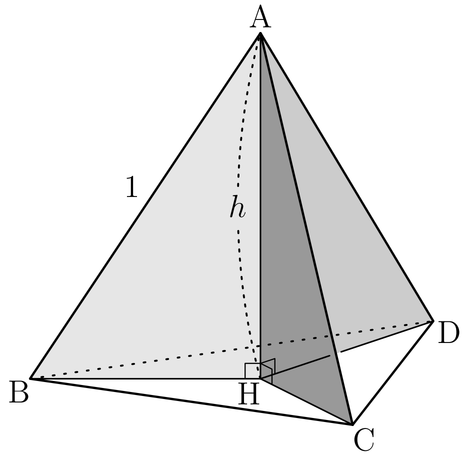
(2) P と Q の体積の比を求めよ．

3.3.3　空間図形の計量

立方体，直方体の体積や，角錐，円錐の体積の求め方は，すでに知っている．
ここでは，正四面体の体積や球の体積，表面積を調べよう．

A 正四面体の体積

1辺の長さが1の正四面体ABCDの体積Vを求めてみよう．



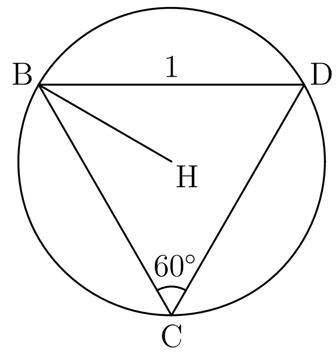
頂点Aから底面の正三角形BCDに垂線AHを下ろすと，垂線AHの長さは正四面体の高さhに等しい．

また，このとき

$$\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\mathrm{DH}=\sqrt{1^2-h^2}$$

である．

すなわち，点Hは△BCDの外接円の中心で，BHは半径である．



正弦定理により　$\dfrac{1}{\sin 60^\circ}=2\mathrm{BH}$

よって　$\mathrm{BH}=\dfrac{1}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また　$h=\sqrt{1^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

△BCDの面積Sは　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

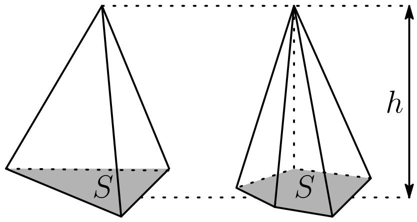
したがって　$V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

練習 3.36 1辺の長さがaの四面体の体積は，1辺の長さが1の正四面体の体積の何倍になるか．また，その体積をaで表せ．

B 切り口の面積と立体の体積

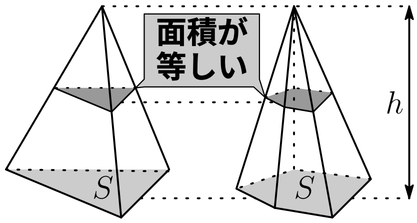
底面積が S，高さが h の角錐の体積 V は，$V=\dfrac{1}{3}Sh$ という式で求められる．このことは，次のことを意味している．

> 底面積と高さが等しい 2 つの角錐の体積は等しい．　(∗)



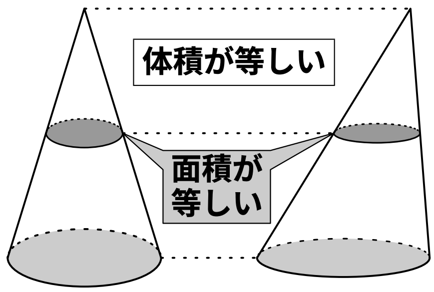
一方，角錐を底面に平行な平面で切ったときの切り口は，底面と相似になる．したがって，相似な図形の面積の比から，次のことがいえる．

> 底面積と高さが等しい 2 つの角錐を，底面に平行な同じ高さの平面で切ったときの切り口の面積は，いつも等しい．



一般に，次の事実が成り立つ[5]ことが知られている．この事実を用いると，上のことから (∗) が成り立つのである．

> 底面積と高さが等しい 2 つの立体を，底面に平行な同じ高さの平面で切ったとき，2 つの切り口の面積がいつも等しいならば，2 つの立体の体積は等しい．



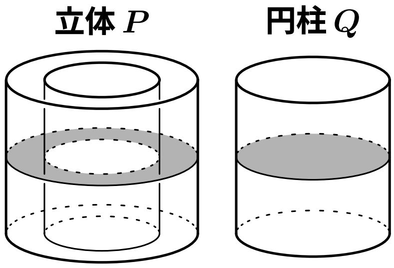
[5] 詳しくは数学 III で扱っている．

例 3.15　切り口の面積が等しい2つの立体の体積

右下の図の立体 P は，大きい円柱から小さい円柱をくりぬいたものである．底面の半径は，それぞれ 5cm，3cm とする．
また，円柱 Q は高さが P と等しく，底面の半径は 4cm とする．

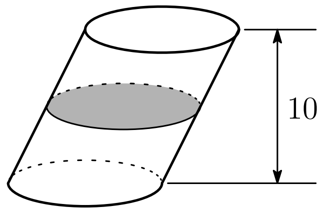
底面に平行な平面で切ったとき，
P の切り口は2円の間の部分で，
その面積は

$$\begin{aligned}&\pi\times5^2-\pi\times3^2\\&=\pi\times4^2\ (\mathrm{cm}^2)\end{aligned}$$



これは Q の切り口である円の面積に等しい．
したがって，P と Q の体積は等しい．

練習 3.37　右の図の立体は，底面に平行な平面で切ったときの切り口の面積が，いつも半径2の円の面積の2倍に等しい．高さが10のとき，立体の体積を求めよ．



C 球の体積

球の体積を求める式については，次のことが知られている．

球の体積

半径が r の球の体積 V は　　$\boldsymbol{V=\frac{4}{3}\pi r^3}$

■ 球の体積を求める式の説明

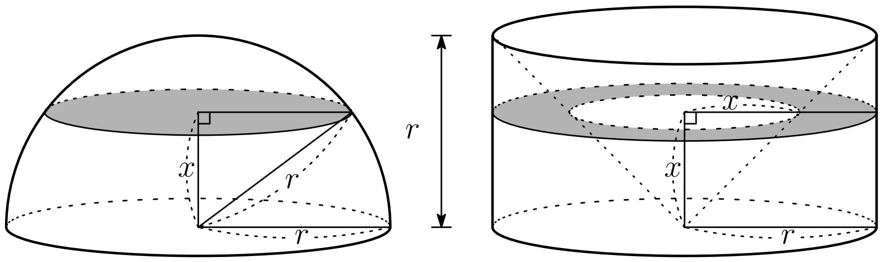
半径が r の半球を P とする．
また，下の図のように直円柱から円錐をくりぬいてできるすり鉢（ばち）型の立体を Q とする．ただし，直円柱と円錐について，底面の半径と高さはすべて r とする．
下の図からわかるように，2 つの立体を底面から高さ x のところで，底面に平行な平面で切ったときの切り口の面積は等しい．
よって，半球 P と立体 Q の体積は等しい．
Q の体積は，直円柱の体積から円錐の体積を引いて

$$\pi r^2 \times r - \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r = \frac{2}{3}\pi r^3$$

これが P の体積である．
半径が r の球の体積 V は，P の体積の 2 倍である．以上から

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 \times 2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

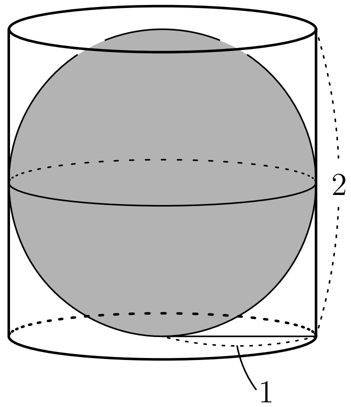
半球 P　　　　**立体 Q**



切り口は半径が $\sqrt{r^2 - x^2}$ の円で，面積は
$$\pi(r^2 - x^2)$$

切り口は半径が r の円から半径 x の円を除いたもので，面積は
$$\pi r^2 - \pi x^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

例題 3.11 半径1の球と，底面の直径と高さがともに2である円柱の体積の比を求めよ．



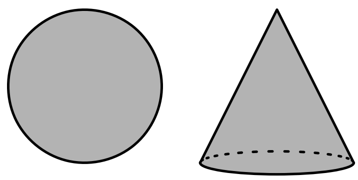
【解】 球の体積は　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3 = \dfrac{4}{3}\pi$

円柱の体積は　$\pi\cdot 1^2 \times 2 = 2\pi$

よって，球と円柱の体積の比は

$$\frac{4}{3}\pi : 2\pi = 4 : 6 = 2 : 3$$

練習 3.38 半径1の球と，底面の直径と高さがともに2である円錐の体積の比を求めよ．



応用例題 3.7 同じ材質で大きさの違う2種類の鉄球がある．半径は，それぞれ3cmと5cmである．半径3cmの鉄球4個と半径5cmの鉄球1個とでは，どちらの方が重いか．

> **考え方**　同じ材質であるから，重さの代わりに体積を比べる．

【解】 半径3cmの鉄球4個の体積の総量は　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot 3^3 \times 4 = 144\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

半径5cmの鉄球1個の体積は　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot 5^3 = \dfrac{500}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

$\dfrac{500}{3} > 144$ であるから，半径5cmの鉄球1個の方が重い．

練習 3.39 半球の形をした2つの容器 P と Q がある．P の直径は20cm，Q の直径は15cmである．容器 P で3杯の水と容器 Q で7杯の水とでは，どちらの方の量が多いか．

D 球の表面積

球の表面積を求める式については，次のことが知られている．

球の表面積

半径が r の球の表面積 S は $\boldsymbol{S = 4\pi r^2}$

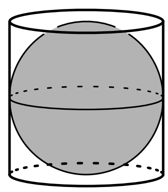
例題 3.12 半径 2 の球の表面積と半径 4 の円の面積とでは，どちらの方が大きいか．

【解】 球の表面積は $4\pi{\cdot}2^2 = 16\pi$

円の面積は $\pi{\cdot}4^2 = 16\pi$

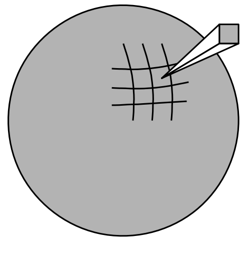
よって，球の表面積と円と面積は等しい．

練習 3.40 直径 4 の球の表面積と，底面の直径と高さがともに 4 である円柱の側面積とでは，どちらの方が大きいか．



■ 球の表面積を求める式の説明

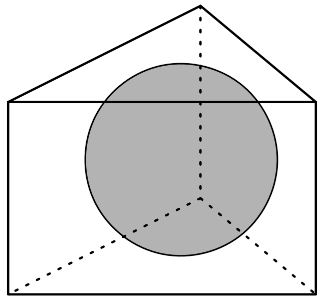
球の表面を細かく分け，1 つの面を底面とし，
球の中心を頂点とする角錐状の立体を考える．
球の表面の分割を非常に多くすることにより，
球の体積 V は，次のように考えられる．



$$\begin{aligned} V &= \text{角錐の体積の総和} \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{角錐の底面積の総和}) \times (\text{角錐の高さ}) \\ &= \frac{1}{3} \times (\text{球の表面積}) \times (\text{球の半径}) = \frac{1}{3}Sr \end{aligned}$$

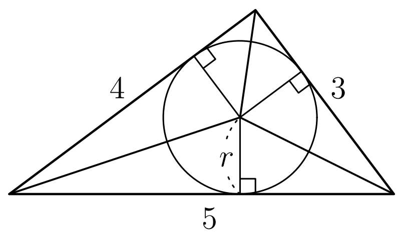
ここで，$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを使うと，$S = 4\pi r^2$ が得られる．

E 三角柱に内接する球



応用例題 3.8 三角柱に，直径が三角柱の高さに等しい球が内接している．三角柱の底面は，3辺の長さが 3，4，5 の直角三角形である．三角柱の表面積を S_1，球の表面積を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を求めよ．

考え方　球の中心を通り底面に平行な平面で三角柱を切ると，切り口では直角三角形に円が内接している．円の中心と接点を結んだ線分は各辺に垂直である．



【解】 球の中心を通り底面に平行な平面で三角柱を切ったとき，切り口は右の図のようになる．球の半径を r とすると，この直角三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot 5r + \frac{1}{2}\cdot 3r + \frac{1}{2}\cdot 4r = 6r$$

一方　　$S = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$

$6r = 6$ から　$r = 1$

よって　　$S_1 = 2S + 2r(5+3+4) = 2\cdot 6 + 2\cdot 1\cdot 12 = 36$

また　　$S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi\cdot 1^2 = 4\pi$

したがって　　$S_1 : S_2 = 36 : 4\pi = 9 : \pi$

練習 3.41 応用例題 3.8 において，三角柱の体積を V_1，球の体積を V_2 とするとき，$V_1 : V_2 = S_1 : S_2$ であることを示せ．

練習 3.42 応用例題3.8において，三角柱の底面が，5，12，13を3辺の長さとする直角三角形のとき，$S_1 : S_2$ を求めよ．

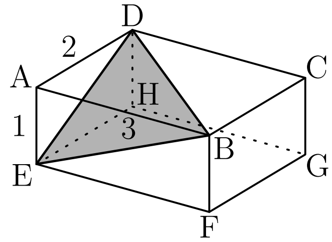
3.3.4　補充問題

7 次の図形の面積を求めよ．

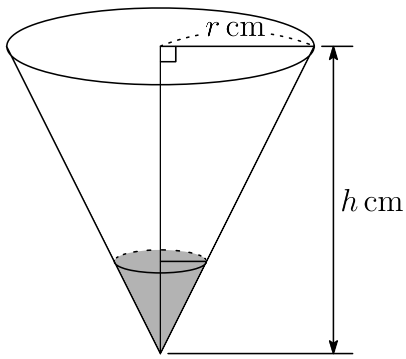
(1) $\mathrm{AB} = 6$，$\mathrm{AD} = 4$，$\angle\mathrm{A} = 60^\circ$ である平行四辺形ABCD

(2) 半径2の円に内接する正十二角形

8 右の図のように，AB = 3，AD = 2，AE = 1 である直方体 ABCD-EFGH がある．
この直方体を３点 B，D，E を通る平面で切るとき，切り口の △BDE の面積を求めよ．



9 右の図のように，底面の半径が r cm，高さが h cm の円錐の形をした容器がある．
この容器に，深さの $\dfrac{1}{3}$ のところまで水を入れたとき，あと何 cm^3 の水が入るか．



【答】

7 (1) $12\sqrt{3}$　(2) 12

8 $\dfrac{7}{2}$　$\left[\cos\angle\mathrm{BED} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}},\ \sin\angle\mathrm{BED} = \dfrac{7}{5\sqrt{2}}\right]$

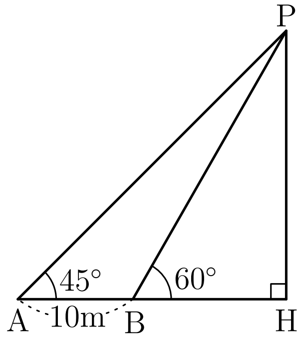
9 $\dfrac{26}{81}\pi r^2 h\ \mathrm{cm}^3$

3.4　章末問題

3.4.1　章末問題 A

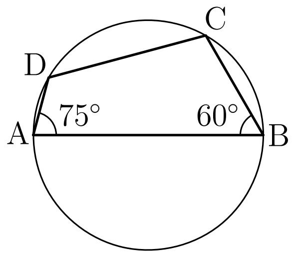
1 地点 A からテレビ塔の頂点 P を見上げた角は 45° であった．次に塔へ向かって水平に 10m 進んだ地点 B から P を見上げた角は 60° であった．図のように P の真下の地点を H とする．目の高さを無視するとき，次のものを求めよ．

(1) B，H 間の距離　　(2) 塔の高さ

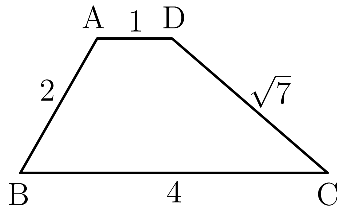


2 半径 5 の円において，1 つの直径 AB と，周上の 2 点 C，D をとり，四角形 ABCD を作る．$\angle A = 75°$，$\angle B = 60°$ のとき，次の線分の長さを求めよ．

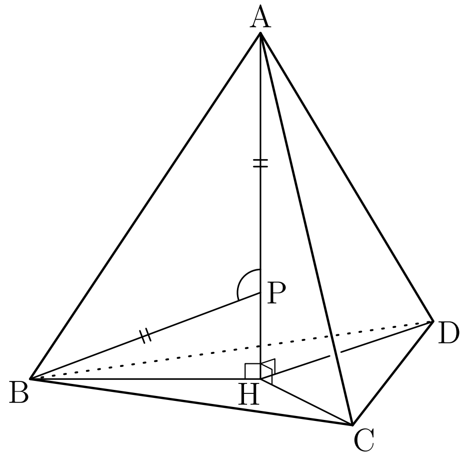
(1) 対角線 AC　　(2) 辺 CD



3 台形 ABCD において，$AD//BC$，$AB = 2$，$BC = 4$，$CD = \sqrt{7}$，$DA = 1$ であるとき，この台形の面積を求めよ．



4 正四面体 ABCD の頂点 A から △BCD に下ろした垂線を AH とし，$AP = BP$ であるように点 P を線分 AH 上にとる．$AB = \sqrt{3}$ のとき，次の問いに答えよ．



(1) 線分 PH の長さを求めよ．

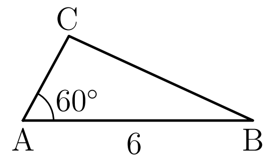
(2) $\cos\angle APB$ の値を求めよ．

3.4.2 章末問題 B

5 △ABC において，

$$A = 60^\circ,\ a : b = 2 : 1,\ c = 6$$

であるとき，次のものを求めよ．



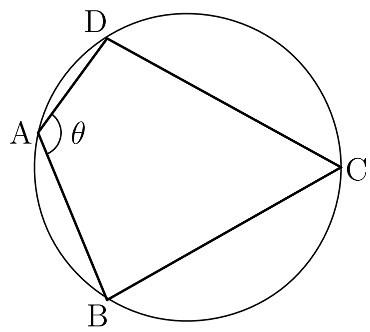
(1) $\sin B$ の値　　(2) b

6 △ABC において，$b = 2\sqrt{3}$，$c = 2$，$C = 30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ．

7 円に内接する四角形 ABCD があり，

$$\mathrm{AB} = 5,\ \mathrm{BC} = 7,\ \mathrm{CD} = 7,\ \mathrm{DA} = 3$$

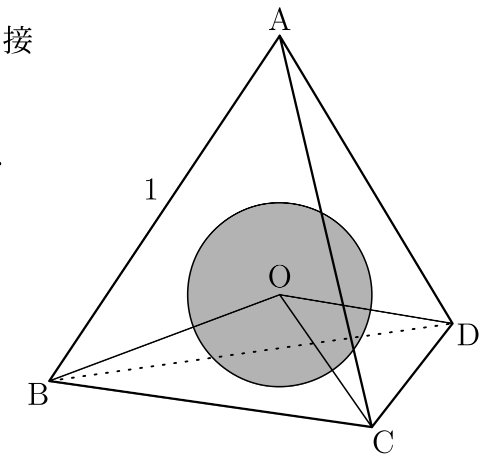
である．$\angle \mathrm{A} = \theta$ とするとき，次のものを求めよ．



(1) $\cos\theta$ の値

(2) 四角形 ABCD の面積 S

8　1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD に内接する球の中心を O とする．



(1) 四面体 OBCD の体積 V を求めよ．

(2) 球の半径 r を求めよ．

(3) 球の表面積と体積を求めよ．

ヒント

5　(2) 余弦定理によって得られる b の 2 次方程式を解く．

6　$\sin B$ の値からは B が 2 つ求められる．　**7**　(1) BD^2 を 2 通りに表す．

8　(1) 正四面体 ABCD の体積 $= 4V$　(2) $\triangle$BCD の面積 $\times r = 3V$

【答】

1 (1) $5\left(\sqrt{3}+1\right)\,\mathrm{m}$　(2) $5\left(\sqrt{3}+3\right)\,\mathrm{m}$

[(1) $\mathrm{BH}=x$ とおくと $\mathrm{PH}=x\tan 60^\circ$，$\mathrm{PH}=(x+10)\tan 45^\circ$]

2 (1) $5\sqrt{3}$　(2) $5\sqrt{2}$

[(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ に正弦定理を適用　(2) $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ から $\angle\mathrm{DAC}=45^\circ$]

3 $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　[点 A を通り辺 CD に平行な直線と辺 BC の交点を E とする．$\triangle\mathrm{ABE}$ に余弦定理を用いると $\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{1}{2}$]

4 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(2) $-\dfrac{1}{3}$

[(1) PH$=x$ とおいて，$\mathrm{BP}^2=\mathrm{PH}^2+\mathrm{BH}^2$，$\mathrm{BH}=1$，$\mathrm{AH}=\sqrt{2}$ を利用する．

(2) $\cos\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AB}^2}{2\times\mathrm{AP}\times\mathrm{BP}}$]

5 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(2) $-1+\sqrt{13}$

[(1) 正弦定理を利用　(2) 余弦定理と $a=2b$ から $(2b)^2=b^2+6^2-2b\cdot 6\cdot\cos 60^\circ$]

6 $a=4$，$A=90^\circ$，$B=60^\circ$ または $a=2$，$A=30^\circ$，$B=120^\circ$

[正弦定理により，$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$]

7 (1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) $16\sqrt{3}$

[(1) $\triangle\mathrm{ABD}$ では $\mathrm{BD}^2=34-30\cos\theta$，$\triangle\mathrm{BCD}$ では $\mathrm{BD}^2=98+98\cos\theta$]

8 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{48}$　(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$　(3) 表面積は $\dfrac{1}{6}\pi$，体積は $\dfrac{\sqrt{6}}{216}\pi$

[(1) 正四面体 ABCD の体積は $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$　(2) $\triangle\mathrm{BCD}$ の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$]

3.5 三角比の表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	———