第 2 章　式と曲線

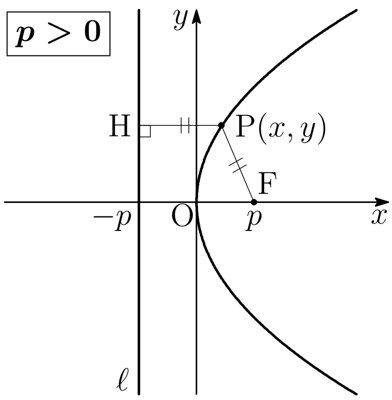
2.1　2次曲線

2.1.1　放物線

A 放物線の方程式

平面上で，定点 F と，F を通らない定直線 ℓ から等距離にある点の軌跡を**放物線**といい，点 F を放物線の**焦点**，直線 ℓ を放物線の**準線**という．

点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を焦点とし，直線 $x=-p$ を準線 ℓ とする放物線の方程式を求めてみよう．ただし，$p \neq 0$ とする．この放物線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，P から ℓ に下ろした垂線を PH とする．
条件 $\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ は $\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$ と同値であるから，次の等式が成り立つ．



$$(x-p)^2+y^2=\{x-(-p)\}^2$$

整理して　　　$y^2=4px$　　　$\cdots$ ①

① を放物線の方程式の**標準形**という．また，放物線の焦点を通り，準線に垂直な直線を，放物線の**軸**といい，軸と放物線の交点を，放物線の**頂点**という．放物線は，その軸に関して対称である．

放物線の標準形 $\boldsymbol{y^2=4px}$　$\boldsymbol{(p \neq 0)}$

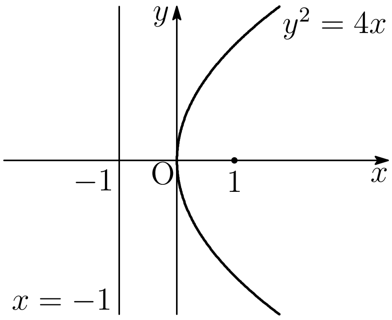
1　焦点は $\mathbf{F}(\boldsymbol{p},\ \mathbf{0})$，準線は直線 $\boldsymbol{x=-p}$

2　軸は x 軸，頂点は原点 O　　**3**　曲線は x 軸に関して対称

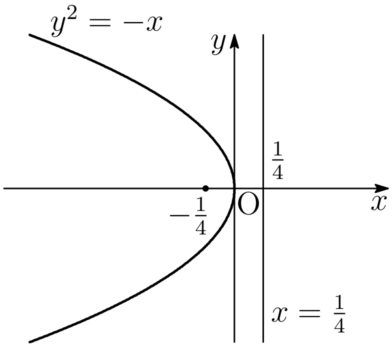
例 2.1 焦点が点 $\mathrm{F}(1,\ 0)$ で，準線が直線 $x=-1$ である放物線の方程式は

$$y^2=4{\cdot}1{\cdot}x$$

すなわち　$y^2=4x$



例 2.2 放物線 $y^2=-x$ について，$y^2=4{\cdot}\left(-\dfrac{1}{4}\right)x$ であるから，焦点は点 $\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ で，準線は直線 $x=\dfrac{1}{4}$ である．



練習 2.1 次の放物線の概形をかき，その焦点と準線をいえ．

(1) $y^2=8x$

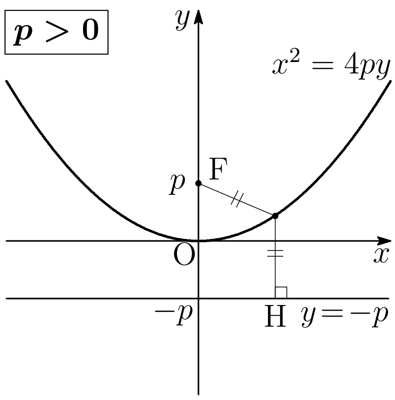
(2) $y^2=-4x$

(3) $y^2 = x$

B y 軸が軸となる放物線

$p \neq 0$ とする．点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を焦点とし，直線 $y = -p$ を準線とする放物線の方程式は，51 ページと同様にして，次のようになる．

$$\boldsymbol{x^2 = 4py}$$



放物線 $y = ax^2$ は，$x^2 = 4 \cdot \dfrac{1}{4a} y$ と表されるから，その焦点は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$，準線は直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ である．

練習 2.2 次の放物線の概形をかき，その焦点と準線をいえ．

(1) $x^2 = 4y$

(2) $y = 2x^2$

2.1.2　楕円

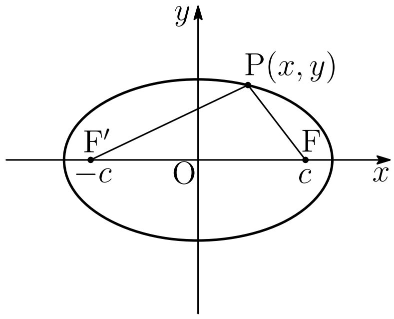
A 楕円の方程式

平面上で，2定点F，F′ からの距離の和が一定であるような点の軌跡を**楕円**といい，この2点F，F′ を楕円の**焦点**という．

2点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ を焦点とし，この2点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式を求めてみよう．ただし，実際に楕円がかけるように，$a > c > 0$ とする．

この楕円上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$ より



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺を2乗して整理すると

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

再び両辺を2乗して整理すると

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$a > c$ であるから，$\sqrt{a^2-c^2}=b$ とおくと，$a > b > 0$ であり

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

よって　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots ①$$　←　上の式の両辺を a^2b^2 で割る．

逆に，① を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2\mathrm{a}$ を満たす．

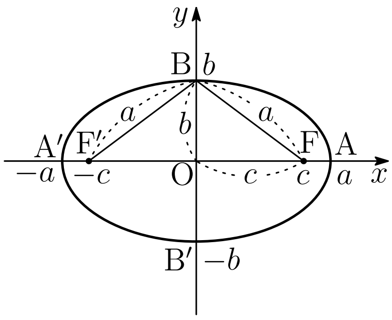
① を楕円の方程式の**標準形**という．

① を導くのに $\sqrt{a^2-c^2}=b$ とおいたから，$c=\sqrt{a^2-b^2}$ である．このことから，楕円 ① の焦点F，F′ の焦点の座標は，次のようになる．

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

楕円 ① と x 軸および y 軸の交点

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{A}'(-a,\ 0)$$
$$\mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0, -b)$$



を，楕円 ① の**頂点**という．頂点を結ぶ線分 AA′，BB′ のうち，長い方の AA′ を**長軸**，短い方の BB′ を**短軸**という．焦点は長軸上にある．

また，長軸と短軸の交点 O を，楕円の**中心**という．

楕円 ① は，長軸 AA′，短軸 BB′，中心 O に関して対称である．

楕円の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

1 焦点は $\mathbf{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ \mathbf{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

2 楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $\boldsymbol{2a}$

3 長軸の長さは $\boldsymbol{2a}$，短軸の長さは $\boldsymbol{2b}$

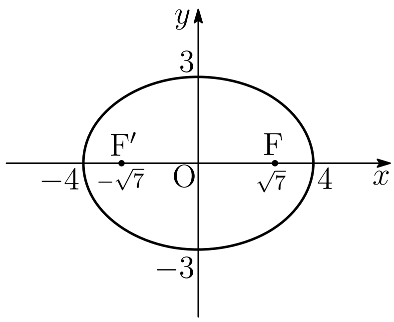
4 曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

例 2.3 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の概形は，右の図のようになる．

焦点 $\mathrm{F}(\sqrt{7},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{7},\ 0)$

長軸の長さは $2\times 4=8$

短軸の長さは $2\times 3=6$



練習 2.3 次の楕円の概形をかけ．また，焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

(2) $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$

例題 2.1 2点 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 10 であるような楕円の方程式を求めよ.

【解】 求める楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおく.

焦点からの距離の和について，$2a=10$ であるから　　$a=5$

焦点の座標について，$\sqrt{a^2-b^2}=3$ であるから

$$b^2=a^2-3^2=5^2-3^2=16$$

したがって，求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

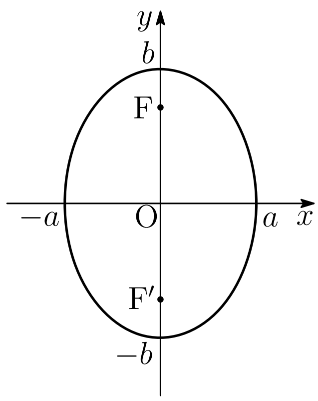
$\longleftarrow$ $a^2{=}25,\ b^2{=}16$

練習 2.4 2点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 6 であるような楕円の方程式を求めよ.

B y 軸上に焦点がある楕円

方程式　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$\cdots$①

において，$b>a>0$ の場合，① は右の図のような楕円を表す．



この楕円の2つの焦点F，F′ は y 軸上にあり，座標は次のようになる．

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\ \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$

この楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2b$ である．

また，長軸は y 軸上，短軸は x 軸上にある．

長軸の長さは $2b$，短軸の長さは $2a$ である．

練習 2.5 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の概形をかけ．また，焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．

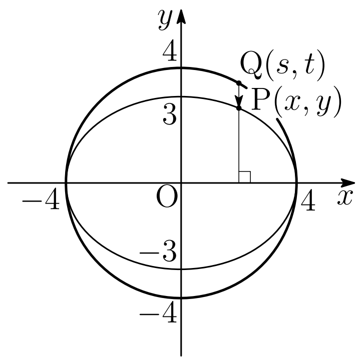
C 円と楕円

円と楕円の関係を調べてみよう．

応用例題 2.1 円 $x^2+y^2=4^2$ を，x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ 倍すると，どのような曲線になるかを調べよ．

考え方　軌跡の考えを利用する．円上の点 $(s,\ t)$ は点 $\left(s,\ \dfrac{3}{4}t\right)$ に移る．

【解】 円上の点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ が移る点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると



$$x=s,\ y=\frac{3}{4}t$$

すなわち　　$s=x,\ t=\dfrac{4}{3}y$

$s^2+t^2=4^2$ であるから

$$x^2+\left(\frac{4}{3}y\right)^2=4^2$$

すなわち　　$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

よって，円 $x^2+y^2=4^2$ は，楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ になる．

一般に，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ を，x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍して得られる曲線である．

練習 2.6 円 $x^2 + y^2 = 3^2$ を，x 軸をもとにして次のように縮小または拡大して得られる楕円の方程式を求めよ．

(1) y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍

(2) y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍

D 点の軌跡が楕円になる場合

応用例題 2.2 座標平面上において，長さが5の線分ABの端点Aはx軸上を，端点Bはy軸上を動くとき，線分ABを2 : 3に内分する点Pの軌跡を求めよ．

考え方　A(s, 0)，B(0, t)，P(x, y)としてs，tをx，yで表し，s，tの満たす式に代入する．

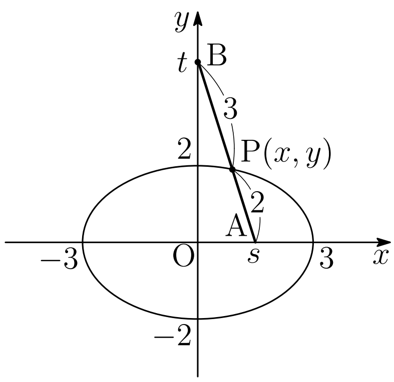
【解】 Aの座標を$(s,\ 0)$，Bの座標を$(0,\ t)$とすると，AB $= 5$ から

$$s^2+t^2=5^2 \qquad \cdots①$$

Pの座標を$(x,\ y)$とすると，Pは線分ABを2 : 3に内分するから

$$x=\frac{3}{5}s,\ \ y=\frac{2}{5}t$$

よって　　$s=\dfrac{5}{3}x,\ \ t=\dfrac{5}{2}y$



これらを①に代入すると

$$\left(\frac{5}{3}x\right)^2+\left(\frac{5}{2}y\right)^2=5^2$$

すなわち　　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

したがって，点Pの軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ である．

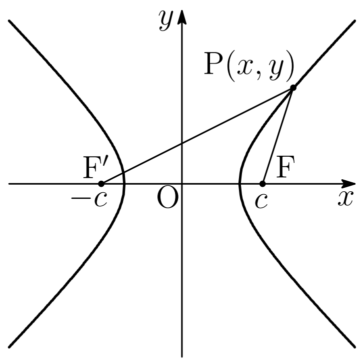
練習 2.7 座標平面上において，長さが7の線分ABの端点Aはx軸上を，端点Bはy軸上を動くとき，線分ABを$3:4$に内分する点Pの軌跡を求めよ．

2.1.3　双曲線

A 双曲線の方程式

平面上で，2定点F，F′ からの距離の差が一定であるような点の軌跡を**双曲線**といい，この2点F，F′ を双曲線の**焦点**という．

2点F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$ を焦点とし，この2点からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式を求めてみよう．ただし，実際に双曲線がかけるように，$c > a > 0$ とする．



この双曲線上の点をP$(x,\ y)$ とすると，
$\mathrm{PF} - \mathrm{PF'} = \pm 2a$ より

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

楕円の場合と同様な変形を行うと

$$\pm\, a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$$
$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$c > a$ であるから，$\sqrt{c^2-a^2} = b$ とおくと，$b > 0$ であり

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

よって　$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \cdots ①$$　　← 上の式の両辺を a^2b^2 で割る．

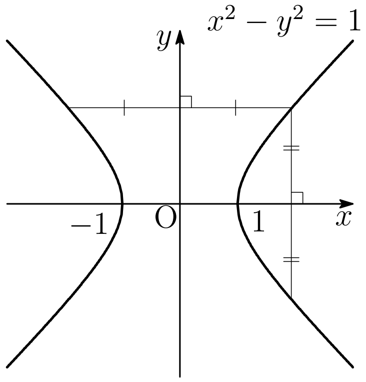
逆に，① を満たす点P$(x,\ y)$ は $\mathrm{PF} - \mathrm{PF'} = \pm 2a$ を満たす．

① を双曲線の方程式の**標準形**という．

① を導くのに $\sqrt{c^2-a^2} = b$ とおいたから，$c = \sqrt{a^2+b^2}$ である．このことから，双曲線 ① の焦点F，F′ の座標は，次のようになる．

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ \ \mathrm{F'}(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$

双曲線　$x^2 - y^2 = 1$　$\cdots$①

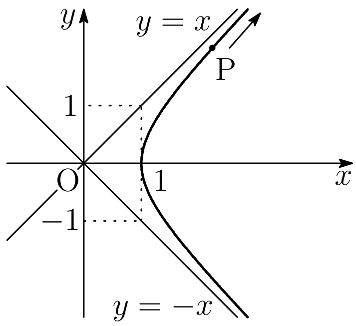


の概形は，右の図のようになり，x軸，y軸に関して対称である．
双曲線①の $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分は，関数

$$y = \sqrt{x^2-1}\ \ (x \geqq 1) \qquad \cdots②$$

のグラフである．$x \geqq 1$では

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} > 0$$

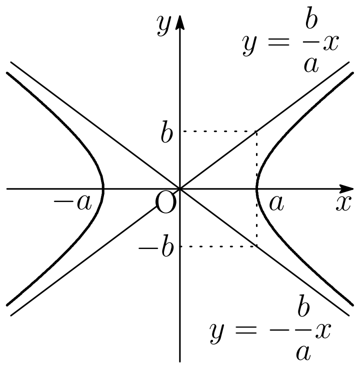


となり，xが限りなく大きくなるとき，xと$\sqrt{x^2-1}$の差は限りなく0に近づく．
よって，②のグラフ上の点Pは，原点から限りなく遠ざかるとき，直線 $y = x$ に限りなく近づく．すなわち，直線 $y = x$ は，双曲線①の漸近線である．

また，②のグラフと直線$y = x$をx軸に関して折り返すことにより，直線$y = -x$も双曲線①の漸近線であることがわかる．

さらに，双曲線①はy軸に関して対称であるから，$x \leqq 0$ の部分についても，2直線 $y = x$，$y = -x$ は漸近線であることがわかる．

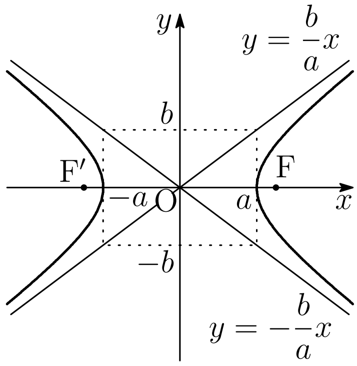
一般の双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の概形は，右の図のようになる．上と同様に，



$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ \ (x \geqq a)$$

のグラフを考えて，次の2直線が漸近線であることがわかる．

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$



双曲線の焦点F，F′ を通る直線FF′ と双曲線の交点を，双曲線の**頂点**という．また，線分FF′ の中点を，双曲線の**中心**という．

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ について，頂点は2点 $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$ で，中心は原点Oである．
また，この双曲線は，x 軸，y 軸，原点Oに関して対称である．

双曲線の標準形 $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)}$

1　焦点は　　$\mathbf{F}(\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}},\ \mathbf{0})$，$\mathbf{F'}(-\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}},\ \mathbf{0})$

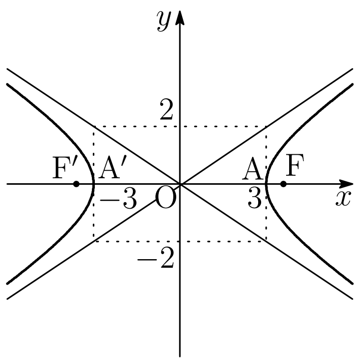
2　双曲線上の点から2つの焦点までの距離の差は　$\boldsymbol{2a}$

3　漸近線は2直線 $\boldsymbol{y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x}$

4　曲線は x 軸，y 軸，原点Oに関して対称

［注意］ 漸近線の方程式は $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$，$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ と表すことができる．

例 2.4 双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ の概形は，
右の図のようになる．
焦点は
$\mathrm{F}(\sqrt{13},\ 0)$，$\mathrm{F'}(-\sqrt{13},\ 0)$
頂点は $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{A'}(-3,\ 0)$
漸近線は2直線 $y=\frac{2}{3}x$，$y=-\frac{2}{3}x$



練習 2.8 次の双曲線の概形をかけ．また，焦点，頂点，漸近線をいえ．

(1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

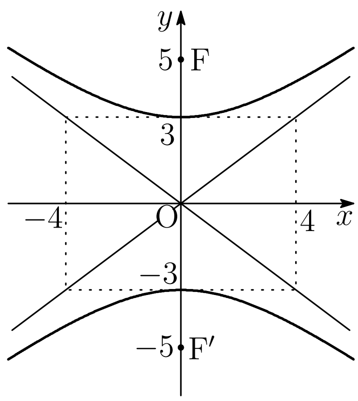
(2) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

B 焦点が y 軸上にある双曲線

次の方程式の表す曲線について調べてみよう．

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1 \qquad \cdots ①$$

① は，$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ において，x と y を入れ替えたものである．このことから，曲線 ① は右の図のような双曲線になるといえる．



焦点は　F(0, 5)，F′(0, −5)
頂点は　2 点 (0, 3)，(0, −3)

である．また，漸近線は 2 直線 $y = \dfrac{3}{4}x$，$y = -\dfrac{3}{4}x$ である．

一般に，$a > 0$，$b > 0$ のとき，方程式 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1}$ の表す曲線も双曲線である．この双曲線について，次のことがいえる．

焦点は　$\mathbf{F}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}})$，$\mathbf{F'}(\mathbf{0}, \boldsymbol{-\sqrt{a^2+b^2}})$
頂点は　2 点 $(\mathbf{0},\ \boldsymbol{b})$，$(\mathbf{0}, \boldsymbol{-b})$
漸近線は　2 直線 $\boldsymbol{y = \dfrac{b}{a}x}$，$\boldsymbol{y = -\dfrac{b}{a}x}$
双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は　$\boldsymbol{2b}$

練習 2.9 次の双曲線の概形をかけ．また，焦点，頂点，漸近線をいえ．

(1) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = -1$

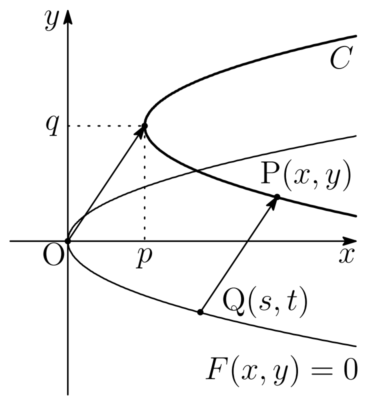
(2) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = -1$

これまでに学んだ放物線，楕円，双曲線と円は，x，y の 2 次方程式で表される．これらの曲線をまとめて **2 次曲線**という．

2.1.4　2 次曲線の平行移動

A 曲線の平行移動

曲線 $F(x,\ y)=0$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した移動後の曲線 C の方程式を求めよう．



もとの曲線上の点 Q$(s,\ t)$ が移る点を P$(x,\ y)$ とすると

$$F(s,\ t)=0 \qquad \cdots①$$

$$x=s+p,\ y=t+q \qquad \cdots②$$

② より　$s=x-p,\ t=y-q$

これらを ① に代入すると

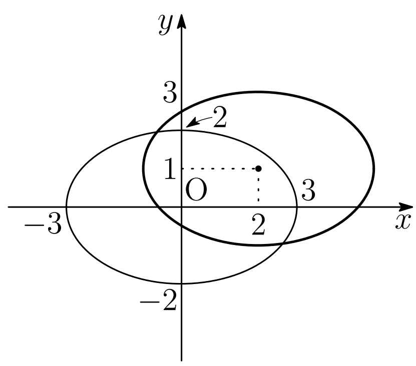
$$F(x-p,\ y-q)=0$$

が得られる．これが平行移動後の曲線 C の方程式である．

曲線の平行移動

曲線 $F(x,\ y)=0$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の曲線の方程式は $\boldsymbol{F(x-p,\ y-q)=0}$ となる．

例 2.5 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \qquad \cdots①$



を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，移動後の楕円の方程式は，次のようになる．

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \cdots②$$

また，楕円 ① の焦点は，2 点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$ であるから，楕円 ② の焦点は，2 点 $(\sqrt{5}+2,\ 1)$，$(-\sqrt{5}+2,\ 1)$ である．

練習 2.10 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき，移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ．

練習 2.11 放物線 $y^2=4x$ を，x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ．

B $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ の表す図形

例 2.5 で得られた楕円の方程式

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \qquad \cdots ①$$

の分母を払って整理すると，次のようになる．

$$4x^2+9y^2-16x-18y-11=0 \qquad \cdots ②$$

逆に，方程式 ② が与えられた場合は，② を ① の形に変形することによって，その方程式の表す図形が楕円であることがわかる．

例題 2.2 次の方程式はどのような図形を表すか.

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 19 = 0$$

【解】 この方程式を変形すると

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 4$$

すなわち
$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y-2)^2 = 1$$

よって，この方程式は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す.

練習 2.12 次の方程式はどのような図形を表すか.

(1) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$

(2) $y^2 + 8y - 16x = 0$

(3) $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$

2.1.5　2 次曲線と直線

A 2 次曲線と直線の共有点の個数

2 次曲線と直線の共有点の個数を調べてみよう．

例題 2.3 k は定数とする．次の楕円と直線の共有点の個数を調べよ．

$$x^2+4y^2=20,\quad y=x+k$$

【解】

$$x^2+4y^2=20 \qquad \cdots ①$$
$$y=x+k \qquad \cdots ②$$

とする．② を ① に代入すると

$$x^2+4(x+k)^2=20$$

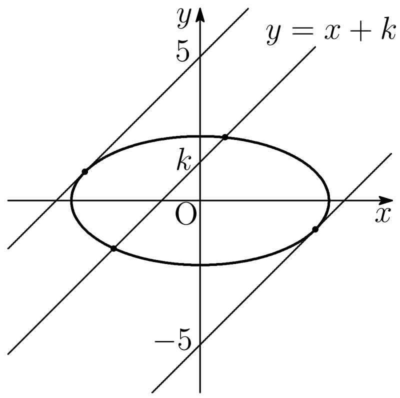
整理すると　$5x^2+8kx+4(k^2-5)=0$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(8k)^2-4{\cdot}5{\cdot}4(k^2-5)$$
$$=-16(k+5)(k-5)$$

よって，① と ② の共有点の個数は，次のようになる．

$k<-5,\ 5<k$ のとき　0 個
$k=\pm5$ のとき　1 個
$-5<k<5$ のとき　2 個



上の例題 2.3 において，$k=\pm5$ のとき，楕円 ① と直線 ② は共有点を 1 個だけもつ．このとき，楕円と直線は**接する**といい，その直線を楕円の**接線**，共有点を**接点**という．

一般に，2 次曲線と直線の方程式から 1 文字を消去して得られる 2 次方程式の実数解の個数と，2 次曲線と直線の共有点の個数は一致する．

練習 2.13 k は定数とする．双曲線 $x^2-2y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を調べよ．

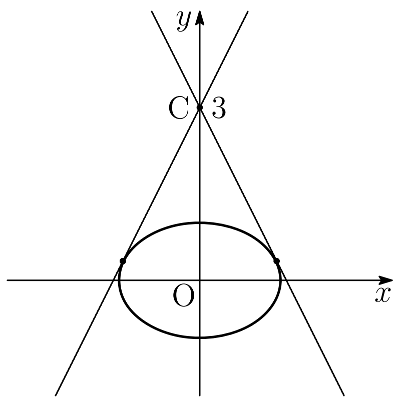
B 2次曲線に引いた接線の方程式

2次曲線上にない点から2次曲線に接線を引くとき，その接線の方程式を求めてみよう．

応用例題 2.3 点C(0, 3)から楕円 $x^2+2y^2=2$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ．

考え方　点C(0, 3)を通る接線の方程式は，$y=mx+3$ とおくことができる．この式と楕円の式から y を消去して x の2次方程式を作ると，直線が楕円に接する条件は，判別式 D について，$D=0$ が成り立つことである．

【解】 点Cを通る接線は，y 軸に平行ではないから，その方程式は $y=mx+3$ とおくことができる．これを楕円の式に代入すると



$$x^2+2(mx+3)^2=2$$

整理すると

$$(2m^2+1)x^2+12mx+16=0$$

この x の2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (12m)^2-4(2m^2+1)\cdot 16 \\ &= 16(m^2-4) \end{aligned}$$

$D=0$ とすると　　$m=\pm 2$

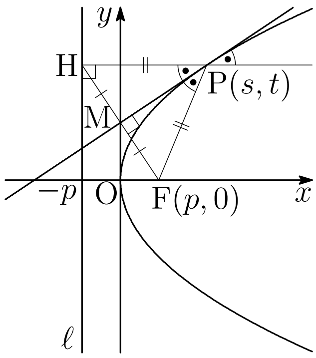
よって，接線の方程式は　　$y=2x+3$，$y=-2x+3$

［注意］ 接点の x 座標は，$x=-\dfrac{6m}{2m^2+1}$ である．　　$\leftarrow x=-\dfrac{12m}{2(m^2+1)}$

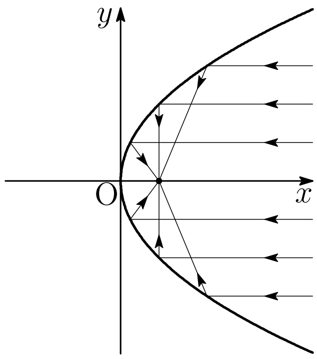
練習 2.14 点 C$(4,\ 0)$ から放物線 $y^2 = -4x$ に引いた接線の方程式を求めよ．また，その接点の座標を求めよ．

研究

放物線の焦点の座標



放物線 $y^2 = 4px$ の焦点を F，準線を ℓ とする．F の座標は $(p,\ 0)$，ℓ の方程式は $x = -p$ である．この放物線上の任意の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とし，線分 FH の中点を M とする．
放物線の定義によると PF = PH であるから，二等辺三角形 PHF において，直線 PM は頂角 $\angle$FPH を2等分する．
よって，図に示した3つの角は等しいことがわかる．
また，PM$\perp$FH と直線 FH の傾きが $-\dfrac{t}{2p}$ であることから，直線 PM の方程式は $y - t = \dfrac{2p}{t}(x - s)$ であることがわかる．



そして，この直線 PM は，放物線の点 P における接線であることが，計算によって確かめられる．以上のことから，放物線の軸に平行に進んできた光や電波が放物線に当たって反射すると，そのすべてが焦点を通過することがいえる．
楕円，双曲線の焦点についても同じようなことが知られている．

2.1.6　補充問題

1 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ．

(1) 焦点が点 $(2,\ 0)$ で，準線が y 軸である放物線

(2) 2 点 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 1)$ からの距離の和が 10 である楕円

(3) 2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 8 である双曲線

2 円 $x^2 + y^2 = 16$ を，y 軸をもとにして x 軸方向に 2 倍した曲線の方程式を求めよ．

3 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ が直線 $y = 2x + 3$ から切り取ってできる線分の中点の座標を求めよ．

【答】

1 (1) $y^2 = 4(x-1)$　(2) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$　(3) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

2 $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

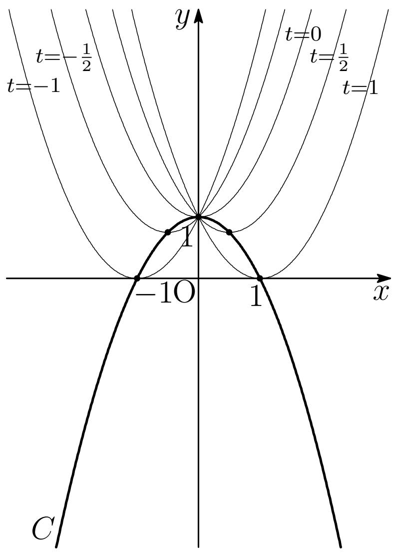
3 $(-2, -1)$

2.2 媒介変数表示と極座標

2.2.1 曲線の媒介変数表示

A 媒介変数表示

放物線 $y = x^2 - 2tx + 1$ の頂点の座標は $(t,\ 1 - t^2)$ で，t の値に応じて変化する．このとき，この放物線の頂点の座標が描く曲線 C の方程式を求めてみよう．



曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標は，

$$x = t,\quad y = 1 - t^2$$

で表される．

これらから t を消去すると

$$y = 1 - x^2$$

これが，曲線 C の方程式である．

一般に，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標が，変数 t によって

$$x = f(t),\quad y = g(t) \qquad \cdots ①$$

の形に表されたとき，これを曲線 C の**媒介変数表示**といい，変数 t を**媒介変数**という．① の 2 つの式から t を消去して得られる x，y の方程式 $F(x,\ y) = 0$ が，曲線 C を表す．

[注意] 媒介変数による曲線 C の表示方法は一通りではない．

練習 2.15 媒介変数表示された次の曲線について，t を消去して x，y の方程式を求め，曲線の概形をかけ.

(1) $x = t + 1$，$y = t^2 + 4t$

(2) $x = 2t$，$y = t^2 - 2t$

例題 2.4 放物線 $y = x^2 + 2tx - 2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか.

【解】 放物線の方程式を変形すると

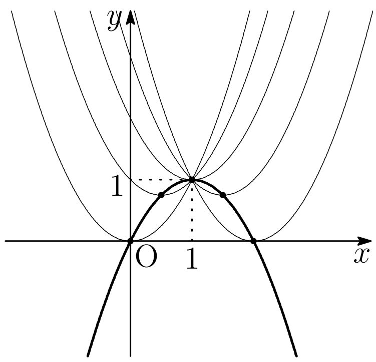
$$y = (x + t)^2 - t^2 - 2t$$

その頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x = -t,\quad y = -t^2 - 2t$$

t を消去すると

$$y = -x^2 + 2x$$



よって，頂点 P が描く図形は，放物線 $y = -x^2 + 2x$ である.

練習 2.16 放物線 $y = -x^2 + 4tx + 2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか．

B 一般角 θ を用いた媒介変数表示

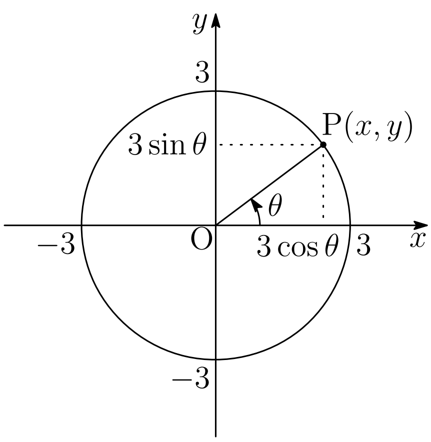
原点 O を中心とする半径 3 の円は，次の方程式で表される．

$$x^2 + y^2 = 3^2 \qquad \cdots ①$$

この円上に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとり，動径 OP の表す一般角を θ とすると，

$$x = 3\cos\theta,\quad y = 3\sin\theta$$

が成り立つ．これは，円 ① の媒介変数表示である．ただし，角は弧度法で表すことにする．



円 $x^2 + y^2 = a^2$ は，たとえば次のように媒介変数表示される．

$$\boldsymbol{x = a\cos\theta,\quad y = a\sin\theta}$$

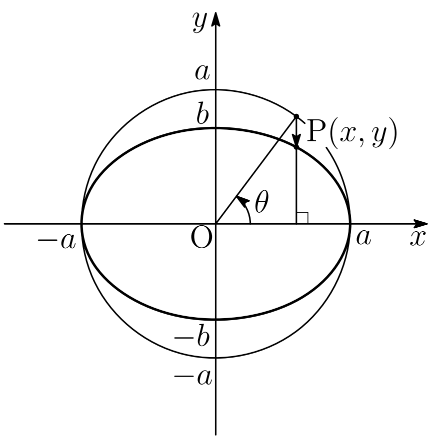
練習 2.17 角 θ を媒介変数として，次の円を表せ．

(1)　$x^2 + y^2 = 4$　　　(2)　$x^2 + y^2 = 2$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ は，円 $x^2 + y^2 = a^2$ を，x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍した曲線である．

このことから，この楕円は，たとえば次のように媒介変数表示される．

$$\boldsymbol{x = a\cos\theta,\quad y = b\sin\theta}$$



練習 2.18 角 θ を媒介変数として，次の楕円を表せ．

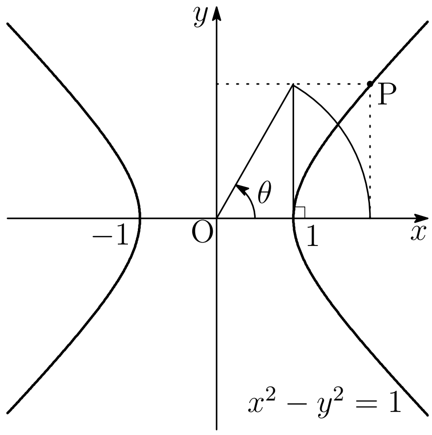
(1)　$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$　　　(2)　$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

例題 2.5 θ が変化するとき，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta\right)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上を動くことを示せ.

【解】 $x = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $y = \tan\theta$ とすると

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta \\ &= \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta\right)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上を動く.



練習 2.19 θ が変化するとき，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\cos\theta},\ 2\tan\theta\right)$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上を動くことを示せ.

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ は，たとえば次のように媒介変数表示される.

$$\boldsymbol{x = \frac{a}{\cos\theta},\quad y = b\tan\theta}$$

練習 2.20 双曲線 $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ を媒介変数 θ を用いて表せ.

C 媒介変数表示の曲線の平行移動

応用例題 2.4 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか.

$$x = 2\cos\theta + 1,\quad y = 2\sin\theta + 3$$

考え方 $\sin\theta$，$\cos\theta$ を，x，y で表し，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入する.

【解】
$$\sin\theta = \frac{y-3}{2},\quad \cos\theta = \frac{x-1}{2}$$

これらを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\frac{(y-3)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

よって $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

これは，点 $(1,\ 3)$ を中心とする半径 2 の円を表す.

一般に，次のことが成り立つ.

媒介変数表示 $x = f(t) + p$，$y = g(t) + q$ で表される曲線は，
媒介変数表示 $x = f(t)$，$y = g(t)$ で表される曲線を，
x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである.

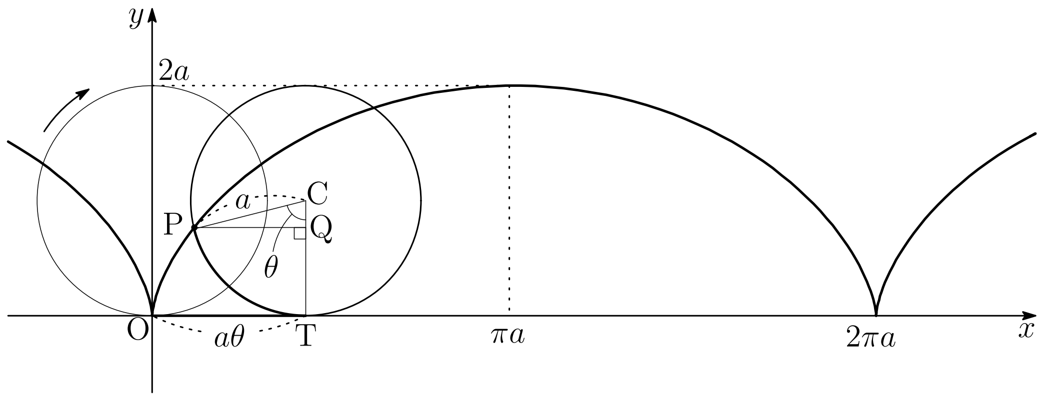
練習 2.21 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか.

(1) $x = 3\cos\theta + 2$，$y = 3\sin\theta - 1$

(2) $x = 3\cos\theta + 1$，$y = 2\sin\theta + 3$

D サイクロイド

円が定直線上をすべることなく回転していくとき，円周上の定点 P が描く曲線を**サイクロイド**という．



円の半径が a のとき，サイクロイドの媒介変数表示を求めてみよう．

上の図のように，定直線を x 軸とし，点 P の最初の位置を原点 O とする．また，円が角 θ だけ回転したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，円の中心を C，x 軸との接点を T とする．

このとき，上の図において，$\mathrm{OT} = \overset{\frown}{\mathrm{TP}} = a\theta$ であるから[1]

$$x = \mathrm{OT} - \mathrm{PQ} = a\theta - a\sin\theta$$
$$y = \mathrm{CT} - \mathrm{CQ} = a - a\cos\theta$$

と表される．

結果の式は，$\sin\theta < 0$ や $\cos\theta < 0$ のときも成り立つ．

したがって，サイクロイドの媒介変数表示は，次のようになる．

$$\boldsymbol{x = a(\theta - \sin\theta),\quad y = a(1 - \cos\theta)}$$

練習 2.22 半径 3 の円が x 軸上をすべることなく回転していくとき，円周上の定点 P の描くサイクロイドの媒介変数表示を求めよ．ただし，点 P の最初の位置を原点 O とする．

[1] 半径が a，中心角が θ ラジアンの扇形の弧の長さは，$a\theta$ である．

研究

分数式による円の媒介変数表示

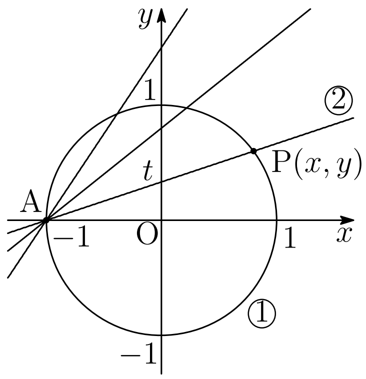
次の円 ① と円上の点 A$(-1,\ 0)$ を通る傾き t の直線 ② を考える．

円　　$x^2+y^2=1$　　$\cdots$ ①

直線　　$y=t(x+1)$　　$\cdots$ ②

円 ① と直線 ② の A 以外の交点を P$(x,\ y)$ として，まず P の座標を求めてみよう．

② を ① に代入すると



$$x^2+t^2(x+1)^2=1$$

整理すると

$$(x+1)\{(1+t^2)x+t^2-1\}=0$$

$x\neq-1$ であるから

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

これを ② に代入すると

$$y=\frac{2t}{1+t^2}$$

よって，P の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ である．

ここで，t の値を変数とみると，上の点 P は，円 ① 上を動く．

ただし，点 A$(-1,\ 0)$ は除かれる．

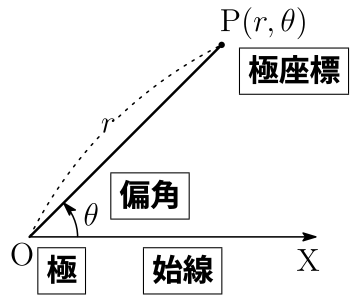
このことから，t を媒介変数とするとき，点 $(-1,\ 0)$ を除く円 $x^2+y^2=1$ は，次のように媒介変数表示されることがわかる．

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

2.2.2 極座標と極方程式

A 極座標と直交座標

平面上に点 O と半直線 OX を定めると，この平面上の点 P の位置は，OP の長さ r と OX から OP へ測った角 θ の大きさで決まる．ただし，θ は弧度法で表された一般角である．
このとき，2 つの数の組 $(r,\ \theta)$ を，点 P の**極座標**という．極座標が $(r,\ \theta)$ である点 P を $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ と書くことがある．また，点 O を**極**，θ を**偏角**，半直線 OX を**始線**という．
点 P の偏角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲でただ 1 通りに定まるが，θ の範囲を制限しないこともある．



[注意] 極 O の極座標は $(0,\ \theta)$ とし，θ は任意と考える．

極座標に対して，これまで用いてきた x 座標と y 座標の組 $(x,\ y)$ で表した座標を**直交座標**という．

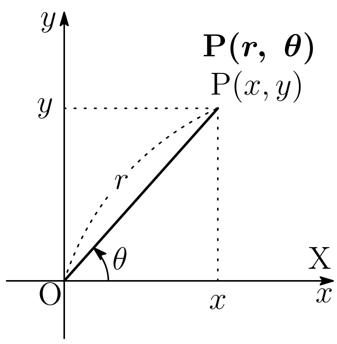
点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，次の関係が成り立つ．

1 $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$

2 $r = \sqrt{x^2+y^2}$

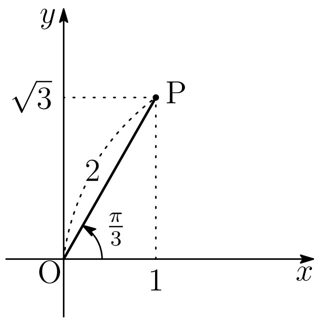
$r \neq 0$ のとき

$\cos\theta = \dfrac{x}{r},\quad \sin\theta = \dfrac{y}{r}$



[注意] 直交座標の原点および x 軸の正の部分が，それぞれ極座標の極，始線となるようにとっている．

例 2.6 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ である点 P の直交座標 $(x,\ y)$



$r=2,\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

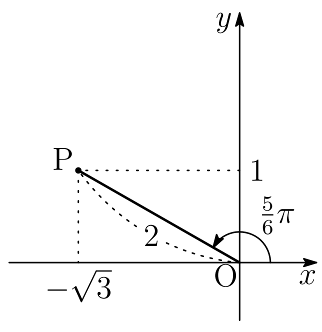
$$x=r\cos\theta=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$
$$y=r\sin\theta=2\sin\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

よって，点 P の直交座標は　$(1,\ \sqrt{3})$

練習 2.23 極座標が次のような点の直交座標を求めよ．

(1)　$\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2)　$\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$　　(3)　$(3,\ \pi)$

例 2.7 直交座標が $(-\sqrt{3},\ 1)$ である点 P の極座標 $(r,\ \theta)$



$x=-\sqrt{3},\ y=1$ であるから

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}$$
$$=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

よって，点 P の極座標は　$\left(2,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$

練習 2.24 直交座標が次のような点の極座標を求めよ．ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1)　$(1,\ \sqrt{3})$　　(2)　$(-2,\ 2)$　　(3)　$(-\sqrt{3}, -1)$

B 極方程式

円や直線を，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表してみよう．

例 2.8 極 O を中心とする半径 2 の円

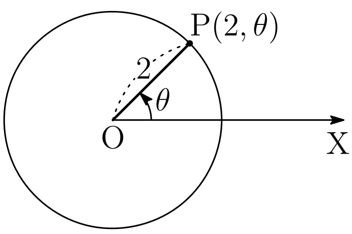
この円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，$\mathrm{OP} = r$ より

$$r = 2,\quad \theta \text{ は任意}$$

がいえる．逆に，

$$r = 2$$

を満たす点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ はこの円上にある．



例 2.9 点 (1，0) を通り始線に垂直な直線

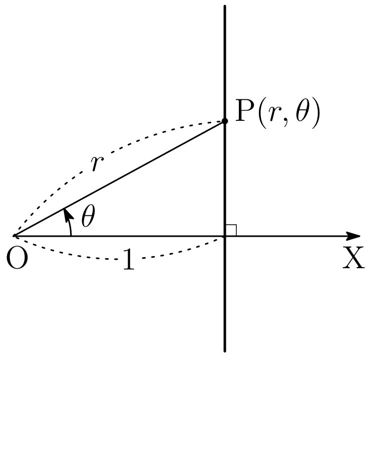
この直線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，$\mathrm{OP}\cos\theta = 1$ より

$$r\cos\theta = 1 \qquad \text{すなわち} \qquad r = \frac{1}{\cos\theta}$$

がいえる．逆に，

$$r = \frac{1}{\cos\theta}$$

を満たす点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ はこの直線上にある．



例 2.9 の式 $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$ において，θ の変域を $\cos\theta \neq 0$ であるすべての θ にとると，右辺は負の値をとることもある．そこで，$r < 0$ のとき，$(r,\ \theta)$ は極座標が $(|r|,\ \theta + \pi)$ である点を表すものとする．

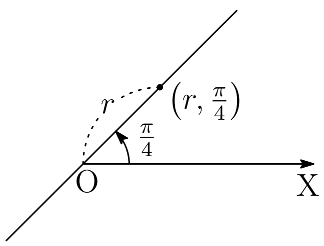
たとえば，例 2.9 において，$(-1,\ \pi)$ は点 $(1,\ 2\pi)$ を表す．

練習 2.25 点 $\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ を通り始線に平行な直線を，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表せ.

平面上の曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ の方程式 $F(r,\ \theta)=0$ または $r=f(\theta)$ で表されるとき，その方程式をこの曲線の**極方程式**という.

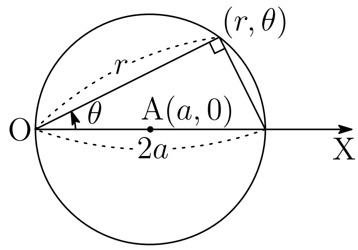
例 2.10 (1) 極 O を通り，始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線の極方程式は

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$



(2) 中心 A の極座標が $(a,\ 0)$ である半径 a の円の極方程式は，右の図からもわかるように

$$r=2a\cos\theta$$



練習 2.26 次の極方程式で表される曲線を図示せよ.

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$　　　(2) $r=2\cos\theta$

C x，y の方程式と極方程式

x，y の方程式で表された曲線を極方程式で表してみよう．

例題 2.6 次の双曲線を極方程式で表せ．

$$x^2 - y^2 = 10$$

【解】 この曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

これらを，$x^2 - y^2 = 1$ に代入すると　$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$

すなわち　$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$　$\longleftarrow \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

よって　$r^2\cos 2\theta = 1$

練習 2.27 次の曲線を極方程式で表せ．

$$x^2 + 2y^2 = 4$$

次に，r，θ の方程式で表された曲線を，直交座標の x，y の方程式で表してみよう．

例題 2.7 極方程式 $r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ の表す曲線を，直交座標における方程式で表せ．

【解】 この曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とする．

$r \neq 0$ のとき　$\cos\theta = \dfrac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \dfrac{y}{r}$

これらを，$r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ に代入すると

$$r = 2\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\right)$$

すなわち　$r^2 = 2x + 2y$

この式は，$r = 0$ のときにも成り立つ．
さらに，$r^2 = x^2 + y^2$ であるから

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

よって　$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

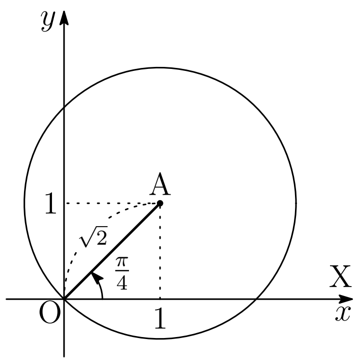
例題 2.7 で求めた x，y の方程式は

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

と変形される．よって，極方程式

$$r=2(\cos\theta+\sin\theta)$$

の表す曲線は，点 $\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$ を中心とし，極 O を通る円であることがわかる．



練習 2.28 次の極方程式の表す曲線を，直交座標における方程式で表せ．

(1) $r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

(2) $r=2\sin\theta$

D 2次曲線の極方程式

例題 2.8 次の極方程式で表される曲線を，直交座標における方程式で表せ.

$$r = \frac{1}{2+\cos\theta}$$

【解】 分母を払うと　　$2r + r\cos\theta = 1$

$r\cos\theta = x$ を代入すると　　$2r = 1 - x$

両辺を 2 乗すると　　$4r^2 = 1 - 2x + x^2$

$r^2 = x^2 + y^2$ を代入すると　　$4(x^2 + y^2) = 1 - 2x + x^2$

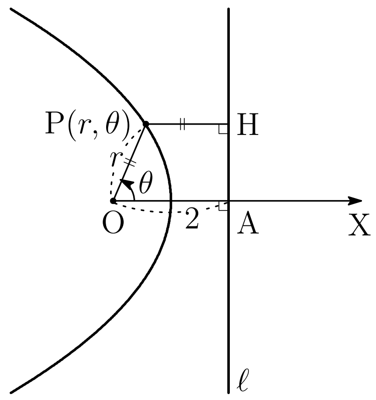
整理して　　$3x^2 + 4y^2 + 2x - 1 = 0$

[注意] 上で求めた x，y の方程式を変形すると $\dfrac{9}{4}\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2 + 3y^2 = 1$ となり，楕円を表すことがわかる.

練習 2.29 次の極方程式で表される曲線を，直交座標における方程式で表せ.

$$r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$$

例題 2.9 始線OX上の点A$(2,\ 0)$を通り，始線に垂直な直線をℓとする．極Oを焦点，ℓを準線とする放物線の極方程式を求めよ．



【解】 放物線上の点Pの極座標を$(r,\ \theta)$とし，Pから準線ℓに下ろした垂線をPHとする．このとき，常に

$$\mathrm{OP} = \mathrm{PH}$$

が成り立つ．

$$\mathrm{OP} = r, \quad \mathrm{PH} = 2 - r\cos\theta$$

であるから　$r = 2 - r\cos\theta$

よって，求める放物線の極方程式は　$r = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$

練習 2.30 始線OX上の点A$(2,\ 0)$を通り，始線に垂直な直線をℓとする．点P$(r,\ \theta)$からℓに下ろした垂線をPHとするとき，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}} = \dfrac{1}{2}$であるような点Pの軌跡を，極方程式で表せ．

研究

2次曲線を表す極方程式

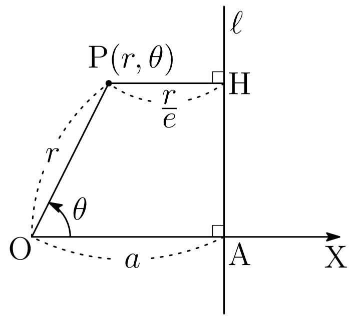
始線 OX 上の点 A$(a,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする．点 P$(r,\ \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき

$$e=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

の値が一定であるような点 P の軌跡は，2次曲線になることが知られている．その極方程式を求めてみよう．

線分 PH の長さを2通りに表すと

$$\mathrm{PH}=\frac{r}{e},\quad \mathrm{PH}=a-r\cos\theta$$



よって　$\dfrac{r}{e}=a-r\cos\theta$

ゆえに　$r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$　$\cdots$①

① が点 P の軌跡を表す極方程式である．

① の表す2次曲線は，e のとる値によって，次のように分類される．この e の値を離心率という．

［1］　$0<e<1$ のとき　　O を焦点の1つとする楕円

［2］　$e=1$ のとき　　O を焦点，ℓ を準線とする放物線

［3］　$e>1$ のとき　　O を焦点の1つとする双曲線

2.2.3 コンピュータの利用

ここでは，グラフ作成機能をもった数式処理ソフトを利用して，コンピュータにいろいろな曲線を描かせてみよう．グラフ作成には，

［1］ 関数 $y = f(x)$ ［2］ 媒介変数表示 ［3］ 極方程式

のいずれかを利用する[2]．

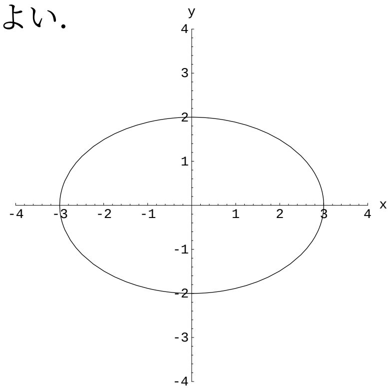
A 2 次曲線の表示

2 次曲線を描くには，関数 $y = f(x)$ を利用するとよい．たとえば，楕円

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

は，次の 2 つの関数のグラフを，同時に描けばよい．

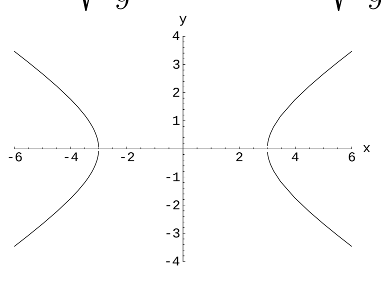
$$y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}, \quad y = -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$

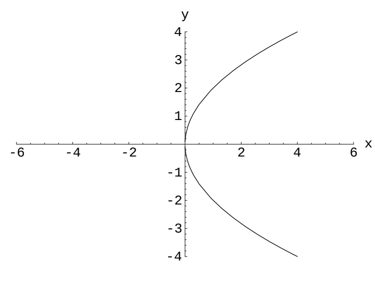


練習 2.31 次の曲線を描くには，どのような関数のグラフを描けばよいか．また，コンピュータの画面に曲線を表示してみよう．

(1) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ (2) $y^2 = 4x$

【答】 (1) $y = 2\sqrt{\dfrac{x^2}{9} - 1}$，$y = -2\sqrt{\dfrac{x^2}{9} - 1}$ (2) $y = 2\sqrt{x}$，$y = -2\sqrt{x}$





[2] 曲線の式の入力は，そのままの計算式を入力しても無効なことが多い．ソフトの解説書に示された入力方法を参照する必要がある．

B 媒介変数表示された曲線の表示

媒介変数表示された曲線を描くには,

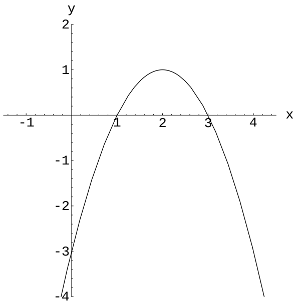
$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

の式を利用すればよい.

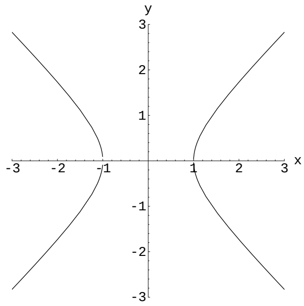
練習 2.32 次のように媒介変数表示される曲線を描いてみよう.

(1) $x = t + 2,\ \ y = 1 - t^2$ (2) $x = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right),\ \ y = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$

【答】 (1)



(2)



以下で扱う媒介変数は，弧度法で表された一般角も t で表し，曲線の媒介変数表示を，$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ の形で表している.

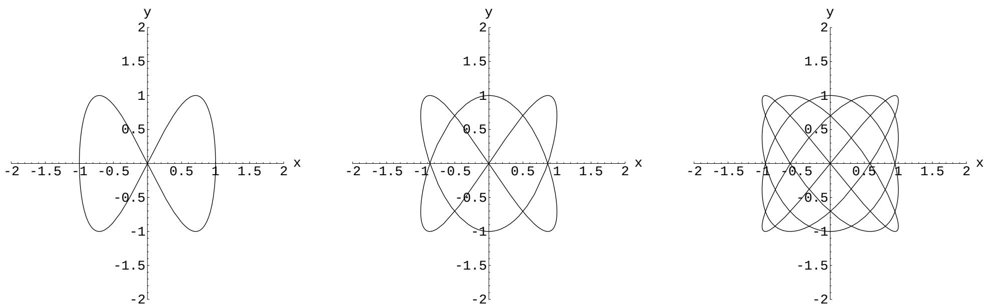
有理数 a，b に対して，媒介変数表示

$$\begin{cases} x = \sin at \\ y = \sin bt \end{cases} \qquad \cdots ①$$

で表される曲線を描いてみよう.

例 2.11 ① において，a，b が次の値をとるときの曲線を描くと，下の図のようになる.

(1) $a = 1,\ b = 2$ (2) $a = 2,\ b = 3$ (3) $a = 4,\ b = 5$



[注意] 例 2.11 の曲線は，リサージュ曲線と呼ばれている.

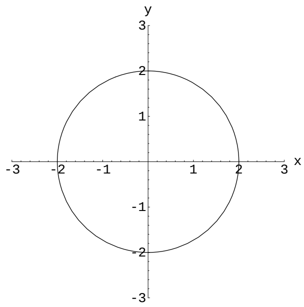
練習 2.33 次のように媒介変数表示される曲線を描いてみよう.

(1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

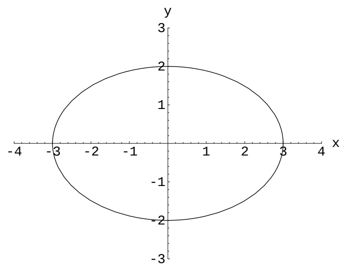
(3) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x = \sin t - \cos t \\ y = \sin t + \cos t \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

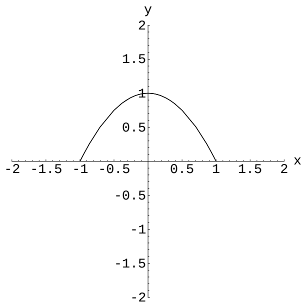
【答】 (1)



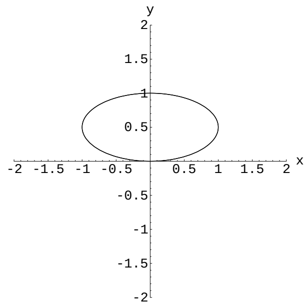
(2)



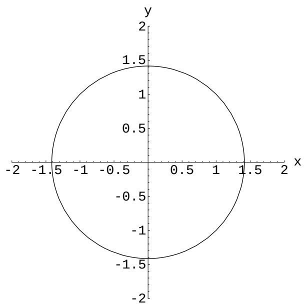
(3)



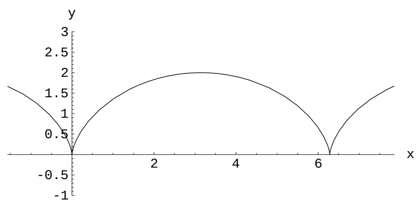
(4)



(5)



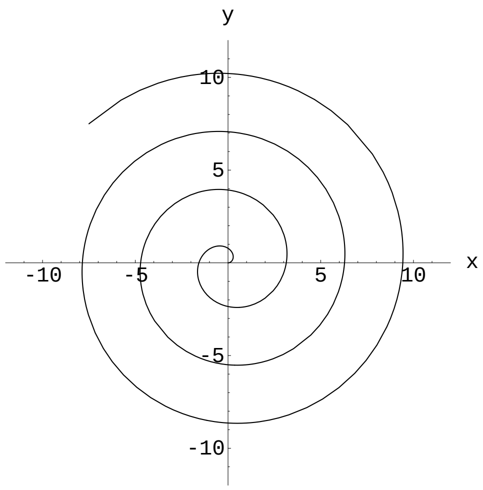
(6)



C 極方程式で表される曲線

極方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線については，θ の範囲に注意して描いてみよう[3].

例 2.12　極方程式 $r = \dfrac{\theta}{2}$ $(\theta \geqq 0)$ の表す曲線をコンピュータで描くと，下の図のようになる．



一般に，$a > 0$ のとき，極方程式

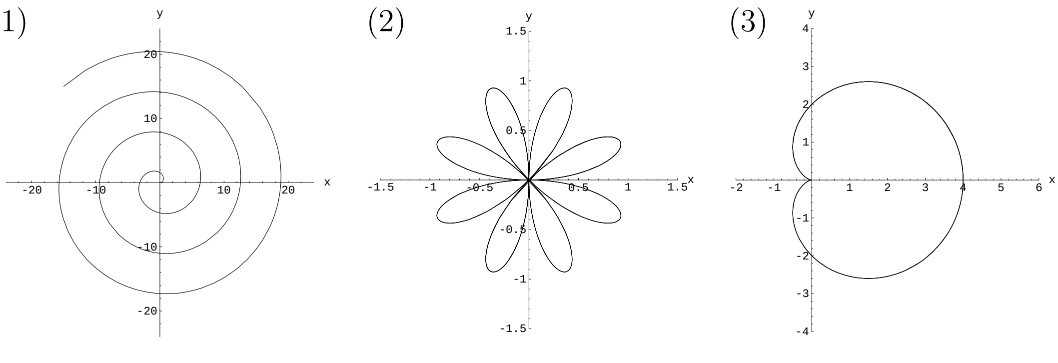
$$r = a\theta \quad (\theta \geqq 0)$$

の表す曲線を，アルキメデスの渦巻線という．

練習 2.34 次のように極方程式で表される曲線を描いてみよう．ただし，いずれも $\theta \geqq 0$ とする．

(1)　$r = \theta$　　(2)　$r = \sin 4\theta$　　(3)　$r = 2(1 + \cos\theta)$

【答】 (1)　(2)　(3)



[3]極座標による入力が使えない場合には，媒介変数表示に直してから入力するとよい．
極方程式 $r = f(\theta)$ は，$x = f(\theta)\cos\theta$，$y = f(\theta)\sin\theta$ と媒介変数表示される．

研究

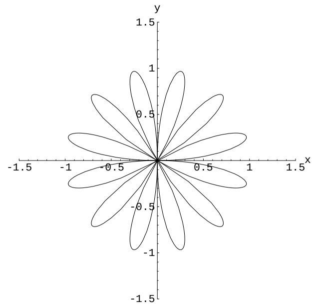
いろいろな曲線

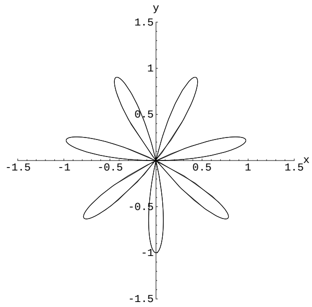
a を有理数とするとき，極方程式

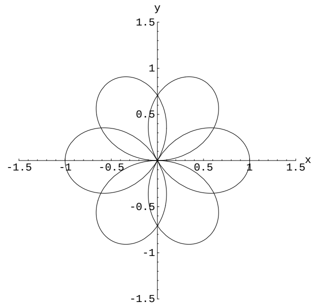
$$r = \sin a\theta$$

で表される曲線を，正葉曲線という．

(1)　$a = 6$　　(2)　$a = 7$　　(3)　$a = 1.5$







a，b を有理数とするとき，極方程式

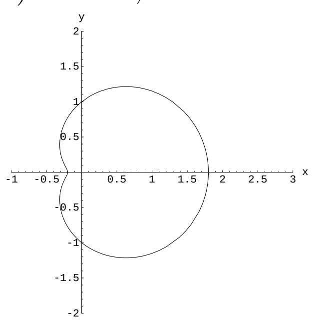
$$r = a + b\cos\theta$$

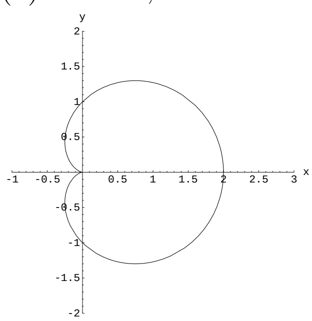
で表される曲線を，リマソンという．とくに，$a = b$ のときは

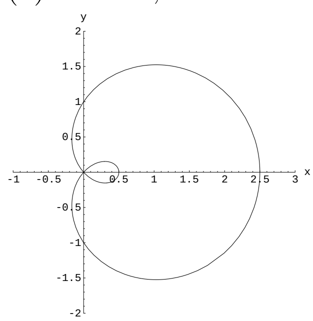
$$r = a(1 + \cos\theta)$$

となる．この極方程式で表される曲線を，カージオイドまたは心臓形という．

(1)　$a = 1,\ b = 0.8$　　(2)　$a = 1,\ b = 1$　　(3)　$a = 1,\ b = 1.5$







2.2.4 補充問題

4 次の式から θ を消去して，x と y の方程式で表せ.

(1) $x = 2\cos\theta - 1, \quad y = 3\sin\theta - 2$

(2) $x = \dfrac{1}{\cos\theta} + 2, \quad y = 2\tan\theta + 1$

5 極を O とし，点 A の極座標を $\left(3,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ とする．点 A を通り，直線 OA に垂直な直線の極方程式は，$r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 3$ であることを示せ.

6 次の極方程式の表す曲線を，直交座標における方程式で表せ.

(1) $r = 2(\cos\theta - 2\sin\theta)$

(2) $r^2 \sin\theta \cos\theta = 1$

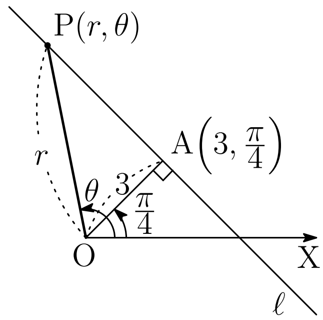
7 曲線 $y^2 = x^2(1 - x^2)$ を，コンピュータで描いてみよう.

【答】

4 (1) $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$　(2) $(x-2)^2-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

5 点 A を通り直線 OA に垂直な直線を ℓ，ℓ 上の点 P の極座標を (r,θ) とすると

$$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}=\mathrm{OA}$$



ここで　$\mathrm{OP}=r$

$$\angle\mathrm{AOP}=\theta-\frac{\pi}{4}$$

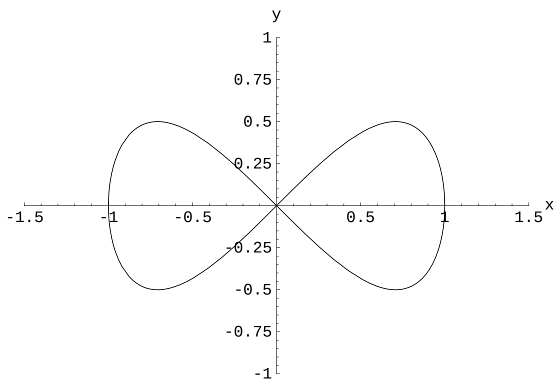
$$\mathrm{OA}=3$$

であるから，極方程式は

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=3$$

6 (1) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$　(2) $xy=1$

7



2.3 章末問題

2.3.1 章末問題 A

1 次の方程式の表す2次曲線の概形をかけ．また，焦点の座標を求めよ．

(1) $y^2 + 8x = 0$

(2) $4x^2 + 16y^2 = 1$

(3) $8x^2 - 4y^2 = 32$

2 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ．

(1) 頂点が原点で，焦点が x 軸上にあり，点 $(-1,\ 2)$ を通る放物線

(2) 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にあり，長軸の長さが 4 で点 $(\sqrt{2},\ 1)$ を通る楕円

(3) 頂点の座標が $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ で，2 直線 $y=2x$，$y=-2x$ を漸近線とする双曲線

3 次の方程式は放物線，楕円，双曲線のいずれを表すか．また，その焦点の座標を求めよ．

(1) $x^2 - 2x + 4y^2 - 3 = 0$

(2) $y^2 - 4y - 4x = 0$

(3) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$

4 次のように媒介変数表示される図形はどのような曲線か．x，y の方程式を求めて示せ．

(1) $\begin{cases} x = 2t^2 + 4 \\ y = t + 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = 2\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} - 2t \end{cases}$

5 点 A，B の極座標を，それぞれ $\left(3,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ とする．極 O と点 A，B を頂点とする三角形 OAB の面積を求めよ．

6 点 C の極座標を $(r_1,\ \theta_1)$ とする．点 C を中心とする半径 a の円の極方程式は，次の式で表されることを示せ．

$$r^2 + {r_1}^2 - 2rr_1\cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

2.3.2 章末問題 B

7 直線 $x = -1$ に接し，点 A$(1,\ 0)$ を通る円の中心を P$(x,\ y)$ とする．点 P の軌跡はどのような曲線になるか．

8 双曲線 $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ の焦点の 1 つを F$(3,\ 0)$ とする．この双曲線上の任意の点 P$(x,\ y)$ から直線 $x = 2$ に下ろした垂線を PH とするとき，PF : PH は一定であることを示せ．また，その比を求めよ．

9 2 次曲線 $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 8 = 0$ を，x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動した 2 次曲線の方程式を求め，どのような曲線かを調べよ．また，移動後の 2 次曲線の焦点の座標を求めよ．

10 直線 $y=-x+k$ が，楕円 $4x^2+y^2=4$ と異なる 2 点 Q，R で交わるように k の変化するとき，線分 QR の中点 P の軌跡を求めよ．

11 次の方程式が円を表すように t の値が変化するとき，円の中心 P はどのような曲線を描くか.

$$x^2+y^2+2tx-4ty+5t^2-t=0$$

12 a は正の定数とする．極方程式 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ の表す曲線を，直交座標における方程式で表せ．また，コンピュータでこの曲線を描け.

ヒント

8 $\mathrm{PF}^2 : \mathrm{PH}^2$ から求める． **10** k の値の範囲に注意する．

11 方程式が円を表すことから t の値の範囲が定められる．

【答】

1 (1) $(-2,\ 0)$ (2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ 0\right)$ (3) $(2\sqrt{3},\ 0)$，$(-2\sqrt{3},\ 0)$

2 (1) $y^2=-4x$ (2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ (3) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

3 (1) 楕円，$(\sqrt{3}+1,\ 0)$，$(-\sqrt{3}+1,\ 0)$ (2) 放物線，$(0,\ 2)$

(3) 双曲線，$(\sqrt{13}+1,\ -1)$，$(-\sqrt{13}+1,-1)$

［(1) $\dfrac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$ (2) $(y-2)^2=4(x+1)$

(3) $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$ ］

4 (1) 放物線 $(y-3)^2=\dfrac{1}{2}(x-4)$ (2) 放物線の一部 $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}$ $(x \geqq 0)$

5 3 $\left[S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

6 ［極を点O，この円上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ として，△OCP に余弦定理を適用すると $\mathrm{CP}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OC}\cos(\theta-\theta_1)$ ］

7 放物線 $y^2=4x$ $\left[|x+1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right]$

8 $\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=\sqrt{3}:\sqrt{2}$

［$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ から $y^2=\dfrac{1}{2}x^2-3$，これより $\mathrm{PF}^2=\dfrac{3}{2}(x-2)^2$，

$\mathrm{PH}^2=(x-2)^2$ ］

9 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$，焦点の座標は $(0,\ 2\sqrt{3}-1)$，$(0,-2\sqrt{3}-1)$

［もとの2次曲線の方程式は $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$ ］

10 直線の一部 $y = 4x \quad \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5} < x < \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$\Bigl[$ y を消去した2次方程式 $5x^2 - 2kx + (k^2 - 4) = 0$ が異なる2つの実数解をもつから $D > 0$ より，$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$　また，解と係数の関係により，$x_1 + x_2 = \dfrac{2k}{5}$，$y_1 + y_2 = (-x_1 + k) + (-x_2 + k) = \dfrac{8k}{5}$　　よって，中点P$\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2},\ \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ の座標は $\left(\dfrac{k}{5},\ \dfrac{4}{5}k\right)$ $\Bigr]$

11 直線の一部 $y = -2x \quad (x < 0)$

[$(x + t)^2 + (y - 2t)^2 = t$ が円を表すためには $t > 0$]

12 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

$\left[\ r^2 = x^2 + y^2,\ \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{2x^2}{r^2} - 1 \text{ を代入}\ \right]$