第 2 章　極限

2.1　数列の極限

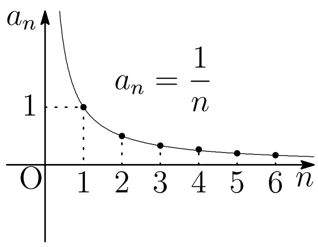
2.1.1　数列の極限

A 数列と極限

項がどこまでも限りなく続く数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$ を**無限数列**といい，記号 $\{a_n\}$ で表す．a_1 を初項，a_n を第 n 項という．

たとえば，無限数列　$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots$　①

においては，n を限りなく大きくすると，第 n 項は 0 に限りなく近づく．
このように，無限数列において，n を限りなく大きくするに従って第 n 項がどのようになっていくかを調べることにしよう．



今後，数列といえば無限数列を意味するものとする．
一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n がある値 α に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は α に**収束**する，または $\{a_n\}$ の**極限**は α であるという．また，値 α を $\{a_n\}$ の**極限値**という．
このことを，記号では次のように書き表す[1]．

$$n \longrightarrow \infty \text{ のとき } \quad a_n \longrightarrow \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

例えば，数列 ① では，次のようになる．

$$n \longrightarrow \infty \text{ のとき } \quad \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

[1] 記号 ∞ は「無限大」と読む．∞ は，値すなわち数を表すものではない．

例 2.1 (1) 数列 1.1，1.01，1.001，$\cdots$，$1+(0.1)^n$，$\cdots$
は，1に収束する．
すなわち，この数列の極限値は1である．

(2) 数列 -0.1，0.01，-0.001，$\cdots$，$(-0.1)^n$，$\cdots$
では，各項の符号は負，正，負，$\cdots$ と交互に変わるが，数列は0に収束する．
すなわち，この数列の極限値は0である．

1つの数 c が無限に続く数列 c，c，c，$\cdots$，c，$\cdots$ は c に収束し，その極限値は c である．

練習 2.1 次の数列の極限値をいえ．

(1) $\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\cdots$，$\dfrac{n+1}{n}$，$\cdots$

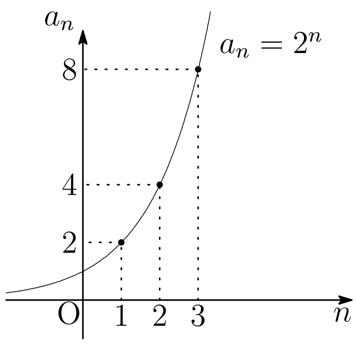
(2) -1，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$，$\cdots$，$\dfrac{(-1)^n}{n}$，$\cdots$

(3) $\cos\pi$，$\cos 3\pi$，$\cos 5\pi$，$\cdots$，$\cos(2n-1)\pi$，$\cdots$

B 収束しない数列

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散**するという．発散する数列には次のように3つの場合がある．

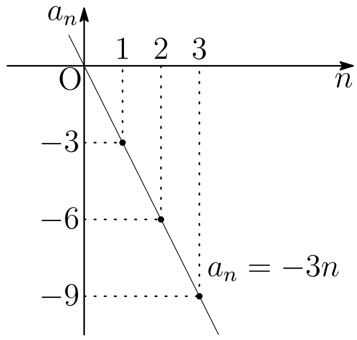
［1］ 数列 2，4，8，$\cdots$，2^n，$\cdots$
では，n を限りなく大きくすると，2^n の値は，限りなく大きくなる．



［1］のような場合，数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散**する，または $\{a_n\}$ の**極限は正の無限大**であるといい，次のように書き表す．

$$n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow \infty \qquad \text{または} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

［2］ 数列 $-3, -6, -9, \cdots, -3n, \cdots$
では，n を限りなく大きくすると，$-3n$ の値は負で，絶対値は限りなく大きくなる．



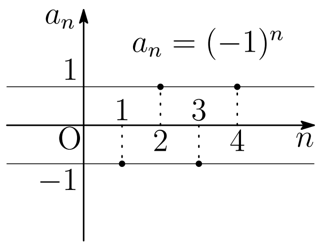
［2］のような場合，数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散**する，または $\{a_n\}$ の**極限は負の無限大**であるといい，次のように書き表す．

$$n \longrightarrow \infty \text{ のとき } \quad a_n \longrightarrow -\infty \qquad \text{または} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

［1］,［2］の数列については，次のように書き表される．

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} (-3n) = -\infty$$

［3］ 数列 $-1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$
では，n を限りなく大きくすると，$(-1)^n$ の値はある値に収束しないし，正の無限大にも負の無限大にも発散しない．



［3］のような場合，数列は**振動**するという．

数列の収束，発散についてまとめると，次のようになる．

数列の収束・発散

収束	値 α に収束	$\cdots$	極限は	α
発散	正の無限大に発散	$\cdots$	極限は	∞
	負の無限大に発散	$\cdots$	極限は	$-\infty$
	振動	$\cdots$	極限は	ない

練習 2.2 第 n 項が次の式で表される数列について，その極限を調べよ．

(1) $2n$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(3) $-n^2$ (4) $1 + (-1)^n$

C 数列の極限の性質 (1)

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束するとき，次のことが成り立つ.

数列の極限の性質 (1)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする.

1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} k\,a_n = k\,\alpha$ ただし，k は定数

2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$

3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ただし，$\beta \neq 0$

例 2.2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = -3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} (3a_n + b_n) = 3\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 3\cdot 2 + (-3) = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - 2) = \lim_{n\to\infty} a_n - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n + 4}{a_n - 3} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} (b_n + 4)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - 3)} = \frac{-3 + 4}{2 - 3} = -1$$

練習 2.3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = -2$ のとき，次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (3a_n + 2b_n)$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - 1)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ (5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n + 5}{2a_n - 1}$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに発散する場合には，数列 $\{a_n + b_n\}$，$\{a_n - b_n\}$，$\{a_n b_n\}$，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ は，発散することも収束することもある.

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$$

は明らかである．$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ と $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ はどうなるだろうか．

例 2.3 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$　← 分母が収束するように分母と分子を n で割る．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = 0$　← 分母が収束するように分母と分子を n^2 で割る．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-3n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\frac{3}{n}\right) = \infty$　← $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right) = 1$

練習 2.4 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$

例題 2.1 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

【解】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

練習 2.5 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

D 数列の極限の性質 (2)

数列の極限について，さらに次のことが成り立つ．

数列の極限の性質 (2)

5　すべての n について $a_n \leqq b_n$ のとき

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

6　すべての n について $a_n \leqq b_n$ のとき

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば　$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

7　すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば　$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

［注意］　上の **5** において，常に $a_n < b_n$ であっても，$\alpha = \beta$ の場合がある．

たとえば，$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$，$b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ では，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$ である．

また，性質 **7** を「はさみうちの原理」ということがある．

例題 2.2 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}$ を求めよ．

【解】 常に $-1 \leqq \sin\dfrac{n\pi}{3} \leqq 1$ であるから

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} \leqq \frac{1}{n}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ であるから　$\longleftarrow$ 性質 **7** を使う．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} = 0$$

練習 2.6 θ を定数とするとき，次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$

2.1.2　無限等比数列

A 数列 $\{r^n\}$ の極限

初項 r，公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限を調べてみよう．

［1］$r>1$ のとき　　$r=1+h$ とおくと　　$h>0$，$r^n=(1+h)^n$

二項定理により　　$(1+h)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$

$$=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n$$

$h>0$ であるから　　$r^n\geqq 1+nh$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ であるから，前ページの性質 **6** により

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$$

［2］$r=1$ のとき　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}1^n=\lim_{n\to\infty}1=1$

［3］$0<r<1$ のとき　　$\dfrac{1}{r}=s$ とおくと　　$s>1$，$r^n=\dfrac{1}{s^n}$

［1］により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s^n=\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s^n}=0$

［4］$r=0$ のとき　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}0^n=\lim_{n\to\infty}0=0$

［5］$-1<r<0$ のとき　　$-r=s$ とおくと　　$0<s<1$，$|r^n|=s^n$

［3］により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s^n=0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$

［6］$r=-1$ のとき　　数列 $\{r^n\}$ は，-1，1，-1，$\cdots$ となる．

よって，数列 $\{r^n\}$ は振動する．すなわち，極限はない．

［7］$r<-1$ のとき　　$-r=s$ とおくと　　$s>1$，$r^n=(-1)^ns^n$

［1］により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}s^n=\infty$ であるが，項の符号は交互に変わる．

よって，数列 $\{r^n\}$ は振動する．すなわち，極限はない．

数列 $\{r^n\}$ の極限についてまとめると，次のようになる．

数列 $\{r^n\}$ の極限

$r > 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

$r = 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

$|r| < 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

$r \leqq -1$ のとき　**振動する　$\cdots$　極限はない**

例 2.4　(1)　数列 $\{(\sqrt{2}\,)^n\}$ では $\sqrt{2} > 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\,)^n = \infty$

(2)　数列 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ では $\left|-\dfrac{1}{2}\right| < 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

(3)　数列 $\{(-2)^n\}$ では $-2 < -1$ であるから，極限はない．

練習 2.7 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ．

(1)　$(\sqrt{3}\,)^n$　　(2)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

(3)　$\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$　　(4)　$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

B 数列 $\{r^n\}$ の極限の応用

上で示した「数列 $\{r^n\}$ の極限」から，次のことが成り立つ．

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は，$-1 < r \leqq 1$ である．

例 2.5 数列 $\left\{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < \frac{x}{2} \leqq 1 \qquad \text{すなわち} \qquad -2 < x \leqq 2$$

練習 2.8 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ．またそのときの極限値を求めよ．

例題 2.3 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}$

【解】 (1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=1$$

← 分母が収束するように
分母と分子を 4^n で割る．

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\infty$$

← 分母が収束するように
分母と分子を 3^n で割る．

練習 2.9 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}$

応用例題 2.1 数列 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の場合について求めよ．

(1)　$|r|<1$　　(2)　$r<-1$

考え方　(2) 分母が収束するように $\dfrac{r^n}{1+r^n}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}$ と変形する．

【解】　(1)　$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$$

(2)　$r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

練習 2.10 数列 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ．

(1)　$r>1$　　(2)　$r=1$

(3)　$|r|<1$　　(4)　$r<-1$

C 漸化式で表された数列の極限

数列 $\{a_n\}$ が，$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式と初項 a_1 によって定義されるとき，この数列の極限を調べてみよう．

応用例題 2.2 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

考え方　極限値が存在するとしてその値を α とすると，$\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 1$ が成り立つ．この値 α を利用して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - \alpha) = 0$ を示す．

【解】 与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

← 漸化式と $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$ より $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$

よって，数列 $\{a_n - 2\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．
その初項は，$a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$ であるから

$$a_n - 2 = (-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - 2) = 0$

したがって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

[注意] $p \neq 1$ のとき，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ は $\alpha = p\alpha + q$ を満たす α を用いて，$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ の形に変形できる．

練習 2.11 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

2.1.3 無限等比級数

A 無限等比級数の収束・発散

無限数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$
の各項を順に＋の記号で結んだ式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad ①$$

を**無限級数**という．
この式を和の記号 $\sum$ を用いて，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$ と書き表すこともある．
無限級数 ① において，a_1 をその**初項**，a_n を**第 $\boldsymbol{n}$ 項**という．
無限数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す．

$$S_1 = a_1,\quad S_2 = a_1 + a_2,\quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

この S_n を無限級数 ① の第 n 項までの**部分和**という．
部分和 S_n を第 n 項として，新たに次の無限数列 $\{S_n\}$ を作る．

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

無限数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S のとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

となるとき，無限級数 ① は S に**収束**する，または無限級数 ① の**和**は S であるという．この和 S も $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$ で書き表すことがある．

無限級数の和

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ の部分和 S_n から作られる無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，この無限級数の和は S である．

無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 ① は**発散**するという．

例題 2.4 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

考え方　$\dfrac{1}{n(n+1)}$ は，次のような分数の差に分解できる．

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

【解】 第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

したがって，この無限級数は収束して，その和は1である．

練習 2.12 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots$$

B 無限等比級数

初項が a，公比が r の無限等比数列から作られる無限級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を，初項 a，公比 r の**無限等比級数**という．

無限等比級数の収束，発散について調べてみよう．

初項 a，公比 r の無限等比級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

の第 n 項までの部分和を S_n とする．$a = 0$ のとき，無限数列 $\{S_n\}$ は 0 に収束する．$a \neq 0$ のときは，次のようになる．

［1］ $r = 1$ のとき

$$S_n = a + a + a + \cdots + a = na$$

$a \neq 0$ であるから，無限数列 $\{S_n\}$ は発散する．

［2］ $r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n \qquad ① \end{aligned}$$

$|r| < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$

$r \leqq -1$ または $r > 1$ のとき，数列 $\{r^n\}$ は発散するから，① により無限数列 $\{S_n\}$ も発散する．

以上の結果をまとめると，次のようになる．

無限等比級数の収束，発散

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ の収束，発散は次のようになる．

$a \neq 0$ のとき

$|r| < 1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である．

$|r| \geqq 1$ ならば発散する．

$a = 0$ のとき　収束し，その和は 0 である．

例題 2.5 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ．

(1) 初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$　　(2) 初項 1，公比 $-\sqrt{2}$

【解】 (1) 公比について $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

(2) 公比について $\left|-\sqrt{2}\right| > 1$ であるから，発散する．

練習 2.13 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ．

(1) 初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$　　(2) 初項 $\sqrt{2}$，公比 $\sqrt{2}$

(3) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots$　　(4) $(\sqrt{2}+1) + 1 + (\sqrt{2}-1) + \cdots$

例題 2.6 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ.

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots$$

【解】 初項が x，公比が $1-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$$x = 0 \quad \text{または} \quad |1-x| < 1$$

$|1-x| < 1$ より　　$-1 < 1-x < 1$

よって　　$0 < x < 2$

したがって，求める x の値の範囲は　　$0 \leqq x < 2$

練習 2.14 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ.

(1) $1 + (2-x) + (2-x)^2 + \cdots$

(2) $x + x(2-x) + x(2-x)^2 + \cdots$

C 点の運動と無限等比級数

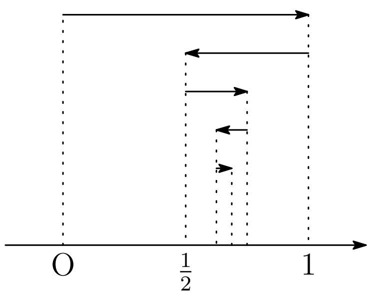
応用例題 2.3 数直線上で，点Pが原点Oから正の向きに1だけ進み，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2}$，そこから正の向きに $\dfrac{1}{2^2}$，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^3}$ と進む．以下，このような運動を限りなく続けるとき，点Pの極限の位置の座標を求めよ．

考え方 求める座標は，無限等比級数で表される．

【解】 点Pの座標は，順に次のようになる．

$$1,\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3},\ \cdots$$

よって，点Pの極限の位置の座標は，初項1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数で表される．



公比について $\left|-\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

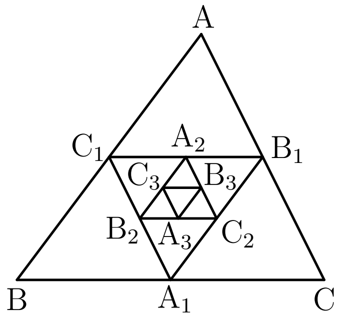
$$\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

したがって，点Pの極限の位置の座標は　$\dfrac{2}{3}$

練習 2.15 数直線上で，点Pが原点Oから正の向きに1だけ進み，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\dfrac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^6}$ と進む．以下，このような運動を限りなく続けるとき，点Pの極限の位置の座標を求めよ．

D 相似な図形と無限等比級数

応用例題 2.4 面積 a の $\triangle$ABC がある．その各辺の中点を結んで $\triangle \mathrm{A_1B_1C_1}$ を作り，次に $\triangle \mathrm{A_1B_1C_1}$ の各辺の中点を結んで $\triangle \mathrm{A_2B_2C_2}$ を作る．
このようにして無数の三角形 $\triangle \mathrm{A_1B_1C_1}$，$\triangle \mathrm{A_2B_2C_2}$，$\triangle \mathrm{A_3B_3C_3}$，$\cdots$，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$，$\cdots$ を作るとき，これらの面積の和 S を求めよ．



考え方　もとの三角形と新しく作られる三角形は相似であり，相似比は $2:1$，面積の比は $2^2:1^2$ である．

【解】 $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の面積を S_n とすると，

$$S_1=\frac{1}{4}a,\quad S_2=\frac{1}{4}S_1,\quad S_3=\frac{1}{4}S_2,\quad \cdots$$

である．よって，

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n+\cdots$$

は，初項 $\frac{1}{4}a$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数である．

公比について $\left|\frac{1}{4}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する．

よって，求める和 S は　$$S=\frac{\frac{1}{4}a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}a$$

練習 2.16 応用例題 2.4 において，$\triangle$ABC の周の長さが b であるとき，$\triangle \mathrm{A_1B_1C_1}$，$\triangle \mathrm{A_2B_2C_2}$，$\triangle \mathrm{A_3B_3C_3}$，$\cdots$，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$，$\cdots$ の周の長さの和 l を求めよ．

E 無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するとき，26 ページで学んだ数列の「数列の極限の性質 (1)」から，次の性質が得られる．

無限級数の性質

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T \text{ のとき}$$

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS$ ただし，k は定数

2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S + T,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = S - T$

例題 2.7 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ の和を求めよ．

【解】 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ は，初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である．

公比について，$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$，$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

よって $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

練習 2.17 次の無限級数の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n}\right)$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n - 3^n}{4^n}$

2.1.4　補充問題

1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-4n^3)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^{n+1}}{2^{2n}-3^n}$

2 次の無限級数は発散することを示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\cdots$$

3 循環小数 $0.3\dot{1}\dot{8}=0.3+0.018+0.00018+0.0000018+\cdots$ を，無限等比級数の和を利用して，分数に直せ.

【答】

1 (1) $-\infty$　(2) ∞　(3) 0

2 $\left[\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right.$ より，部分和は $\left.S_n=\sqrt{n+1}-1\ \right]$

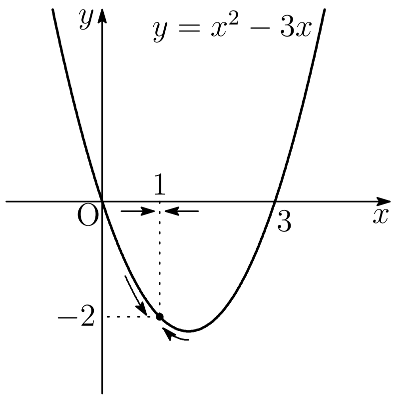
3 $\dfrac{7}{22}$ $\left[\ 0.3\dot{1}\dot{8}=0.3+0.018+0.00018+0.0000018+\cdots=0.3+\dfrac{0.018}{1-0.01}\ \right]$

2.2　関数の極限

2.2.1　関数の極限 (1)

A 関数の極限とその性質

関数 $f(x) = x^2 - 3x$ において，x が 1 と異なる値をとりながら 1 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は -2 に限りなく近づく．



一般に，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，この値 α を $x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限値**または**極限**という．このことを，次のように書き表す．

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \alpha \qquad \text{または} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

数列の場合と同様に，関数の極限について，次のことが成り立つ．

関数の極限の性質 (1)

$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする．

1　$\displaystyle\lim_{x \to a} k\,f(x) = k\,\alpha$　　ただし，k は定数

2　$\displaystyle\lim_{x \to a}\{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$，　$\displaystyle\lim_{x \to a}\{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$

3　$\displaystyle\lim_{x \to a}\{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

4　$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta \neq 0$

x の多項式で表される関数や分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数などについては，a が関数 $f(x)$ の定義域の値であれば，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

例 2.6　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2+3x-4)=2^2+3\cdot2-4=6$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{2x+1}{x+3}=\frac{2\cdot(-1)+1}{-1+3}=-\frac{1}{2}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\sqrt{x+4}=\sqrt{4}=2$

練習 2.18 次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}$　　(4)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}$

三角関数，指数関数，対数関数の極限については，58 ページ以降で扱っている．

B 極限値の計算

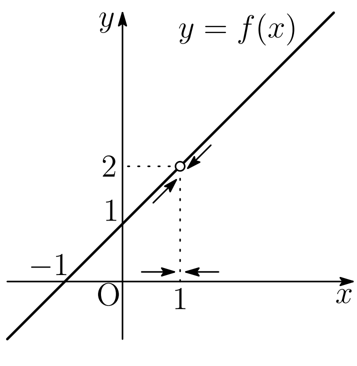
極限値の定義からもわかるように，関数 $f(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても，$x\longrightarrow a$ のときの極限値が存在することがある．

例 2.7 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，$x=1$ で定義されていないが，$x\neq1$ のとき

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

となる．よって

$$x\longrightarrow1 \text{ のとき }\ f(x)\longrightarrow2$$



例題 2.8 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)$

【解】 (1)
$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)=3$$

(2)
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2+x-2}{2(2+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2(2+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(2+x)}=\frac{1}{4}$$

練習 2.19 次の極限値を求めよ．ただし，(3) の a は 0 でない定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$

例題 2.9 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

← 分子を有理化すると, 約分できるタイプ.

【解】

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(x+4)-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

練習 2.20 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

応用例題 2.5 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ．

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$$

考え方　$x \longrightarrow 1$ のとき (分母) $\longrightarrow 0$ であるから，与えられた極限値が存在するためには，$x \longrightarrow 1$ のとき (分子) $\longrightarrow 0$ でなければならない．

【解】

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2 \qquad \cdots ①$$

において，$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ であるから

$$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$$

ゆえに，$a+b=0$ となり

$$b=-a \qquad \cdots ②$$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

① から $\dfrac{a}{2}=2$ であるから　　$a=4$

このとき，② から　　$b=-4$

(答) $a=4$，$b=-4$

練習 2.21 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{a\sqrt{x+4}+b}{x} = 1$$

C 極限が有限な値でない場合

関数の極限が有限な値でない場合について考えてみよう．

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば，

$x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は**正の無限大に発散**する

または　$x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限は** ∞ である

といい，次のように書き表す．

$x \longrightarrow a$ のとき　$f(x) \longrightarrow \infty$

または　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

また，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなるならば，

$x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は**負の無限大に発散**する

または　$x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限は** $-\infty$ である

といい，次のように書き表す．

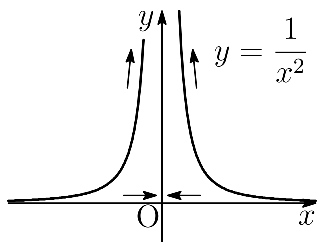
$x \longrightarrow a$ のとき　$f(x) \longrightarrow -\infty$

または　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

[注意] 関数の極限が ∞ または $-\infty$ の場合，これらを極限値とはいわない．

例 2.8 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$

$$\lim_{x\to 1}\left\{-\frac{1}{(x-1)^2}\right\} = -\infty$$



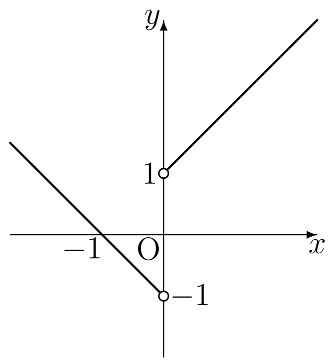
練習 2.22 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$

D 片側からの極限

関数 $f(x)$ の極限について，x が a に限りなく近づく場合，$x < a$ あるいは $x > a$ など片方の範囲だけで考える場合がある．

例 2.9 関数 $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x|}}$ の極限



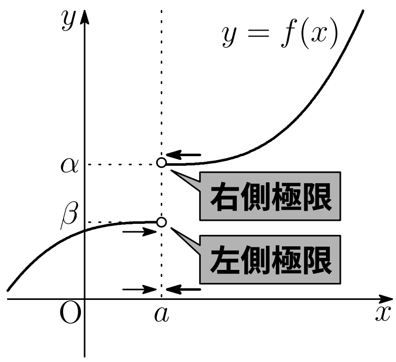
$x > 0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x} = x+1$$

$x < 0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2+x}{-x} = -x-1$$

$x > 0$ の範囲で x が 0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は 1 に限りなく近づく．
$x < 0$ の範囲で x が 0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は -1 に限りなく近づく．



一般に，$x > a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に近づくときの $f(x)$ の**右側極限**といい，次のように書き表す．

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$$

$x < a$ の範囲で x が a に限りなく近づくときの**左側極限**も同様に定義され，その極限値が β のとき，次のように書き表す．

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \beta$$

$a = 0$ のときは，$x \longrightarrow a+0$，$x \longrightarrow a-0$ を，それぞれ次のように書く．

$$x \longrightarrow +0, \qquad x \longrightarrow -0$$

例 2.10 関数 $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{|x|}$ は

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & (x < 0) \\ x - 1 & (x > 0) \end{cases}$$

と表されるから

$$\lim_{x \to +0} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to -0} f(x) = 1$$

例 2.10 の関数 $f(x)$ のように，$\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x)$ が存在してもそれらが一致しないとき，$x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限はない．

また，関数 $f(x)$ において，次のことが成り立つ．

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

練習 2.23 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x}$

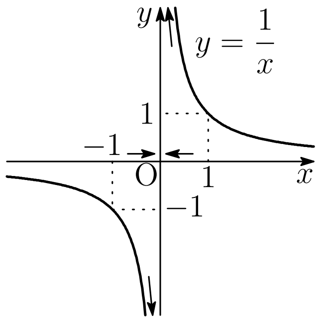
(3) $\displaystyle\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

右側極限，左側極限が ∞ または $-\infty$ になる場合には，たとえば次のように書き表す.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty$$

例 2.11 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ について



$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

練習 2.24 次の極限を求めよ.

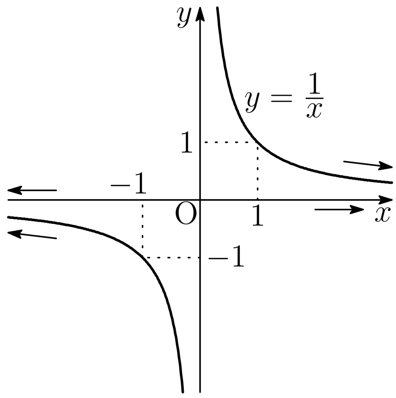
(1) $\displaystyle \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1}$

2.2.2　関数の極限 (2)

A $x \longrightarrow \infty$，$x \longrightarrow -\infty$ のときの極限

変数 x が，限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow \infty$ で書き表す．また，x が負であって，絶対値が限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow -\infty$ で書き表す．このような場合について，関数 $f(x)$ の極限を調べてみよう．



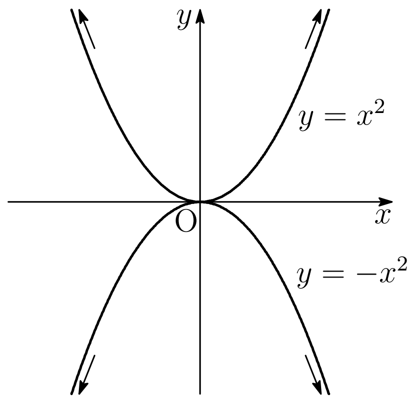
関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ において，$x \longrightarrow \infty$ のとき，$f(x)$ の値は 0 に限りなく近づく．また，$x \longrightarrow -\infty$ のときも，$f(x)$ の値は 0 に限りなく近づく．

一般に，$x \longrightarrow \infty$ のとき $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，この値 α を $x \longrightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の**極限値**または**極限**という．このことを，次のように書き表す．

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$$

$x \longrightarrow -\infty$ のときも同様に考える．たとえば，次のようになる．

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$x \longrightarrow \infty$ や $x \longrightarrow -\infty$ のときに，関数 $f(x)$ の極限が ∞ または $-\infty$ になる意味も，$x \longrightarrow a$ のときと同様に考える．

たとえば，次のようになる．

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty$$

例 2.12 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $\leftarrow \dfrac{\text{定数}}{\infty}$ の形

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3+1}=0$ $\leftarrow \dfrac{\text{定数}}{-\infty}$ の形

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-x^3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=-\infty$

練習 2.25 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x+x^3)$

例題 2.10 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}$

【解】 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x^2}}{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$ ← 分母が 2 次式のとき, x^2 で分母と分子を割るとよい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=-\infty$ ← 分母が 1 次式のとき, x で分母と分子を割るとよい.

練習 2.26 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

応用例題 2.6 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$

考え方 (1) 28 ページ例題 2.1 参照.
(2) $x=-t$ とおく． $x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ である．

【解】 (1)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+x)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-t}-t)(\sqrt{t^2-t}+t)}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t)-t^2}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{t\sqrt{1-\frac{1}{t}}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

練習 2.27 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)$

B 指数関数，対数関数の極限

指数関数の極限については，次のことがいえる．

$a > 1$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty,$$

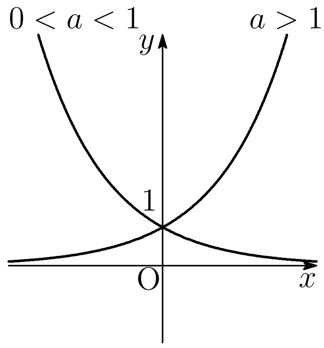
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

$0 < a < 1$ のとき

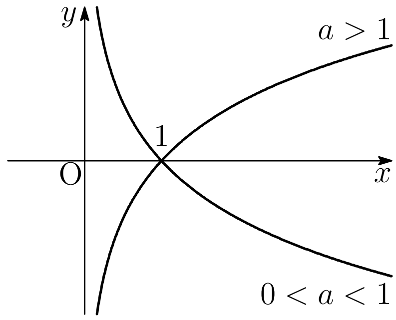
$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$

$y = a^x$ のグラフ



$y = \log_a x$ のグラフ



対数関数の極限については，次のことがいえる．

$a > 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$

$0 < a < 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_a x = \infty$

練習 2.28 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 x$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \log_{0.5} x$

例題 2.11 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-2x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{2x+3}{x}$

【解】 (1) $x \longrightarrow \infty$ のとき $-2x \longrightarrow -\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-2x} = 0$

(2) $\displaystyle\frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$ であるから，$x \longrightarrow \infty$ のとき　$\displaystyle\frac{2x+3}{x} \longrightarrow 2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{2x+3}{x} = \lim_{x\to\infty} \log_2 \left(2 + \frac{3}{x}\right) = \log_2 2 = 1$

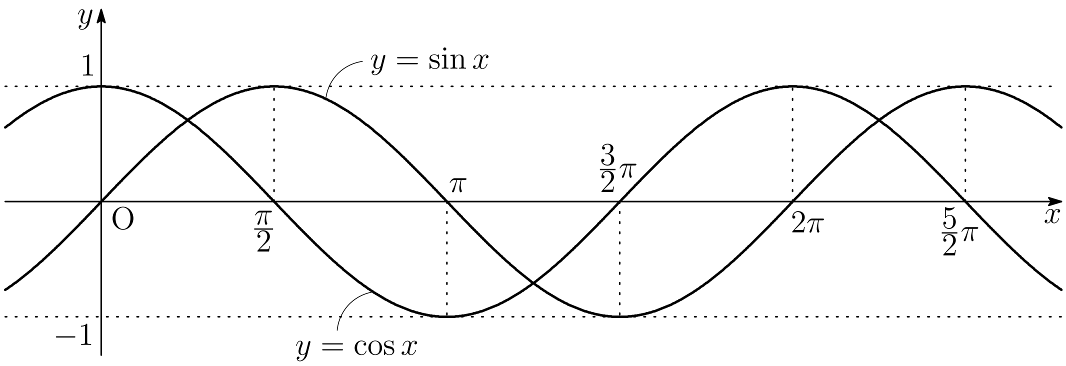
練習 2.29 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-3x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^{-2x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2}$

2.2.3　三角関数と極限

A 三角関数の極限

三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は周期関数であり，-1 と 1 の間の値を繰り返しとるから，$x \longrightarrow \infty$ のとき一定の値に近づくことはない．
すなわち，$x \longrightarrow \infty$ のときの $\sin x$，$\cos x$ の極限はない．
同様に，$x \longrightarrow \infty$ のときの $\tan x$ の極限はない．

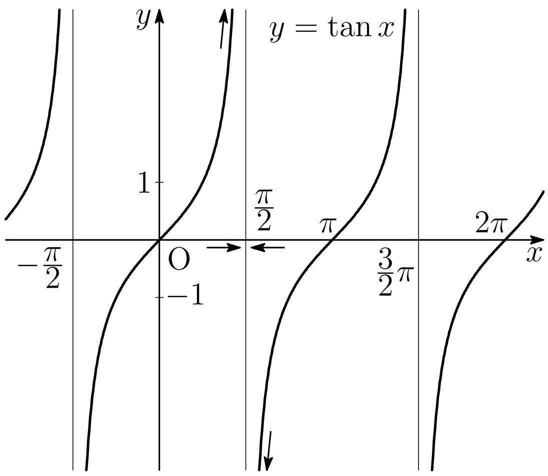


また，$\tan x$ については，グラフから次のことがいえる．

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty$$

[注意]　$x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$ のときの $\tan x$ の極限はない．



例 2.13　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \sin x = 0$,　　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$,　　$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \cos \frac{1}{x} = 1$

練習 2.30 次の極限を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \sin \frac{1}{x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \cos \frac{1}{x}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{x \to \pi} \tan x$

関数の極限には，次の性質もある．

関数の極限の性質 (2)

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする．

5 $x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば $\alpha \leqq \beta$

6 $x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$$

[注意] **6** の性質は,「常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$」を,「常に $f(x) < h(x) < g(x)$」としても成り立つ．

性質 **5**，**6** は，$x \longrightarrow \infty$，$x \longrightarrow -\infty$ のときにも成り立つ．
また，$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ のとき，次のことも成り立つ．
十分大きい x で常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

例題 2.12 極限値 $\lim_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$ を求めよ．

【解】 常に $0 \leqq \left| \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqq |x|$$

ここで，$\lim_{x \to 0} |x| = 0$ であるから $\lim_{x \to 0} \left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| = 0$

よって $\lim_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$

練習 2.31 次の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$ (2) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$ (3) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\cos x}{x}$

B　$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

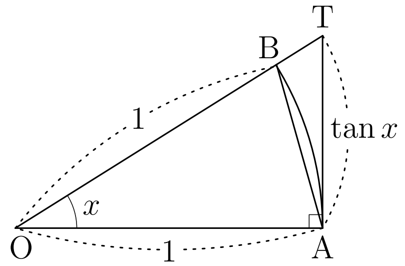
三角関数 $\sin x$ に関する極限については，次の重要な公式がある．

$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

[証明] $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

右の図のような，半径 1，中心角 x ラジアンの扇形 OAB を考える．
点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると，面積の大小について



$$\triangle\mathrm{OAB}<\text{扇形}\,\mathrm{OAB}<\triangle\mathrm{OAT}$$

が成り立つから　$\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x<\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$

よって　$\sin x<x<\tan x$

$\sin x>0$ より　$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$　　← 各辺を $\sin x$ で割った．

ゆえに　$1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$　　$\cdots$ ①

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき　$0<-x<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，① により

$$1>\frac{\sin(-x)}{-x}>\cos(-x)\qquad\text{すなわち}\qquad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

よって，このときも ① が成り立つ．
① において，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1$ であることと，極限の性質 **6** により

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

[証終]

例題 2.13 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

【解】 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=2\cdot 1=2$　　$\longleftarrow x\longrightarrow 0$ のとき $2x\longrightarrow 0$

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

練習 2.32 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

応用例題 2.7 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

考え方　$(\cos x+1)(\cos x-1)=\cos^2 x-1=-\sin^2 x$ である．
そこで，分母と分子に $\cos x+1$ をかけて式を変形する．

【解】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x+1}\right)=-1\cdot\frac{0}{1+1}=0\end{aligned}$$

練習 2.33 次の極限値を求めよ．

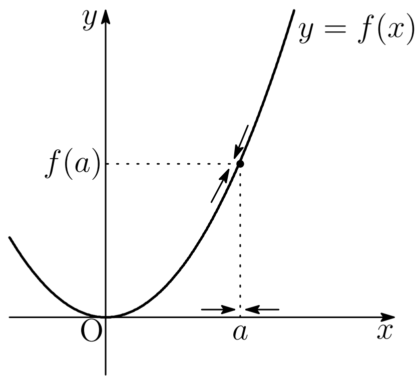
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

2.2.4　関数の連続性

A 関数の連続性

x の関数のうち，多項式で表された関数，無理関数，指数関数，対数関数，三角関数などは，定義域でそのグラフが切れ目のない曲線になるという性質をもつ．
それは，これらの関数 $f(x)$ では，定義域の任意の x の値 a に対して



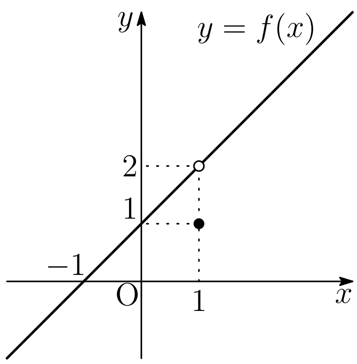
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つからである．

しかし，関数の中にはこのことが成り立たないものもある．

例 2.14 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$

とすると，関数 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり，$x = 1$ でグラフは切れている．



また　$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$，$f(1) = 1$

となるから，$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ である．

[注意] 上の関数 $f(x)$ は，$x \neq 1$ のとき $f(x) = x + 1$ である．

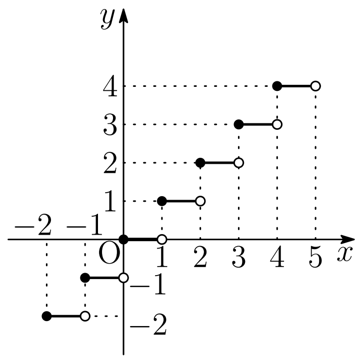
練習 2.34 次の関数 $f(x)$ について，$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ が成り立つように，定数 a の値を定めよ．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

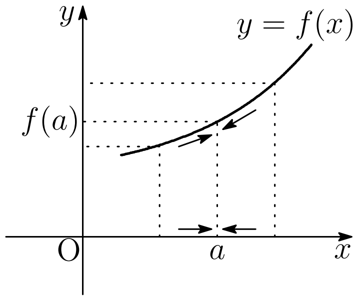
x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．記号 $[\quad]$ を**ガウス記号**という．
関数 $f(x) = [x]$ のグラフを調べてみよう．
関数 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり，x が整数の値をとるところで切れている．
また，$f(1) = 1$ であるが，

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 0$$

であるから，$x \longrightarrow 1$ のときの $f(x)$ の極限はない．
よって，$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ が成り立たない．



一般に，関数 $f(x)$ において，その定義域の x の値 a に対して，極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在し，かつ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で**連続**であるという．このとき，$y = f(x)$ のグラフは $x = a$ でつながっている．



なお，値 a が関数の定義域の左端または右端であるときは，それぞれ

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{または} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$$

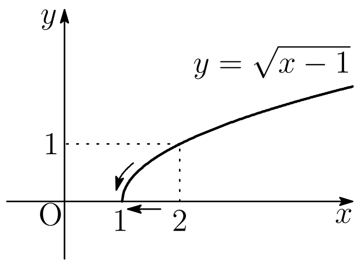
が成り立てば，$f(x)$ は $x = a$ で連続である．

例 2.15 関数 $f(x) = \sqrt{x-1}$ の定義域は $x \geqq 1$ で，

$$\lim_{x \to 1+0} \sqrt{x-1} = 0, \quad f(1) = 0$$

より，$\lim_{x \to 1+0} f(x) = f(1)$

が成り立つ．



したがって，関数 $f(x) = \sqrt{x-1}$ は $x = 1$ で連続である．

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないとき，$x=a$ で**不連続**であるという．このとき，グラフは $x=a$ で切れている．

たとえば，関数 $f(x)=[x]$ は，x の整数値で不連続である．

練習 2.35 次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ．

(1)　$f(x)=x[x]$　　(2)　$f(x)=(x+1)[x]$　　(3)　$f(x)=\sqrt{x}$

44ページで示した関数の極限の性質**1〜4**により，関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに $x=a$ で連続ならば，次の関数はいずれも $x=a$ で連続である．

$$k\,f(x),\quad f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

ただし，k は定数であり，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ においては $g(a)\neq 0$ とする．

B 区間における連続

集合 $\{x|a<x<b\}$，$\{x|a\leqq x\leqq b\}$，$\{x|a\leqq x\}$，$\{x|x<b\}$ などを**区間**といい，それぞれ $(a,\ b)$，$[a,\ b]$，$[a,\ \infty)$，$(-\infty,\ b)$ のように書き表す．実数全体の集合は，$(-\infty,\ \infty)$ で表す．

また，区間 $(a,\ b)$ を**開区間**といい，区間 $[a,\ b]$ を**閉区間**という．

関数 $f(x)$ が，ある区間のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ はその**区間で連続**であるという．また，定義域のすべての x の値で連続な関数を**連続関数**という．

例 2.16　(1)　x の多項式で表された関数や，指数関数 a^x，三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は，区間 $(-\infty,\ \infty)$ で連続である．

(2)　対数関数 $\log_a x$ は，区間 $(0,\ \infty)$ で連続である．

(3)　分数関数 $\dfrac{x}{x-1}$ は，実数全体のうち，$x=1$ を除いた2つの区間 $(-\infty,\ 1)$，$(1,\ \infty)$ のそれぞれで連続である．

一般に，関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間 I でともに連続ならば，次の関数はいずれも区間 I で連続である．ただし，k は定数とする．

$$k\,f(x),\quad f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)g(x)$$

また，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は区間 I から $g(x)=0$ となる x の値を除いたそれぞれの区間で定義され，それらの各区間で連続である．

練習 2.36 次の関数が連続である区間を求めよ．

(1)　$f(x)=\sqrt{1-x}$　　　(2)　$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

C 連続関数の性質

閉区間で連続な関数には，次のような性質がある．

閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ．

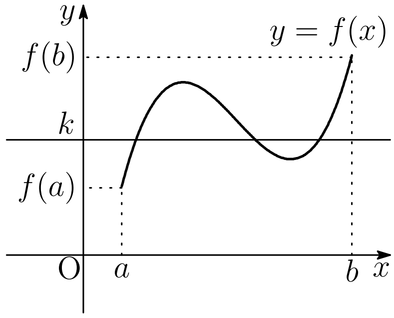
例 2.17　関数 $f(x)=\sin x$ は，閉区間 $[0,\ \pi]$ で連続である．この区間において，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 1，$x=0,\ \pi$ で最小値 0 をとる．

← $y=\sin x$ のグラフは 59 ページ参照．

練習 2.37 次の区間における関数 $f(x)=\cos x$ の最大値，最小値について調べよ．

(1)　$[0,\ \pi]$　　　(2)　$[-\pi,\ \pi]$

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続であるとき，そのグラフはこの区間で切れ目なくつながっている．
とくに，$f(a)\neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間のどの値 k に対しても，直線 $y=k$ と曲線 $y=f(x)$ は，$a<x<b$ の範囲で共有点を少なくとも 1 つもつ．



前ページのことから，次の**中間値の定理**が成り立つ．

中間値の定理

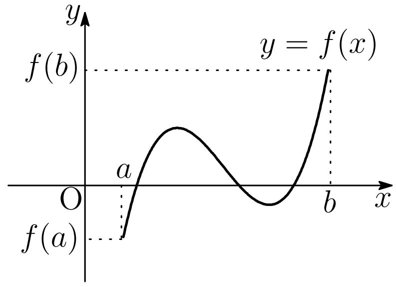
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$f(c) = k, \qquad a < c < b$$

を満たす数 c が少なくとも1つある．

中間値の定理を用いると，次に述べたような方程式の実数解の範囲を推測するための重要な事実が成り立つ．

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば，方程式 $f(x) = 0$ は $a < x < b$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ．



例題 2.14 方程式 $x - \cos x = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ．

【解】 $f(x) = x - \cos x$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[0,\ \pi]$ で連続である．

また　$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$

　　　$f(\pi) = \pi - \cos \pi = \pi + 1 > 0$

であり，$f(0)$ と $f(\pi)$ は符号が異なる．
したがって，方程式 $f(x) = 0$ すなわち $x - \cos x = 0$ は，
$0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ．

練習 2.38 方程式 $2^x - 3x = 0$ は，$3 < x < 4$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ．

2.2.5　補充問題

4 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x^2+4)-\log_2 2x^2\}$

5 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos 2x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin 2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$

6 次の関数 $f(x)$ が $x=1$ で連続であるように定数 a の値を定めよ．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & (x\neq 1)\\[2ex] a & (x=1)\end{cases}$$

7 3次方程式 $x^3-3x+1=0$ は負の解をもつことを示せ．

【答】

4 (1) -1　(2) -1

5 (1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{1}{2}$

6 $a=3$　$\left[\ \lim_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)\ \right]$

7 ［$f(x)=x^3-3x+1$ とすると　$f(-2)<0$，$f(0)>0$］

2.3 章末問題

2.3.1 章末問題 A

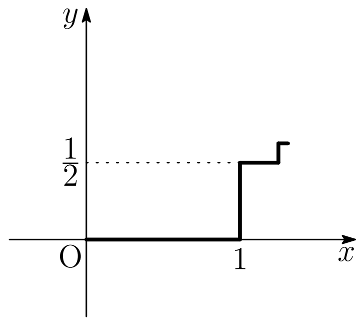
1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{(1+2+3+\cdots+n)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}}{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}$

2 n を自然数とするとき，不等式 $2^n \geqq 1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}$ が成り立つことを示せ.
また，このことを用いて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$ を求めよ.

3 座標平面上で，点Pが原点Oから x 軸の正の向きに1だけ進み，次に y 軸の正の向きに $\frac{1}{2}$ だけ進み，次に x 軸の正の向きに $\frac{1}{2^2}$ だけ進み，次に y 軸の正の向きに $\frac{1}{2^3}$ だけ進む．以下，同様な運動を限りなく続けるとき，点Pの極限の位置の座標を求めよ．



4 次の極限を求めよ．ただし，(4) の a は1でない正の定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -0}2^{\frac{1}{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_a(ax^2+1)-\log_a x^2\}$

5 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\tan x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6 方程式 $\log_2 x+\dfrac{1}{2}x=1$ は，$1<x<2$ の範囲に実数解をもつことを示せ．

2.3.2 章末問題B

7 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = \frac{3}{2},\quad a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1)　$a_n = \dfrac{2^{n-1} + 2}{2^{n-1} + 1}$ を示せ．　(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

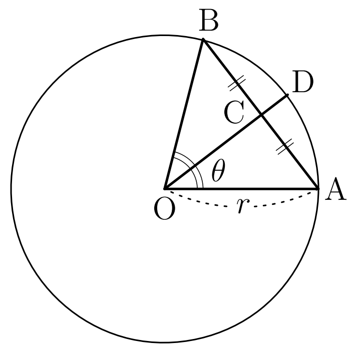
8 和が1の無限等比級数がある．この各項を2乗して得られる無限等比級数の和は2である．もとの無限等比級数の初項と公比を求めよ．

9 次の 2 つの条件［1］,［2］をともに満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ.

［1］ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$　　　［2］ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$

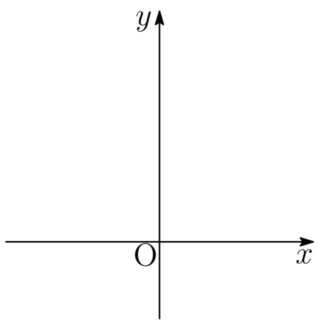
10 半径 r の円 O の周上に中心角 θ ラジアンの弧 AB をとり，弦 AB，弧 AB を 2 等分する点を，それぞれ C，D とする．次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\widehat{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}$



11 x を実数とする．次の無限級数の和を $f(x)$ とするとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ．また，関数 $f(x)$ が不連続となる x の値を求めよ．

$$x^2+\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{x^2}{(x^2+1)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(x^2+1)^{n-1}}+\cdots$$



ヒント

7 (1) 数学的帰納法を用いる．

8 初項を a，公比を r とする．$\dfrac{a^2}{1-r^2}=\dfrac{a}{1+r}\cdot\dfrac{a}{1-r}$ に注意．

9 $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく．

11 初項が 0 の場合に注意．

【答】

1 (1) 0　(2) ∞

$\left[\ (1)\ 分子 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ 分母 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right.$

$\left.(2)\ 分子 = \dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1},\ 分母 = \dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}\ \right]$

2 0　$[2^n = (1+1)^n \geqq 1 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2]$

3 $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$　[求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \cdots,\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^5} + \cdots$]

4 (1) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) -1　(3) 0　(4) 1

[(3) $\dfrac{1}{x} = t$ とおくと　$\displaystyle\lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty} 2^t$]

5 (1) 2　(2) $\dfrac{1}{2}$

6 [$f(x) = \log_2 x + \dfrac{1}{2}x - 1$ とおくと　$f(1) < 0,\ f(2) > 0$]

7 (2) 1

[(1) $n = k$ のとき成り立つ，すなわち $a_k = \dfrac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}$ であると仮定すると

$a_{k+1} = \dfrac{2}{3-a_k} = \dfrac{2}{3-\dfrac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}} = \dfrac{2(2^{k-1}+1)}{3(2^{k-1}+1)-(2^{k-1}+2)} = \dfrac{2\cdot2^{k-1}+2}{2\cdot2^{k-1}+1}$]

8 初項 $\dfrac{4}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ [初項を a，公比を r とすると

$\dfrac{a}{1-r} = 1,\ \dfrac{a^2}{1-r^2} = \dfrac{a}{1+r}\cdot\dfrac{a}{1-r} = 2,\ |r| < 1$]

9 $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$ $\left[f(x) = ax^2 + bx + c \right.$ とおくと

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 1} = a \quad よって \quad a = 2$$

また $f(1) = 0$ となるから　$a + b + c = 0$　よって　$c = -b - 2$

このとき　$\left. \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+b+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{b+4}{2} \right]$

10 (1) 1　(2) $\frac{1}{8r}$　$\left[\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = r\theta,\ \mathrm{AB} = 2r\sin\frac{\theta}{2},\ \mathrm{CD} = r\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) \right]$

11 $x = 0$ で不連続　$\left[\right.$初項は x^2，公比は $\frac{1}{x^2+1}$ である．

$x = 0$ のとき　$f(x) = 0$，$x \neq 0$ のとき　$\left. f(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x^2+1}} = x^2 + 1 \right]$