第 5 章　積分法とその応用

5.1　不定積分

5.1.1　不定積分とその基本性質

A 不定積分

数学 II で学んだように，微分すると $f(x)$ になる関数があれば，その関数を $f(x)$ の**原始関数**という．$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，すなわち $F'(x) = f(x)$ のとき，任意の定数 C に対して

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

が成り立つから，$F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である．

また，$F(x)$ と $G(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数ならば，$G'(x) = F'(x)$ となるから，139 ページで学んだように

$$G(x) = F(x) + C$$

となる定数 C が存在する．

以上からわかるように，関数 $f(x)$ の原始関数が存在するならば，それは無数にある．その 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数全体は，次の形に書き表される．

$$F(x) + C \qquad C\text{ は任意の定数}$$

この表示を $f(x)$ の**不定積分**といい[1]，$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ で表す．$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**といい，上の定数 C を**積分定数**という．また，$f(x)$ を**被積分関数**といい，x を**積分変数**という．

$f(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき，$f(x)$ の不定積分は

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C} \qquad C\text{ は積分定数}$$

[1] 不定積分を原始関数と同じ意味で用いることもある．

原始関数を求めることは微分法の逆の計算であるから，与えられた関数の不定積分を求めるには，導関数の公式が逆に利用される．

まず，$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$，$(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ から，次の公式が成り立つ．

x^{α} の不定積分

$\alpha \neq -1$ のとき
$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$$

［注意］ 不定積分における C は積分定数を表すが，今後はその断りを省略する．

例 5.1　(1)
$$\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + C$$
$$= -\frac{1}{3}x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$$

(2)
$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$\longleftarrow x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$

［注意］ 今後は，$\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある．

練習 5.1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^5\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$

(3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

(5) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

B 不定積分の基本性質

数学 II で学んだように，不定積分について，次の公式が成り立つ．ただし，不定積分についての等式では，両辺の積分定数の違いは無視することにする．

関数の定数倍および和，差の不定積分

1 $\displaystyle\int \boldsymbol{kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx}$ k は定数

2 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$

3 $\displaystyle\int \boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx}$

例 5.2

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}dx &= \int \frac{x^2-3x+2}{x^2}dx = \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx \\ &= \int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2} \\ &= x - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C\end{aligned}$$

[注意] 上の計算のように，記号 $\displaystyle\int$ が取れた段階で積分定数 C をつければよい．
また，$\displaystyle\int 1\,dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くことがある．

積分変数が x 以外の場合も，同様にして不定積分が求められる．

練習 5.2 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-2)(x^2-3)}{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1-y-y^2}{y^2}dy$

(6) $\displaystyle\int \left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2 dt$

C 三角関数，指数関数の不定積分

三角関数，指数関数の微分については，次のことを学んだ．

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \log a$$

これらのことから，次の公式が得られる．

三角関数，指数関数の不定積分

$$\boldsymbol{\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C}$$
$$\boldsymbol{\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,}$$
$$\boldsymbol{\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C}$$

例 5.3 (1)
$$\begin{aligned}\int (2\sin x + 3\cos x)dx &= 2\int \sin x\,dx + 3\int \cos x\,dx \\ &= -2\cos x + 3\sin x + C\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \qquad \leftarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \tan x - x + C\end{aligned}$$

例 5.4
$$\int (3e^x - 2^x)dx = 3\int e^x\,dx - \int 2^x\,dx = 3e^x - \frac{2^x}{\log 2} + C$$

練習 5.3 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (\cos x - 2\sin x)dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx$

(3)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 1}$　　　　(4)　$\displaystyle\int (2 - \tan\theta)\cos\theta\, d\theta$

(5)　$\displaystyle\int 4^x\, dx$　　　　(6)　$\displaystyle\int (3^x - 2e^x)dx$

5.1.2　置換積分法と部分積分法

A　$f(ax+b)$ の不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を利用して，合成関数 $f(ax+b)$ の不定積分を求めることを考えよう．

$F'(x) = f(x)$ であるから，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = aF'(ax+b) = af(ax+b)$$

← 93 ページの練習 3.12(1) を参照

が成り立つ．したがって，次の公式が得られる．

$f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$，$a \neq 0$ とするとき

$$\int \boldsymbol{f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$$

例 5.5　(1)　$\displaystyle\int\sqrt{3x+2}\,dx=\int(3x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$

$$=\frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$$

(2)　$\displaystyle\int\cos 4x\,dx=\frac{1}{4}\sin 4x+C$

(3)　$\displaystyle\int e^{1-2x}\,dx=-\frac{1}{2}e^{1-2x}+C$

練習 5.4 次の不定積分を求めよ.

(1)　$\displaystyle\int(3x+1)^4\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int(4x-3)^{-3}\,dx$

(3)　$\displaystyle\int\sqrt{2x+1}\,dx$　　(4)　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$

(5)　$\displaystyle\int\sin 2x\,dx$　　(6)　$\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx$

B 置換積分法

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．x が t の関数として $x=g(t)$ と表されるとき，$y=F(x)$ は t の関数でもある．$g(t)$ が微分可能なとき

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$ ← 合成関数の微分法

y をそれぞれ不定積分で表すと，次の**置換積分法**の公式が成り立つ．

置換積分法 (1)

1 $$\boldsymbol{\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt}\qquad \text{ただし}\quad x=g(t)$$

[注意] $g'(t)=\dfrac{dx}{dt}$ であるから，$\displaystyle\int f(x)\,dx=\int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt$ と書くことができる．

例題 5.1 不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

【解】 $\sqrt{1-x}=t$ とおくと　$x=1-t^2,\ \dfrac{dx}{dt}=-2t$

よって
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,dx&=\int(1-t^2)t(-2t)dt=2\int(t^4-t^2)dt\\&=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{2}{15}t^3(3t^2-5)+C\\&=-\frac{2}{15}(3x+2)(1-x)\sqrt{1-x}+C\end{aligned}$$

練習 5.5 例題 5.1 の不定積分を，$1-x=t$ とおいて求めよ．

練習 5.6 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x(1-x)^4\,dx$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

C $f(g(x))g'(x)$ の不定積分

前ページの置換積分法 (1) の公式において，左辺と右辺を入れ替えて，積分変数 t，x をそれぞれ x，u に書き変えると，次の公式が得られる．

置換積分法 (2)

$$\mathbf{2}\quad \int \boldsymbol{f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du} \qquad \text{ただし}\quad u = g(x)$$

［注意］ $g'(x) = \dfrac{du}{dx}$ を形式的に $g'(x)\,dx = du$ と書き表すと，公式が覚えやすい．

例題 5.2 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int \cos^2 x \sin x\,dx$

【解】 (1)　$(x^2+1)' = 2x$ であるから，$x^2+1 = u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}(x^2+1)'dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

(2)　$(\cos x)' = -\sin x$ であるから，$\cos x = u$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin x\,dx &= -\int \cos^2 x(-\sin x)dx \\ &= -\int \cos^2 x(\cos x)'dx = -\int u^2\,du \\ &= -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

練習 5.7 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$ (4) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

198 ページの公式 **2** において，とくに $f(u)=\dfrac{1}{u}$ とすると

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{u}du = \log|u|+C = \log|g(x)|+C$$

となる．すなわち，次の公式が成り立つ．

3　$$\boldsymbol{\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)|+C}$$

例題 5.3 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}dx$　　(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

【解】 (1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}dx = \int \frac{(x^2-3)'}{x^2-3}dx = \log|x^2-3|+C$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\log|\cos x|+C$

練習 5.8 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

D 部分積分法

積の微分法の公式　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
によると，$f(x)g(x)$ は右辺の関数の原始関数であるといえる．

よって　$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

これより，次の**部分積分法**の公式が成り立つ．

部分積分法

4　$$\boldsymbol{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

例題 5.4 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ．

【解】
$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x(\sin x)'\,dx &&\leftarrow \int x\,g'(x)\,dx \text{ の形と考える．}\\ &= x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx \\ &= x\sin x - \int \sin x\,dx \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

部分積分法の公式を利用すると，とくに次のことが成り立つ．

$$\int x\,g'(x)\,dx = x\,g(x) - \int g(x)\,dx$$

練習 5.9 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

(2) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$

応用例題 5.1 次の不定積分を求めよ.

$$\int \log x\,dx$$

考え方　$\log x = (\log x)\cdot 1 = (\log x)\cdot(x)'$ と考える.

【解】

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int (\log x)\cdot(x)'\,dx \\ &= (\log x)\cdot x - \int (\log x)'\cdot x\,dx \\ &= x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

練習 5.10 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log 2x\, dx$

(2) $\displaystyle\int \log x^2\, dx$

(3) $\displaystyle\int x \log x\, dx$

5.1.3　いろいろな関数の不定積分

A 分数関数の不定積分

分数関数の不定積分を求めるとき，式をうまく変形すると，これまでに学んだ不定積分の公式が利用できるようになる場合がある．

例題 5.5 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$

【解】 (1) $\dfrac{2x^2+1}{x+1} = 2x-2+\dfrac{3}{x+1}$ であるから

← $2x^2+1$ を $x+1$ で割った商が $2x-2$，余りが 3 である．

$$\int \frac{2x^2+1}{x+1}dx = \int\left(2x-2+\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$= x^2-2x+3\log|x+1|+C$$

(2) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$ であるから

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}(\log|x-1|-\log|x+1|)+C$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

例題 5.5(2) のように，1 つの分数式を簡単な分数式の差や和の形で表わす変形を，**部分分数に分解**するという．部分分数の分子を決めるには，恒等式の性質が用いられる．

練習 5.11 $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ を満たす定数 a，b の値を求めよ．また，この結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ を求めよ．

練習 5.12 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$

B 三角関数に関する不定積分

三角関数に関する積分では，次の公式がよく使われる．

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$

また，積を和や差の形にするには，次の等式が使われる．

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

$\longleftarrow$ 右辺を計算すれば左辺を導くことができる．

例題 5.6 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 3x\cos x\,dx$

【解】 (1)

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(2)

$$\int \sin 3x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

練習 5.13 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2 3x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \cos 2x \cos 3x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \sin 3x \sin x\,dx$

5.1.4 補充問題

1 次のことを示せ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\tan x} - x + C$

2 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + 1}$

(3)　$\displaystyle\int \frac{\log(x+1)}{x^2}dx$　　(4)　$\displaystyle\int (\sin x + \cos x)^2\, dx$

(5)　$\displaystyle\int \sin^3 x\, dx$ (6)　$\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$

3 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ を，次の各方法により求めよ．

(1) 分母と分子に $1-\cos x$ をかける．

(2) $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ を利用する．

4 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ.

［1］　$F'(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$　　　　［2］　$F(0) = 0$

【答】

1 $\left[\ (1)\ \left(-\dfrac{1}{\tan x}\right)'$ より　(2) $\dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$ と (1) を利用 $\right]$

2 (1) $-\sqrt{4-x^2}+C$　(2) $x-\log(e^x+1)+C$　(3) $-\dfrac{\log(x+1)}{x}+\log\dfrac{|x|}{x+1}+C$

(4) $x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$　(5) $-\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x+C$　(6) $\dfrac{1}{32}\sin 4x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{8}x+C$

3 (1) $-\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\sin x}+C$　(2) $\tan\dfrac{x}{2}+C$

4 $F(x) = \log\left|\dfrac{2(x+1)}{x+2}\right|$　　$[C = \log 2]$

5.2　定積分

5.2.1　定積分とその基本性質

A 定積分

数学IIで学んだように，関数 $f(x)$ の**定積分** $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$ は，次のようになる．a をこの定積分の**下端**，b を**上端**という．

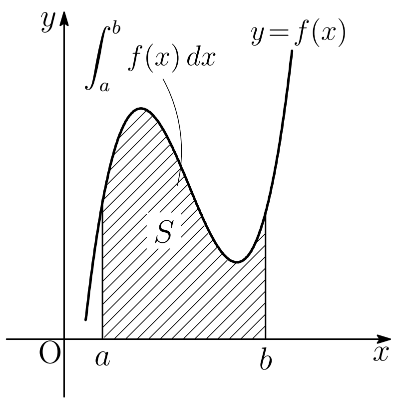
定積分

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを，$f(x)$ を a から b まで**積分する**という．

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を表す．



例 5.6　(1)　$\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(4\sqrt{4}-1) = \frac{14}{3}$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta = \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0-(-1) = 1$

練習 5.14 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$　　(6) $\displaystyle\int_{-1}^1 2^x\,dx$

B 定積分の基本性質

数学 II で学んだように，定積分について，次のことが成り立つ．

定積分の性質

1 $\displaystyle \int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad k$ は定数

2 $\displaystyle \int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3 $\displaystyle \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

4 $\displaystyle \int_a^a f(x)\,dx = 0$

5 $\displaystyle \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

6 $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

例 5.7 (1)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3x-4}{x^2}dx &= \int_1^2 \left(\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx = 3\int_1^2 \frac{dx}{x} - 4\int_1^2 \frac{dx}{x^2}\\ &= 3\Big[\log x\Big]_1^2 - 4\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2\\ &= 3(\log 2-\log 1) - 4\left(-\frac{1}{2}+1\right)\\ &= 3\log 2 - 2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx &= \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx\\ &= \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

練習 5.15 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t})dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\,d\theta$

C 絶対値のついた関数の定積分

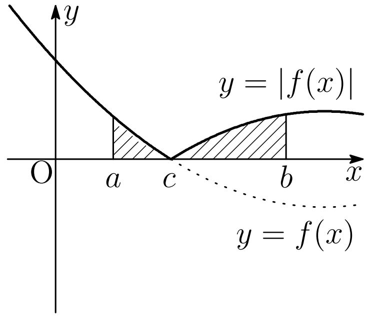
関数 $f(x)$ が

$$a \leqq x \leqq c \text{ で } \quad f(x) \geqq 0, \qquad c \leqq x \leqq b \text{ で } \quad f(x) \leqq 0$$

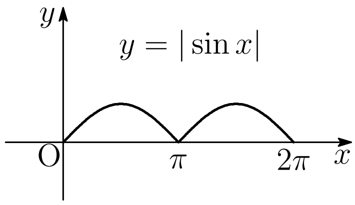
であるとき，絶対値のついた関数 $|f(x)|$ を a から b まで積分するには，次のように区間を分けて行えばよい．

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b \{-f(x)\}\,dx$$

この定積分は，$y=|f(x)|$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を表している．



例題 5.7 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$ を求めよ．



【解】 $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

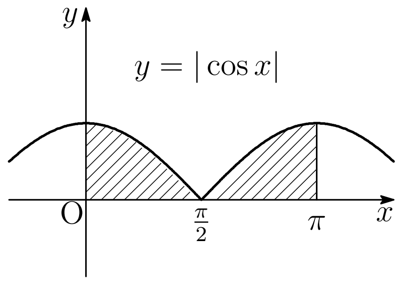
$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

であるから

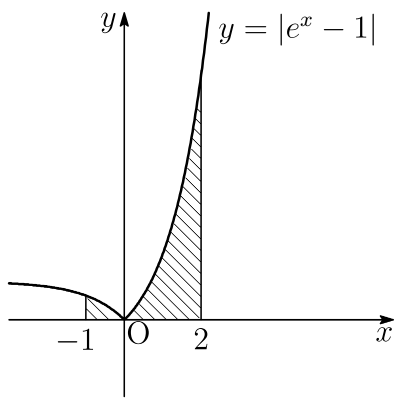
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx &= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)dx \\ &= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} \\ &= (1+1)+(1+1) = 4\end{aligned}$$

練習 5.16 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos x| dx$

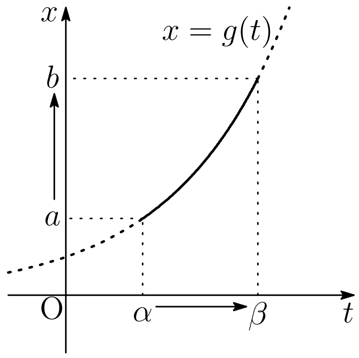


(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |e^x - 1| dx$



5.2.2　置換積分法と部分積分法

A 定積分の置換積分法



$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．x が微分可能な関数 $g(t)$ を用いて，$x=g(t)$ と表されるとき，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt}F(g(t))=f(g(t))g'(t)$$

となる．$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ とすると

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt=\Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta=F(g(\beta))-F(g(\alpha))$$
$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

となる．したがって，次の公式が成り立つ．

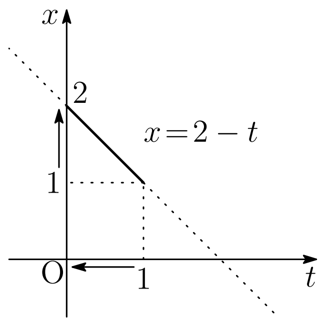
定積分の置換積分法

$x=g(t)$ とおくとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt}$$

x	$a\longrightarrow b$
t	$\alpha\longrightarrow\beta$

例 5.8 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x(2-x)^4\,dx$ を求めてみよう．



$2-x=t$ とおくと　$x=2-t$，$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x と t の対応は右のようになる．

x	$1\longrightarrow 2$
t	$1\longrightarrow 0$

したがって

$$\int_1^2 x(2-x)^4\,dx=\int_1^0(2-t)t^4(-1)dt=\int_0^1(2t^4-t^5)dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{6}t^6\right]_0^1=\frac{2}{5}-\frac{1}{6}=\frac{7}{30}$$

練習 5.17 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$

(2) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

例題 5.8 $a > 0$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ を求めよ.

【解】 $x = a\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$

x と θ の対応は右のようになる.
この範囲では $\cos\theta \geqq 0$ である.
また，$a > 0$ であるから

x	$0 \longrightarrow a$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)} \\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta\end{aligned}$$

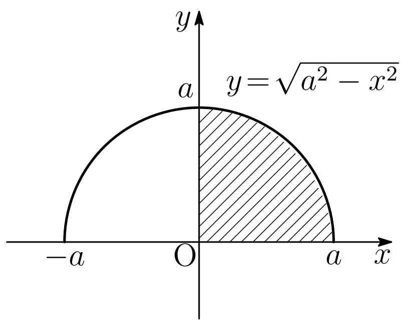
したがって

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\theta)a\cos\theta\,d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

[注意] 例題 5.8 の定積分において，被積分関数

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

のグラフは，右の図のような半円を表す.
すなわち，定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ は，半径 a の四分円の面積を表す.



練習 5.18 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

応用例題 5.2 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ．

考え方 $x=\tan\theta$ とおいて，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する．

【解】 $x=\tan\theta$ とおくと $\quad \dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右のようになる．

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

したがって

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

[注意] 被積分関数が $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ のときは，$x=a\tan\theta$ とおくとよい．

練習 5.19 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$

B 偶関数と奇関数の定積分

関数 $f(x)$ において
$f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を**偶関数**といい，
$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を**奇関数**という[2].
たとえば，x^2，$\cos x$ は偶関数であり，x，$\sin x$ は奇関数である．

練習 5.20 次の関数の中から，偶関数，奇関数を選べ．

① x^3　② x^4+3　③ $\tan x$　④ $x+\cos x$

[2]偶関数のグラフは y 軸について対称で，奇関数のグラフは原点について対称である．

関数 $f(x)$ が偶関数または奇関数のとき，次のことが成り立つ．

偶関数，奇関数と定積分

1 偶関数 $f(x)$ について $\displaystyle\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx}$

2 奇関数 $f(x)$ について $\displaystyle\boldsymbol{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$

[証明] 常に次の等式が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \cdots ①$$

$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ において $x=-t$ とおくと $\qquad \dfrac{dx}{dt}=-1$

また，x と t の対応は右のようになる．

x	$-a \longrightarrow 0$
t	$a \longrightarrow 0$

よって
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)\,dt\\ &= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt\\ &= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx\end{aligned}$$

ゆえに，① から次の等式が得られる．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \{f(-x)+f(x)\}dx$$

右辺において，$f(x)$ が偶関数ならば $f(-x)=f(x)$，奇関数ならば $f(-x)=-f(x)$ であるから，**1**，**2** が成り立つ． **[証終]**

例 5.9 (1) $f(x)=\cos x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

(2) $f(x)=\sin x$ は奇関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$$

練習 5.21 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

C 定積分の部分積分

不定積分の部分積分法の公式から，次の公式が得られる．

定積分の部分積分法

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

例題 5.9 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を求めよ．

【解】

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'dx\\ &= \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\sin x\,dx\\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\\ &= \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

練習 5.22 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{1} x e^{x} \, dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{2} x \log x \, dx$

練習 5.23 部分積分法によって，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)\,dx$ を求めよ．

5.2.3 定積分のいろいろな問題

A 定積分と導関数

a を定数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は x の関数である．

$F'(t)=f(t)$ とすると $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a)$

この両辺の関数を x で微分すると，次の公式が得られる．

定積分と導関数

a が定数のとき $\displaystyle\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$

練習 5.24 次の関数を x で微分せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$ (2) $\displaystyle\int_1^x t\log t\,dt$

応用例題 5.3 関数 $G(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$ の導関数を求めよ．

考え方　積分変数 t と異なる x は定数として扱う．すなわち，

$\displaystyle\int_0^x x\cos t\,dt = x\int_0^x \cos t\,dt$ となる．

また，$\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$ は x の関数である．

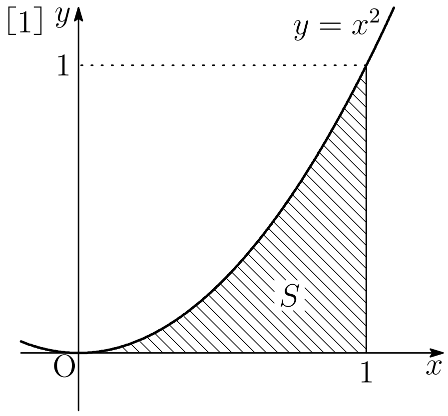
【解】　$G(x)=x\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt - \int_0^x t\cos t\,dt$ であるから

$$\begin{aligned} G'(x) &= (x)'\int_0^x \cos t\,dt + x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt\right) - \frac{d}{dx}\int_0^x t\cos t\,dt \\ &= \int_0^x \cos t\,dt + x\cdot\cos x - x\cos x = \Big[\sin t\Big]_0^x = \sin x \end{aligned}$$

練習 5.25 次の関数 $G(x)$ について，$G'(x)$，$G''(x)$ を求めよ．

$$G(x)=\int_0^x (x-t)e^t\,dt$$

B 定積分と和の極限

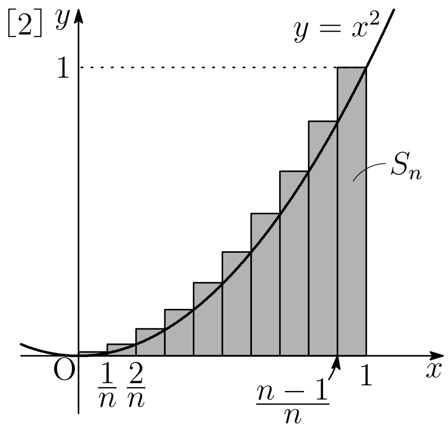


関数 $f(x) = x^2$ について，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積 S を考えてみよう．

定積分を用いて S を求めると

$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

である．



一方，図［2］のように区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して n 個の長方形を作り，それらの面積の和を S_n とする．$n \longrightarrow \infty$ のとき，この長方形の集まりは図［1］の斜線で示した図形に限りになく近づくから，$S_n \longrightarrow S$ と予想される．

実際に計算してみよう．

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

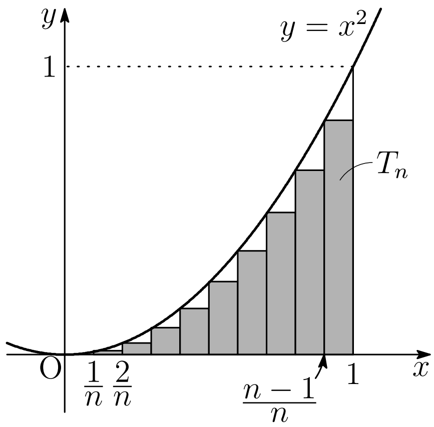
であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ が成り立つことが計算で確かめられた．

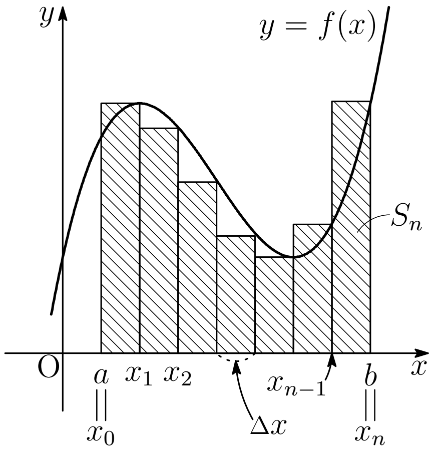
練習 5.26 前ページの S_n の代わりに，右の図［3］の長方形の面積の和 T_n を考えても，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = S$ となることを示せ．

［3］



これまでに示したような方法で，与えられた図形の面積を求めることを，一般に**区分求積法**という．

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x) \geqq 0$ のとき，面積 $S = \int_a^b f(x)\,dx$ を区分求積法で考えてみよう．



区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その分点の座標を，a に近い方から順に

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

とし，次のようにおく．

$$a = x_0,\ b = x_n,\ \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

このとき，右の図の斜線部分の面積 S_n は

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

であり，$n \longrightarrow \infty$ のとき $S_n \longrightarrow S$ と考えられる．

一般に，常に $f(x) \geqq 0$ と仮定しなくても，次のことが成り立つ．

区分求積法と定積分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{ただし}\quad \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x$$

上の公式で，とくに $a=0$，$b=1$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \longleftarrow \Delta x = \frac{1}{n},\ x_k = \frac{k}{n}$$

応用例題 5.4 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ を求めよ．

考え方 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形を作るために，$\dfrac{1}{n}$ をくくり出す．

【解】 この極限値を S とする．

$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)
\end{aligned}
$$

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とすると，求める極限値は

$$
S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2
$$

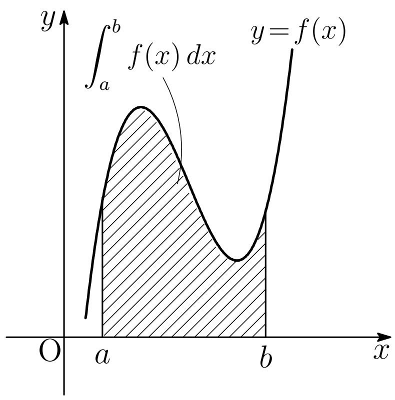
練習 5.27 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\sqrt{\frac{3}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$

C 定積分と不等式

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続なとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を考えると，次のことが成り立つ．



> $f(x) \geqq 0$ で，常には $f(x)=0$ でない
>
> ならば　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$

さらに，次のことが成り立つ．

定積分と不等式

> 区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について
>
> $$\boldsymbol{f(x) \geqq g(x)}\quad \textbf{ならば}\quad \boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx}$$
>
> 等号は，常に $f(x)=g(x)$ のときに成り立つ．

例題 5.10 次のことを示せ．

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{x^2+x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

【解】 (1)　$x \geqq 0$ のとき　$x^2+x+1 \leqq (x^2+x+1)+x$

すなわち　$x^2+x+1 \leqq (x+1)^2$

両辺とも正なので，逆数をとって　$\dfrac{1}{x^2+x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2)　(1) の不等式では，常には $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ でないから

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

右辺は　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

練習 5.28 次のことを示せ.

(1) $x \geqq 0$ のとき $\quad \dfrac{1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{1}{x+1}$

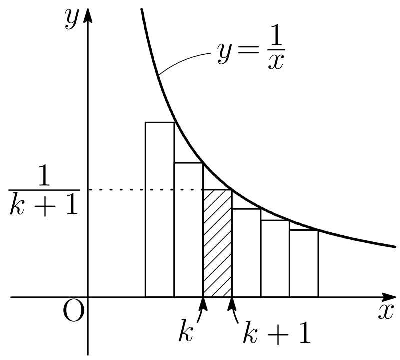
(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$

応用例題 5.5 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ．

$$\log n > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad \text{ただし，} n \text{ は} 2 \text{以上の自然数}$$

考え方 自然数 k に対して，$k<x<k+1$ のとき $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{k+1}$ であるから，
$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx > \int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,dx$ が成り立つ．

[証明] 自然数 k に対して，$k<x<k+1$ のとき



$$\frac{1}{x}>\frac{1}{k+1}$$

よって

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx > \int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,dx$$

すなわち $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} > \frac{1}{k+1}$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ として，辺々を加えると

$$\int_1^2\frac{dx}{x}+\int_2^3\frac{dx}{x}+\int_3^4\frac{dx}{x}+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{dx}{x} > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

ここで

$$\text{左辺}=\int_1^n\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^n=\log n \qquad \leftarrow \log 1 = 0$$

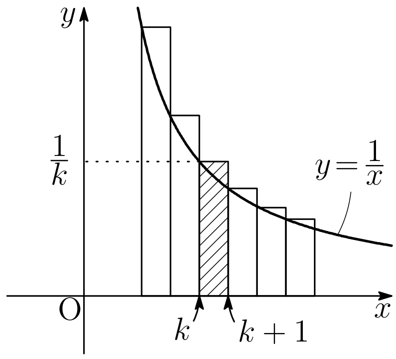
したがって

$$\log n > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

[証終]

練習 5.29 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)\qquad \text{ただし，}n\text{ は自然数}$$



5.2.4 補充問題

5 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\,d\theta$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos^2 2\theta\,d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(3-x)^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log x\,dx$

6 a を正の定数とする．次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx$

7 等式 $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ を証明せよ．

8 次の関数を x で微分せよ．ただし，(2) では $x>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_x^{2x} \sin\theta\,d\theta$ (2) $\displaystyle\int_x^{x^2} \log t\,dt$

【答】

5 (1) $\dfrac{20}{3}$ (2) $\log 2$ (3) $\dfrac{7}{12}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ (4) $2-\log 3$ (5) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

(6) $\dfrac{32}{3}\log 2-\dfrac{28}{9}$ $\left[(6)\ \left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\log x\right]_1^4-\displaystyle\int_1^4\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x}\,dx\right]$

6 (1) $\dfrac{\pi a^4}{8}$ (2) $2a\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$

7 $\left[\ a+b-x=t \text{ とおくと } \displaystyle\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_b^a f(t)(-1)dt\ \right]$

8 (1) $2\sin 2x-\sin x$ (2) $(4x-1)\log x$

5.3　積分法の応用

5.3.1　面積

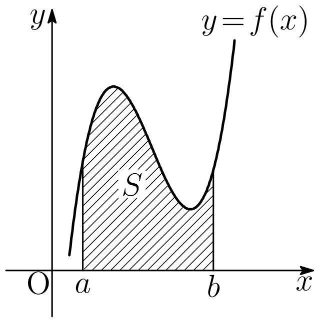
A 曲線 $y = f(x)$ と面積

212 ページで述べたように，次のことが成り立つ．

曲線 $y = f(x)$ と面積

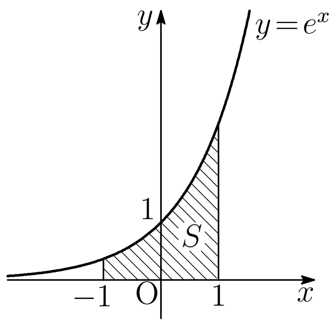
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



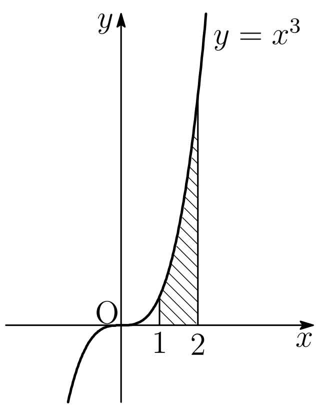
例 5.10 曲線 $y = e^x$ と x 軸および 2 直線 $x = -1$, $x = 1$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{-1}^{1} e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$$

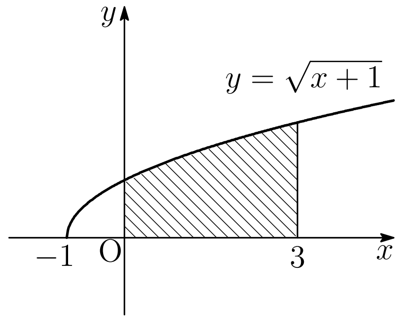


練習 5.30 次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y = x^3$，$x = 1$，$x = 2$

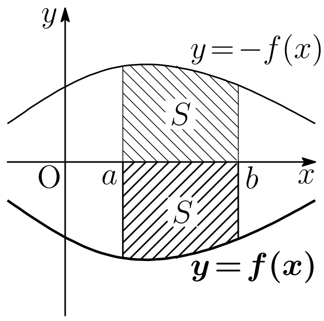


(2) $y=\sqrt{x+1}$,　$x=0$,　$x=3$



上の公式において，区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \leqq 0$ のときは，S は次の式で表される．

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \{-f(x)\}\,dx}$$



例題 5.11 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$$y=x(x+2)^2$$

【解】 この曲線と x 軸の交点の x 座標は，方程式

$$x(x+2)^2=0$$

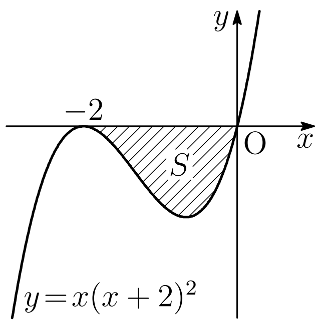
を解いて

$$x=0,-2$$

区間 $-2 \leqq x \leqq 0$ では，常に

$$y \leqq 0$$

であるから，求める面積 S は，

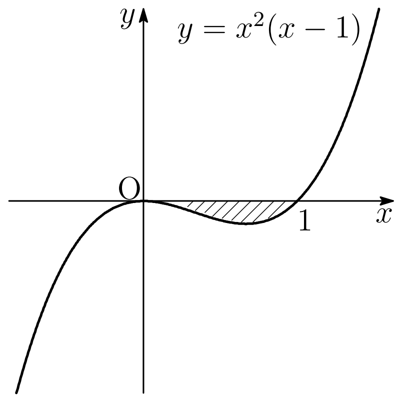


$$S=\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)^2\}\,dx=-\int_{-2}^{0}(x^3+4x^2+4x)\,dx$$

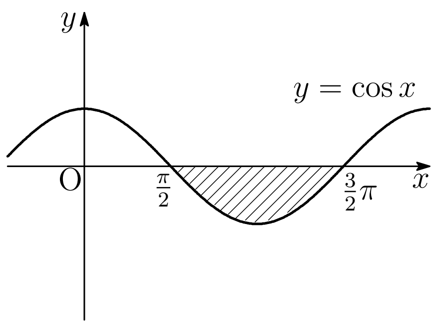
$$=-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

練習 5.31 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $y = x^2(x-1)$

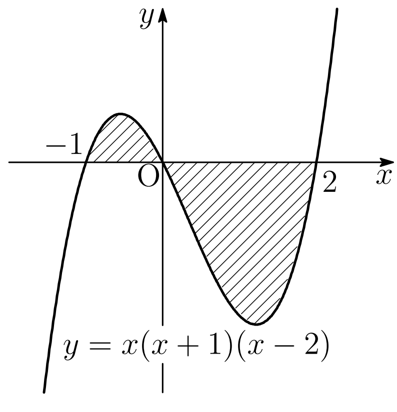


(2) $y = \cos x \ \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$



練習 5.32 次の曲線と x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ.

$$y = x(x+1)(x-2)$$

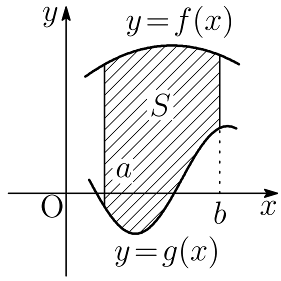


また，数学 II で学んだように，次のことが成り立つ．

2 曲線間の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

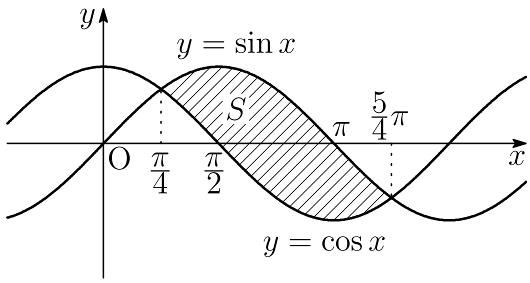
$$\boldsymbol{S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx}$$



例題 5.12　2 つの曲線

$$y = \sin x,\quad y = \cos x$$

で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を求めよ．



【解】 2 つの曲線の共有点の x 座標は，

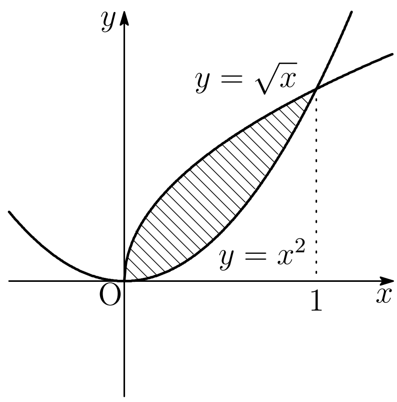
$x = \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$ である．

斜線部分の範囲では，$\sin x \geqq \cos x$ であるから

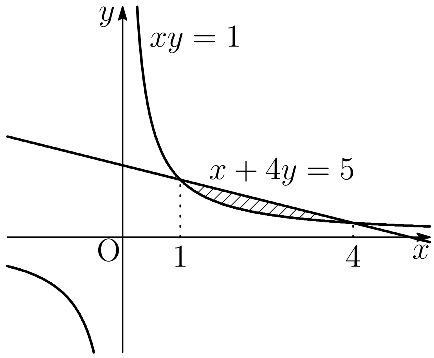
$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x)\,dx = \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = 2\sqrt{2}$$

練習 5.33　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1)　$y = x^2$，$y = \sqrt{x}$



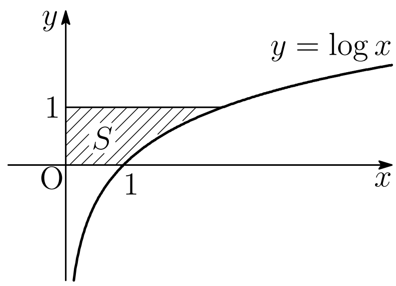
(2) $x+4y=5$，$xy=1$



y の関数 $x=g(y)$ で表される曲線については，次のことが成り立つ．

> 区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は
> $$\boldsymbol{S=\int_c^d g(y)\,dy}$$

例題 5.13 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．



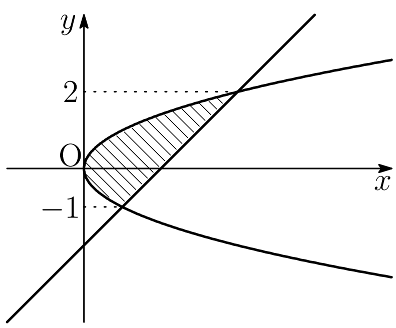
【解】 $y=\log x$ より　　$x=e^y$

常に $e^y>0$ であるから

$$S=\int_0^1 e^y\,dy=\Big[\ e^y\ \Big]_0^1=e-1$$

練習 5.34 次の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

$$x=y^2,\ \ x=y+2$$

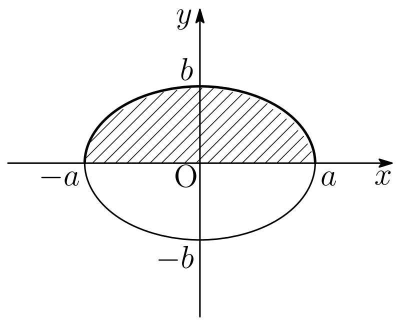


B 曲線で囲まれた図形の面積

応用例題 5.6 $a>0,\ b>0$ とする．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ によって囲まれた図形の面積は πab であることを示せ．

> **考え方** この楕円は x 軸に関して対称である．$y \geqq 0$ のとき，方程式を y について解き，$y \geqq 0$ の部分を 2 倍すればよい．

【解】 求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい．
$y \geqq 0$ のとき，方程式を y について解くと



$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

よって

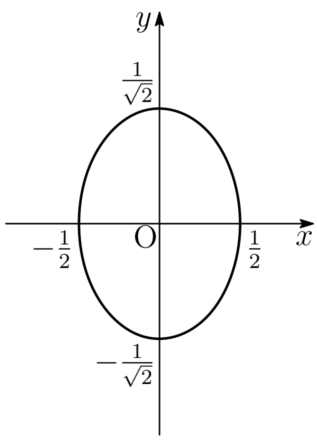
$$S=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の円の面積の半分である．

したがって $\qquad S=\dfrac{2b}{a}\cdot\dfrac{\pi a^2}{2}=\pi ab$

練習 5.35 次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

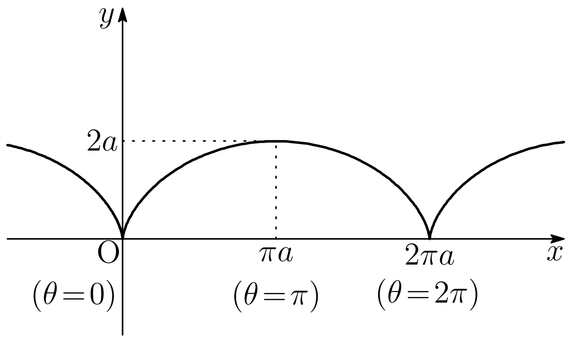
$$4x^2+2y^2=1$$



aを正の定数とする．θを媒介変数として，媒介変数表示

$$x = a(\theta - \sin\theta),$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

の表す曲線は，右の図のようになる．この曲線を**サイクロイド**という．



応用例題 5.7 $a>0$ とする．サイクロイド

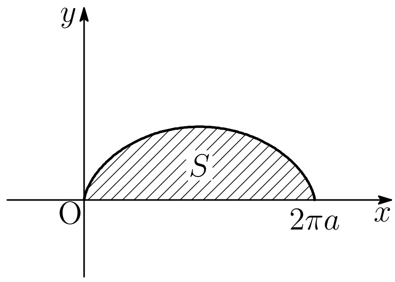
$$x = a(\theta - \sin\theta),\quad y = a(1 - \cos\theta)\quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

考え方　曲線が x 軸と交わる点の x 座標は，$x=0,\ 2\pi a$ であるから，

$S = \displaystyle\int_0^{2\pi a} y\,dx$ である．置換積分法によって求める．

【解】求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x = a(\theta - \sin\theta)$ のとき

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$$

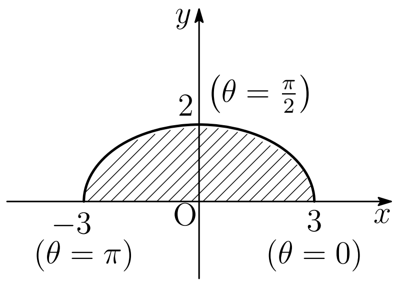
で，x と θ の対応は右のようになる．したがって，置換積分法によって

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
θ	$0 \longrightarrow 2\pi$

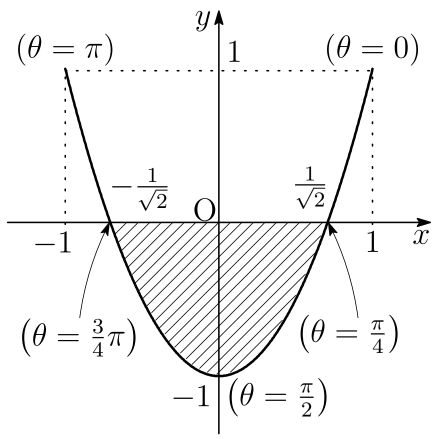
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_0^{2\pi} y\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\ &= a^2\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

練習 5.36 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $x = 3\cos\theta,\ y = 2\sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$



(2) $x = \cos\theta,\ y = \cos 2\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$

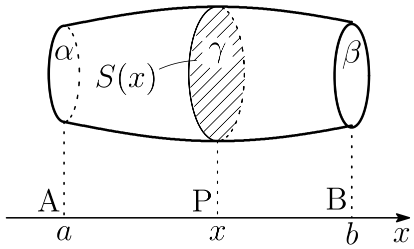


5.3.2　体積

A 定積分と体積

立体図形の体積を計算する方法を考えよう．

232 ページでは，平面図形の面積を区分求積法によって計算し，定積分を和の極限で表した．立体図形の体積についても，区分求積法の考えを利用して定積分で表すことができる．



右の図のように，1 つの立体が x 軸に垂直な 2 平面 α，β に挟まれているとする．この部分の体積を V とし，2 平面 α，β と x 軸との交点 A，B の座標を，それぞれ a，b とする．ただし，$a < b$ である．
このとき，座標が x である点 P を通り x 軸に垂直な平面 γ による立体の切り口の断面積を $S(x)$ とすると，体積 V は次の式で与えられる．

断面積 $S(x)$ と立体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \int_a^b S(x)\,dx} \qquad \text{ただし}\quad a < b$$

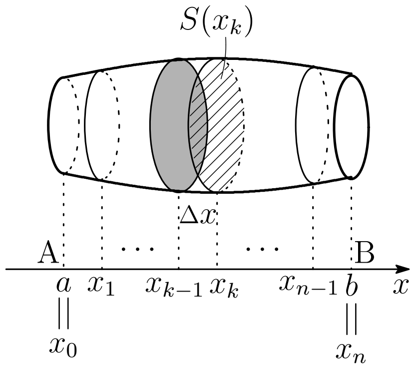
【解説】 区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分し，その分点の座標を a に近いほうから順に

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

とする．また，

$$a = x_0,\ b = x_n,\ \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

とおく．



そして，各分点を通り x 軸に垂直な平面でこの立体を分割する．
このとき

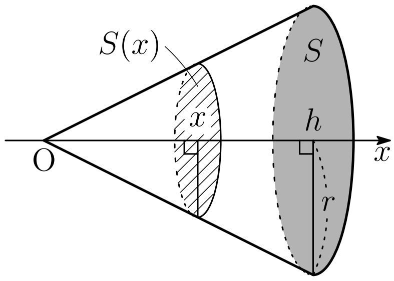
$$V_n = S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + \cdots + S(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

とすると，$n \longrightarrow \infty$ のとき $V_n \longrightarrow V$ と考えられる．
したがって，232 ページの「区分求積法と定積分」の関係から

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)\,dx$$

[終]

例題 5.14 底面の半径が r，高さが h の直円錐（えんすい）の体積 V は，$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ で与えられることを示せ．



【解】 この直円錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点にとる．

座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面による直円錐の切り口の断面積を $S(x)$ とする．

この断面は円であり，底面の円と相似である．また，底面の面積を S とすると，$S = \pi r^2$ である．

断面と底面の相似比は $x : h$ であるから，面積の比は

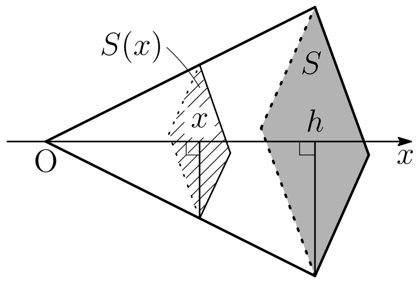
$$S(x) : S = x^2 : h^2$$

←相似比が $a : b$ ならば面積の比は $a^2 : b^2$

よって　$$S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$$

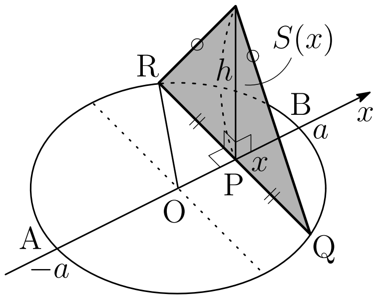
したがって　$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

練習 5.37 底面積が S，高さが h の角錐の体積 V は，$V = \frac{1}{3}Sh$ で与えられることを示せ．



例題 5.15 半径 a の円 O がある．この直径 AB 上の点 P を通り直線 AB に垂直な弦 QR を底辺とし，高さが h である二等辺三角形を，円 O の面に対して垂直に作る．P が A から B まで動くとき，この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

【解】 円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとる．
点 P の座標を x とすると



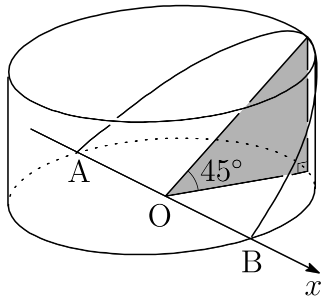
$$\mathrm{QR} = 2\mathrm{PR} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

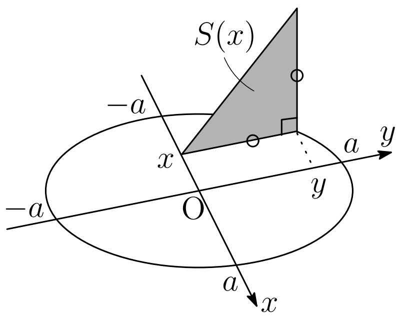
よって，線分 QR を底辺とする二等辺三角形の面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{a^2 - x^2} \times h = h\sqrt{a^2 - x^2}$$

したがって
$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} S(x)\,dx = \int_{-a}^{a} h\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \\ &= h \times \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi}{2}a^2 h \end{aligned}$$

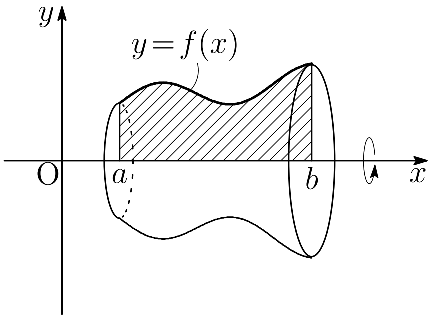
練習 5.38 底面の半径が a で高さも a である直円柱がある．この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を2つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ．





B 回転体の体積

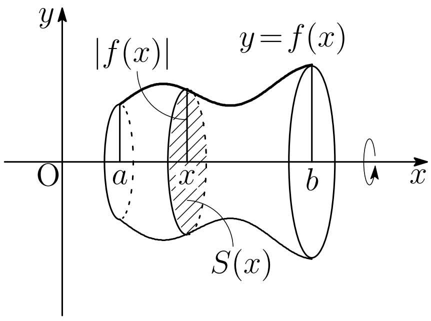
右の図のように，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう．



点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を切ると，その断面は半径が $|f(x)|$ の円である．
よって，その断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x) = \pi|f(x)|^2 = \pi\{f(x)\}^2$$

であるから，次の公式が成り立つ．



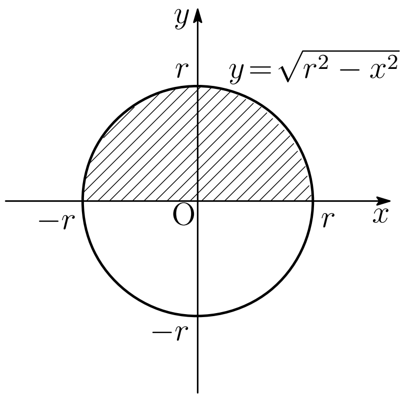
回転体の体積

$$\boldsymbol{V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx = \pi\int_a^b y^2\,dx} \qquad \text{ただし}\quad a < b$$

例題 5.16 半径 r の球の体積 V は，$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ で与えられることを示せ．

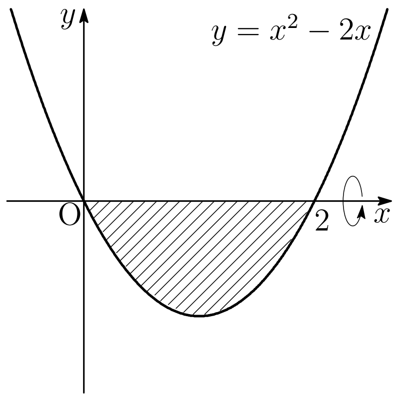
【解】 半径 r の球は，半円 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転するとできる．
よって

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-r}^{r} y^2\,dx \\ &= \pi\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi\left[\, r^2x - \frac{x^3}{3} \,\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

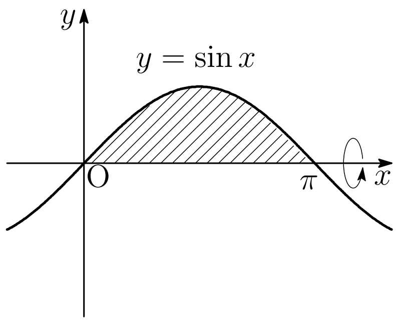


練習 5.39 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

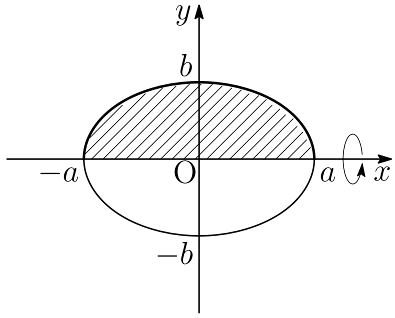
(1) $y = x^2 - 2x$



(2) $y = \sin x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$



練習 5.40 $a > 0$，$b > 0$ とする．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

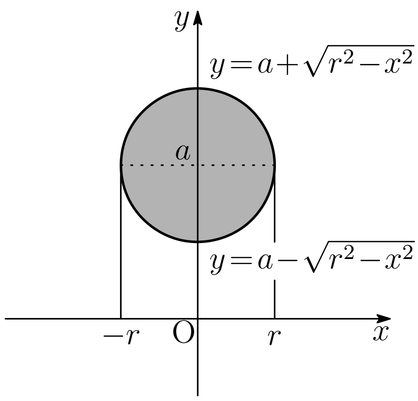


応用例題 5.8 $0 < r < a$ とする．円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

考え方 方程式を y について解く．V は 2 つの回転体の体積の差になる．

【解】 $x^2+(y-a)^2=r^2$ を y について解くと

$$y = a \pm \sqrt{r^2-x^2}$$



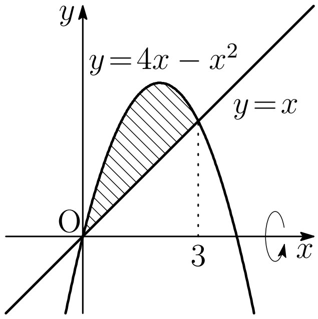
半円 $y=a+\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x=-r$，$x=r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_1，半円 $y=a-\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x=-r$，$x=r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とすると

$$V_1 = \pi\int_{-r}^{r}(a+\sqrt{r^2-x^2})^2\,dx, \quad V_2 = \pi\int_{-r}^{r}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2\,dx$$

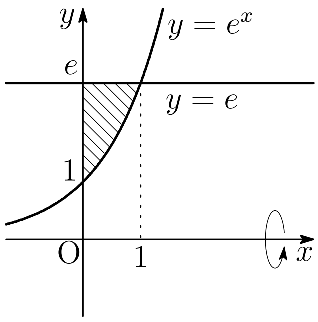
よって
$$\begin{aligned} V = V_1 - V_2 &= 4\pi a\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx \\ &= 4\pi a \times \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 r^2 a \end{aligned}$$

[注意] 応用例題 5.8 の回転体を円環体またはトーラスという．

練習 5.41 放物線 $y = 4x - x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

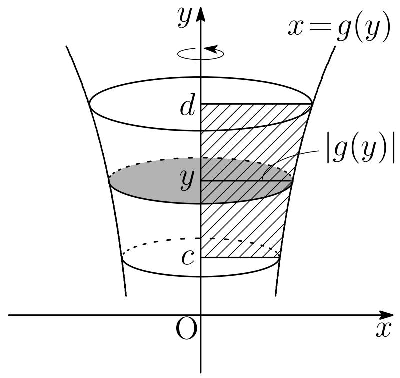


練習 5.42 曲線 $y = e^x$ と y 軸および直線 $y = e$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．



C y 軸の周りの回転体の体積

右の図のように，曲線 $x = g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y = c$，$y = d$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう．
この場合も，x 軸の周りの回転体の体積と同様に考えれば，次の公式が成り立つ．



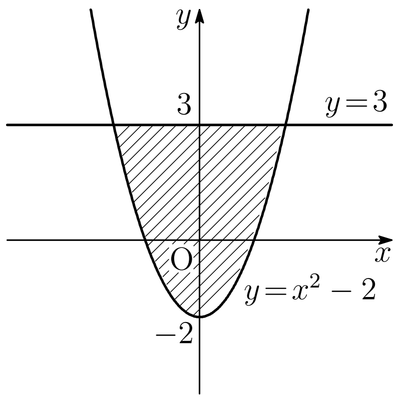
y 軸の周りの回転体の体積

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d \{g(y)\}^2\,dy = \pi \int_c^d x^2\,dy} \qquad \text{ただし}\quad c < d$$

例題 5.17 放物線 $y = x^2 - 2$ と直線 $y = 3$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

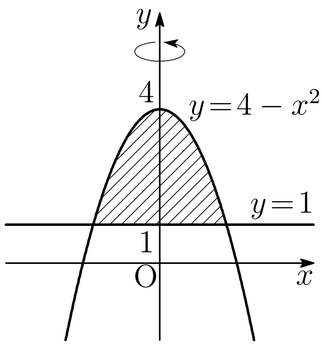
【解】

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{3} x^2\,dy \\ &= \pi \int_{-2}^{3} (y+2)\,dy \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2} + 2y \right]_{-2}^{3} \\ &= \frac{25}{2}\pi \end{aligned}$$

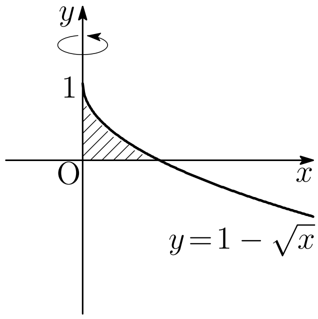


練習 5.43 次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(1) $y=4-x^2$，$y=1$

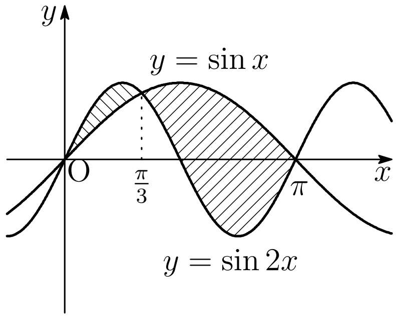


(2) $y=1-\sqrt{x}$，x 軸，y 軸

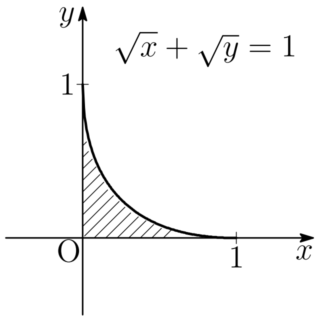


5.3.3 補充問題

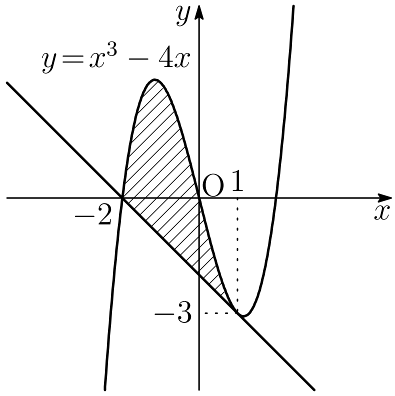
9 $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ．



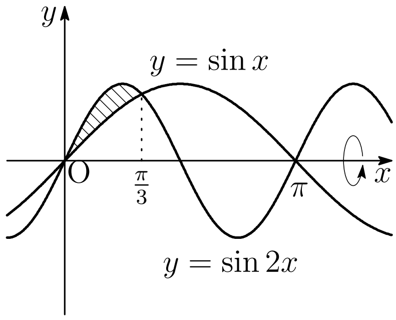
10 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．



11 曲線 $y = x^3 - 4x$ と，その上の点 $(1, -3)$ における接線とで囲まれた部分の面積を求めよ．



12 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．



【答】

9 $\dfrac{5}{2}$ $\left[\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\, dx\right]$

10 $\dfrac{1}{6}$ $\left[\displaystyle\int_0^{1} (1 - \sqrt{x})^2\, dx\right]$

11 $\dfrac{27}{4}$ $\left[\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\, dx\right]$

12 $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\pi$ $\left[\pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2x\, dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, dx\right]$

5.4　章末問題

5.4.1　章末問題 A

1 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $e^x\sqrt{e^x+1}$

(2) $\dfrac{x}{(x-1)^3}$

(3) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$

(4) $\cos^5 x$

(5) $\dfrac{1}{e^x - e^{-x}}$

(6) $2x\log(x^2+1)$

2 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x \, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^4 |(x-4)(x-1)^3| \, dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

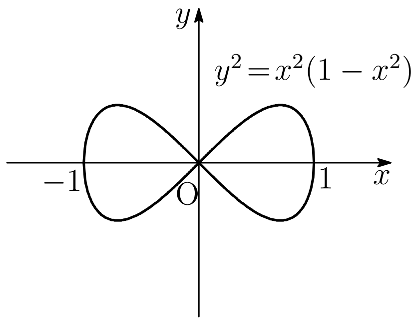
(6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$

3 m，n を自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt\,dt$ を，$m \neq n$，$m = n$ の場合に分けて求めよ．

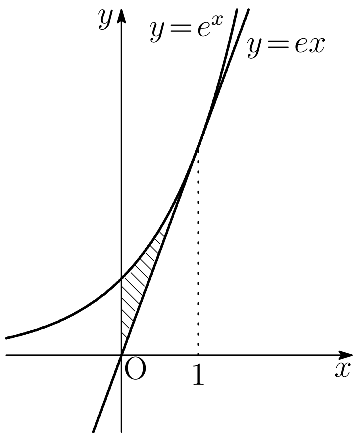
4 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

5 曲線 $y^2=x^2(1-x^2)$ で囲まれた部分の面積の和を求めよ．



6 曲線 $y=e^x$ とこの曲線上の点 $(1,\ e)$ における接線および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．また，この部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．



5.4.2 章末問題B

7 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

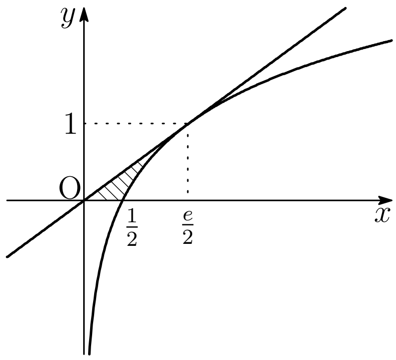
8 a を定数とする．定積分 $I = \displaystyle\int_0^1 (e^x - ax)^2\,dx$ を最小にする a の値と，I の最小値を求めよ．

9 連続な関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$ を証明せよ．

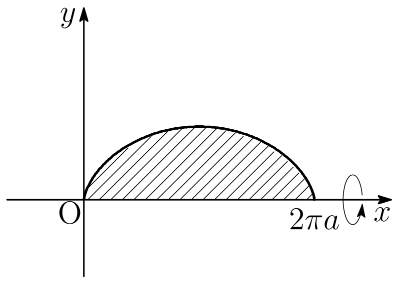
10 等式 $f(x) = x + \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

11 a を正の定数とする．$x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ が等式 $\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)\,dt = \log x$ を満たすように，$f(x)$ と a の値を定めよ．

12 原点から曲線 $y=\log 2x$ に引いた接線とこの曲線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．



13 サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ．ただし，$a>0$ とする．



ヒント

7　(1) $\dfrac{1}{x^2(x+3)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+3}$ と分解.　(2) $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$

9　置換積分法を利用する.　**10** $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ は定数なので $=a$ とおく.

【答】

1 (1) $\dfrac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C$　(2) $-\dfrac{2x-1}{2(x-1)^2}+C$　(3) $\log\dfrac{(x-2)^2}{|x-1|}+C$

(4) $\sin x-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$　(5) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{|e^x-1|}{e^x+1}+C$

(6) $(x^2+1)\log(x^2+1)-x^2+C$

2 (1) $\dfrac{1}{6}$　(2) $\log(e+1)-\log 2$　(3) $\dfrac{2e^3+1}{9}$　(4) $\dfrac{131}{10}$　(5) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$　(6) $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

[(4) $\displaystyle\int_0^1 (x-4)(x-1)^3\,dx-\int_1^4 (x-4)(x-1)^3\,dx$　(5) $x=\sin\theta$ とおく

(6) $t=\tan\theta$ とおく]

3 $m\neq n$ のとき 0　$m=n$ のとき π

4 $2(\sqrt{2}-1)$ [極限値を定積分で表すと $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$]

5 $\dfrac{4}{3}$ [この部分は x 軸，y 軸について対称である.　$S=4\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$]

6 $S=\dfrac{e}{2}-1$，$V=\dfrac{e^2-3}{6}\pi$　[$S=\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx-\int_0^1 ex\,dx$]

7 (1) $\dfrac{1}{9}\log\left|\dfrac{x+3}{x}\right|-\dfrac{1}{3x}+C$　(2) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$

8 $a=3$ で最小値 $\dfrac{1}{2}(e^2-7)$　[$I=\dfrac{1}{3}a^2-2a+\dfrac{1}{2}(e^2-1)$]

9 [左辺 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$ ここで，$\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおく]

10 $f(x)=x-\pi$　[$\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt=a$ とおくと $\displaystyle\int_0^{\pi}(t+a)\sin t\,dt=a$]

11 $f(x)=\dfrac{1}{2x}\ (x>0)$，$a=1$　$\left[\ 2xf(x^2)=\dfrac{1}{x}\right.$ から　$f(x^2)=\dfrac{1}{2x^2}$，また等式において $x=\sqrt{a}$ を代入すると　$\left.\dfrac{1}{2}\log a=0\ \right]$

12 $\dfrac{e}{4}-\dfrac{1}{2}$　$\left[\right.$ 接点の座標は $\left(\dfrac{e}{2},\ 1\right)$，面積は $\left.\dfrac{1}{2}\times\dfrac{e}{2}\times 1-\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\log 2x\,dx\ \right]$

13 $5\pi^2a^3$

$\left[\ V=\pi\displaystyle\int_0^{2\pi a}y^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos\theta)^2\cdot a(1-\cos\theta)\,d\theta\right.$

$=\pi a^3\displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta$

ここで，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=0$ など $\left.\right]$