第 5 章　指数関数と対数関数

5.1　指数関数

5.1.1　指数の拡張

a の累乗 a^n については，指数 n が正の整数の場合を学んでいる．ここでは，指数の範囲を整数，有理数，実数と順に拡張しよう．

A 整数の指数

次の指数法則が成り立つことは，すでに知っている．

m，n を正の整数とする．

1　$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　　**2**　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　**3**　$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

さらに，この法則を満たしながら，a^n の指数 n の範囲を，正の整数から整数全体に拡張してみよう．

指数が 0 や負の整数の場合にも **1** が成り立つとすると，たとえば

$$3^2 \times 3^0 = 3^{2+0} = 3^2, \quad 3^2 \times 3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^0$$

となる．これから，3^0，3^{-2} は次のようになる．

$$3^0 = \frac{3^2}{3^2} = 1, \qquad 3^{-2} = \frac{3^0}{3^2} = \frac{1}{3^2}$$

そこで，指数が 0 や負の整数の場合の累乗を，次のように定義する．

$\boldsymbol{a^0}$，$\boldsymbol{a^{-n}}$ の定義

$a \neq 0$ で，n を正の整数とするとき

$$\boldsymbol{a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \text{とくに} \quad \boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

例 5.1 $2^0 = 1,\quad 10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000},\quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2^4} = 2^{-4}$

$34.5 \times 10^{-3} = 34.5 \times 0.001 = 0.0345$

$0.0123 = 1.23 \times 0.01 = 1.23 \times 10^{-2}$

練習 5.1 次の $\square$ に適する数を求めよ．ただし，(3) は小数とする．

(1) $4^{-2} = \dfrac{1}{\square}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = 2^{\square}$

(3) $23.1 \times 10^{-4} = \square$　　(4) $0.00074 = 7.4 \times 10^{\square}$

前ページの定義によると，さらに次のようなことがいえる．

$$3^5 \times 3^{-2} = 3^5 \times \frac{1}{3^2} = 3^3 = 3^{5+(-2)},$$

$$\frac{3^5}{3^{-2}} = 3^5 \div \frac{1}{3^2} = 3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^{5-(-2)}$$

$$(3^5)^{-2} = \frac{1}{(3^5)^2} = \frac{1}{3^{5\times2}} = 3^{-(5\times2)} = 3^{5\times(-2)}$$

$$(3 \times 5)^{-2} = \frac{1}{(3\times5)^2} = \frac{1}{3^2\times5^2} = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{5^2} = 3^{-2} \times 5^{-2}$$

一般に，指数が整数の場合に，次の指数法則が成り立つ．

指数法則 (指数が整数)

$a \neq 0$，$b \neq 0$，m，n を整数とする．

1 $\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}$　　**2** $\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

3 $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　**4** $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

練習 5.2 次の $\square$ に適する数を求めよ．

(1) $3^4 \times 3^{-2} = 3^{\square}$　　(2) $10^{-3} \div 10^2 = 10^{\square}$

(3) $(3^{-2})^4 = 3^{\square}$　　(4) $(2 \times 3^4)^{-2} = 2^{\square} \times 3^{\square}$

B 累乗根

n を正の整数とするとき，n 乗して a になる数を a の $\boldsymbol{n}$ **乗根**という．すなわち，方程式 $x^n = a$ の解が a の n 乗根である．また，a の 2 乗根，3 乗根，4 乗根，$\cdots$ を総称して a の**累乗根**という．

例 5.2　(1)　$2^3 = 8$ であるから，2 は 8 の 3 乗根である．

(2)　$3^4 = (-3)^4 = 81$ であるから，3 と -3 は 81 の 4 乗根である．

練習 5.3 次の $\boxed{}$ に適する数を求めよ．

(1) $(-2)^3 = -8$ であるから，$\boxed{}$ は -8 の $\boxed{}$ 乗根である．

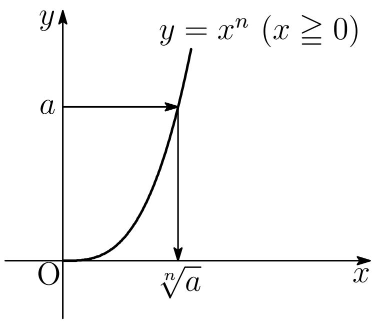
(2) $2^4 = (-2)^4 = 16$ であるから，2 と $\boxed{}$ は 16 の $\boxed{}$ 乗根である．

以下では，正の数 a の n 乗根のうち，正であるものについて考える．

関数 $y = x^n$ $(x \geqq 0)$ のグラフの概形は，右の図のようになる．グラフによると，正の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす正の数 x がただ 1 つあることがわかる．

この正の数 x を $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ で表す．

[注意] $\sqrt[2]{a}$ は，ふつう $\sqrt{a}$ と書く．



例 5.3　(1)　$2^3 = 8$ であるから　$\sqrt[3]{8} = 2$

(2)　$3^4 = 81$ であるから　$\sqrt[4]{81} = 3$

$a > 0$ のとき　$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} > 0, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad \sqrt[n]{a^n} = a}$

練習 5.4 次の $\boxed{}$ に適する数を求めよ．

(1) $\sqrt[3]{1} = \boxed{}$　　(2) $\sqrt[3]{27} = \boxed{}$　　(3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \boxed{}$

$\sqrt[n]{a}$ の定義から，累乗根について，次の性質が得られる．

累乗根の性質

$a > 0$，$b > 0$ で，m，n を整数とする．

1　$\boldsymbol{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$　　**2**　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

3　$\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$　　**4**　$\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$

[3の証明]　$((\sqrt[n]{a})^m)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m$ である．　$\longleftarrow$ n 乗すると a^m になる

また，$\sqrt[n]{a} > 0$ より $(\sqrt[n]{a})^m > 0$　　正の数が $\sqrt[n]{a^m}$

以上から　$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$　　**[証終]**

1，**2**，**4** についても，同様にして証明することができる．

例 5.4　(1)　$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(2)　$\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{12}{3}} = \sqrt[3]{4}$

(3)　$(\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$

(4)　$\sqrt[3]{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[3\times2]{3} = \sqrt[6]{3}$

練習 5.5　次の計算をせよ．

(1)　$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(3)　$(\sqrt[4]{5})^2$　　(4)　$\sqrt[4]{\sqrt[3]{12}}$

C 有理数の指数

$a>0$ のとき，たとえば $a^{\frac{1}{2}}$ の意味を定めてみよう．
仮に，$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}\times 2}$ が成り立つと考えると，$(a^{\frac{1}{2}})^2=a$ となる．
これにより，$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$ と定めればよいことがわかる．
一般に，有理数の指数の意味を次のように定める．

有理数の指数

$a>0$ で，m，n を正の整数，r を正の有理数とするとき

$$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},\quad a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-r}=\frac{1}{a^r}}$$

例 5.5 $2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$,　$3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$,　$5^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{5^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt[2]{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

練習 5.6 例 5.5 にならって，次の数を累乗根で表せ．

(1) $4^{\frac{1}{3}}$　　(2) $3^{\frac{3}{4}}$

(3) $5^{-\frac{1}{3}}$　　(4) $2^{-\frac{2}{3}}$

指数が有理数である累乗の意味を上のように定めると，次の指数法則が成り立つ．

指数法則 (指数が有理数)

$a>0$，$b>0$，r，s を有理数とする．

1 $\boldsymbol{a^r\times a^s=a^{r+s}}$　　**2** $\boldsymbol{\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}}$

3 $\boldsymbol{(a^r)^s=a^{rs}}$　　**4** $\boldsymbol{(ab)^r=a^rb^r}$

たとえば，$r=\dfrac{2}{3}$，$s=\dfrac{1}{2}$ の場合について，**1**，**3** が成り立つことが，次のようにして確かめられる．

$$a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{4}{6}}\times a^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{a^4}\times\sqrt[6]{a^3}=\sqrt[6]{a^7}=a^{\frac{7}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$$

$$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[6]{a^2}=a^{\frac{2}{6}}=a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}$$

例題 5.1 次の計算をせよ．

(1) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{6}}$　　(2) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}$

【解】 (1) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\times\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

(2) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2^1 = 2$

練習 5.7 次の計算をせよ．

(1) $64^{\frac{2}{3}} \times 16^{-\frac{1}{4}}$　　(2) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[6]{27} \div \sqrt[3]{9}$

$a > 0$ のとき，a^r の指数 r は実数まで拡張することができる．たとえば，$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ に対して，累乗の例

$$2^{1.4},\quad 2^{1.41},\quad 2^{1.414},\quad 2^{1.4142},\quad \cdots$$

は，次第に一定の値に近づく．その値を $2^{\sqrt{2}}$ と定めるのである．

前ページの指数法則は，r，s が実数のときにも成り立つ．

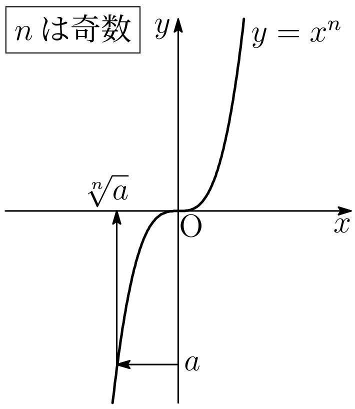
研究

負の数のn乗根

nが奇数のときに限り，負の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす負の数 x がただ1つある．この数 x も $\sqrt[n]{a}$ で表す．たとえば

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$
$$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$$

整数nが偶数のときは，常に $x^n \geqq 0$ であるから，負の数 a に対して，$x^n = a$ を満たす実数 x は存在しない．



5.1.2　指数関数

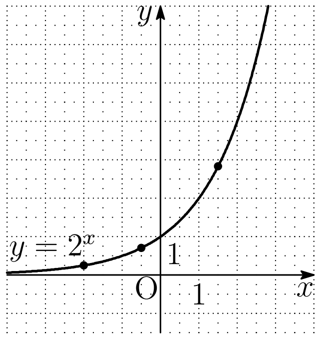
a を 1 と異なる正の定数とするとき，$y = a^x$ は x の関数である．この関数を，a を**底**とする x の**指数関数**という．指数関数の特徴を調べよう．

A 指数関数 $y = a^x$ のグラフ

たとえば，指数関数

$$y = 2^x \qquad \cdots ①$$

のグラフは，右の図のようになる．



$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$
$$2^{-0.5} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.71$$
$$2^{1.5} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.83$$

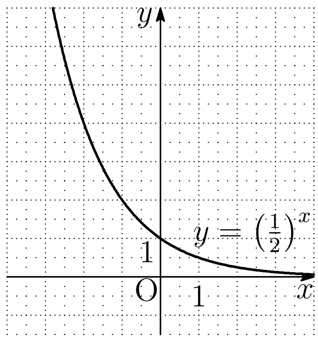
練習 5.8 上の計算にならって，下の表の空らんをうめよ．

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	0.25			0.71			2	2.83	4

指数関数 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \qquad \cdots ②$

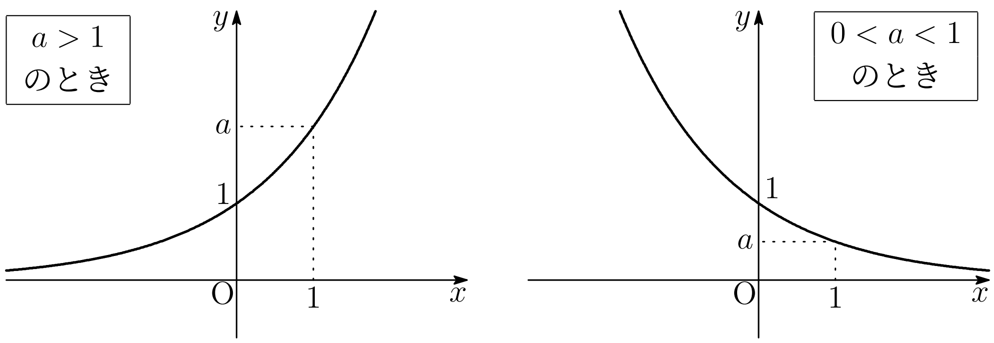
は，$y = 2^{-x}$ と同じである．

したがって，② のグラフは ① のグラフと y 軸について対称であり，右の図のようになる．



［注意］　一般に，$y = f(x)$ のグラフと $y = f(-x)$ のグラフは，y 軸について対称である．

一般に，指数関数 $y = a^x$ のグラフは，下のようになる．



どちらの場合も，x 軸が漸近線で，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る．
曲線は，$a > 1$ のとき右上がり，$0 < a < 1$ のとき右下がりである．

練習 5.9 次の指数関数のグラフをかけ．

(1) $y = 3^x$　　　(2) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

B 指数関数の特徴

指数関数 $y = a^x$ は，次のような特徴をもつ．

指数関数 $y = a^x$ の特徴

1 定義域は実数全体，値域は正の数全体である．

2 **$a > 1$ のとき**，x の値が増加すると y の値も増加する．

すなわち　$\boldsymbol{r < s \iff a^r < a^s}$

3 **$0 < a < 1$ のとき**，x の値が増加すると y の値は減少する．

すなわち　$\boldsymbol{r < s \iff a^r > a^s}$

[注意] $a > 0$，$a \neq 1$ のとき，「$r = s \iff a^r = a^s$」が成り立つ．

一般に，x の値が増加すると y の値も増加する関数を**増加関数**といい，x の値が増加すると y の値は減少する関数を**減少関数**という．

例 5.6 $y = 2^x$ は増加関数であるから ← 底 2 が 1 より大きい

$$2^{-3} < 2^0 < 2^{1.5}$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ は減少関数であるから ← 底 $\frac{1}{2}$ が 1 より小さい

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 > \left(\frac{1}{2}\right)^{1.5}$$

練習 5.10 次の 3 つの数の大小を不等号で示せ.

(1) $3^{0.5}$, 3^{-1}, 1

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

C 指数関数を含む方程式と不等式

指数関数を含む方程式，不等式を，指数関数の特徴を利用して解いてみよう.

例題 5.2 次の方程式と不等式を解け.

(1) $4^x = 8$　　(2) $2^x \geqq 8$　　(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{9}$

【解】 (1) 方程式を変形すると $2^{2x} = 2^3$ ← $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$

$2x = 3$ より $x = \frac{3}{2}$

(2) 不等式を変形すると $2^x \geqq 2^3$ ← 関数 $y=2^x$ は増加関数

よって $x \geqq 3$

(3) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ← 関数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ は減少関数

よって $x > 2$

さくらの個別指導（さくら教育研究所）

練習 5.11 次の方程式と不等式を解け.

(1) $2^x = 16$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{16}$

(3) $3^{2x} = \dfrac{1}{9}$

(4) $8^x = 4$

(5) $3^x \leqq 81$

(6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \dfrac{1}{32}$

5.1.3 補充問題

1 光の進む速さは，毎秒 3.0×10^8m である．すると，光は 1km を進むのに約 $3.3 \times 10^{\square}$ 秒かかる．□ に適する整数を求めよ．

2 次の計算をせよ.

(1) $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})$　　(2) $(8^{\frac{1}{3}}-8^{-\frac{1}{3}})(8^{\frac{2}{3}}+1+8^{-\frac{2}{3}})$

3 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y=2^{x-1}$　　(2) $y=2^{x}+1$

4 次の方程式と不等式を解け.

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=8$　　(2) $27^{x}=3^{2-x}$　　(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}\geqq\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x}$

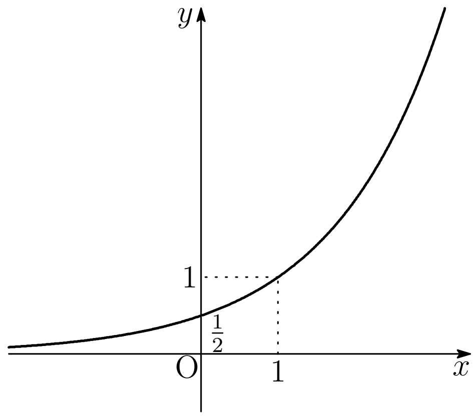
さくらの個別指導（さくら教育研究所）

【答】

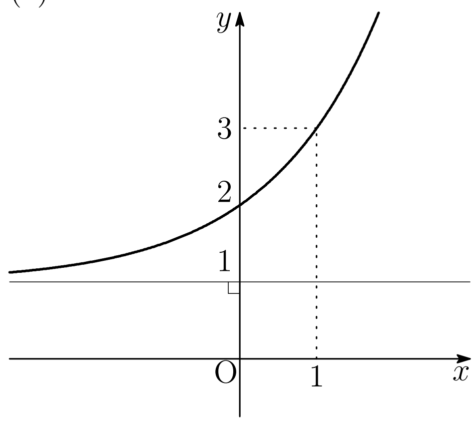
1　-6　[1km 進むのに約 $10^3 \div (3.0 \times 10^8)$ 秒かかる]

2　(1) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$　(2) $\dfrac{63}{8}$

3　(1)



(2)



4　(1) $x = -3$　(2) $x = \dfrac{1}{2}$　(3) $x \geqq 1$

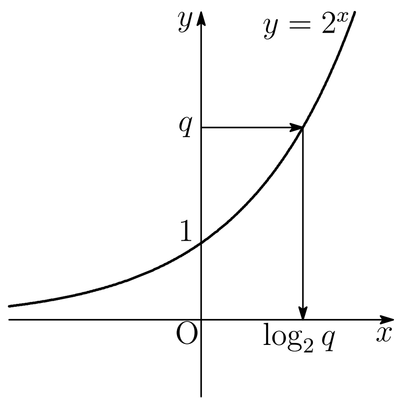
5.2 対数関数

5.2.1 対数とその性質

たとえば，指数関数 $y = 2^x$ において y の値が与えられたときに，それに対応する x の値を求めることを考えてみよう．

A 対数

指数関数 $y = 2^x$ は増加関数で，値域は正の数全体であるから，どんな正の数 q に対しても，$q = 2^x$ となる実数 x がただ1つ定まる．この x を $\boldsymbol{\log_2 q}$ で表す．



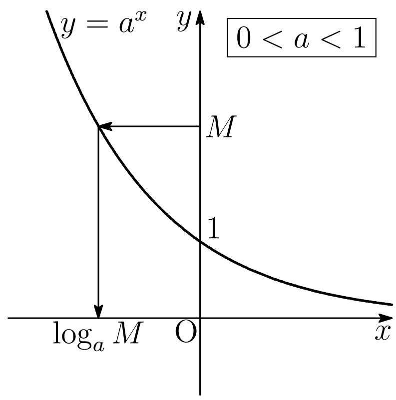
例 5.7 (1) $8 = 2^3$ から　$\log_2 8 = 3$

(2) $\dfrac{1}{2} = 2^{-1}$ から　$\log_2 \dfrac{1}{2} = -1$

練習 5.12 次の $\boxed{}$ に適する数を求めよ．

(1) $\log_2 16 = \boxed{}$　(2) $\log_2 4 = \boxed{}$　(3) $\log_2 \boxed{} = 0$

一般に，指数関数 $y = a^x$ を考えれば，どんな正の数 M に対しても，$M = a^p$ となる実数 p がただ1つ定まる．この p を $\boldsymbol{\log_a M}$ で表し，a を**底**とする M の**対数**という．また，$\log_a M$ における正の数 M を，この対数の**真数**という．



[注意] log は「対数」を意味する英語 logarithm を記号化したものである．

指数と対数の関係は，次のようになる．

指数と対数

$a > 0$，$a \neq 1$ で $M > 0$ とするとき，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{M = a^p \iff \log_a M = p}$$

[注意] 以下 $\log_a M$ では，$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$ であるとする．

例 5.8　(1)　$81 = 3^4$ から　$\log_3 81 = 4$

(2)　$\log_4 16 = x$ とすると　$16 = 4^x$　$\longleftarrow$ 16=4^2

$4^2 = 4^x$ を解くと $x = 2$ であるから

$$\log_4 16 = 2$$

練習 5.13 次の$\boxed{}$に適する数を求めよ．

(1)　$9 = 3^2$ から　$\log_3 9 = \boxed{}$　　(2)　$\dfrac{1}{25} = 5^{-2}$ から　$\log_5 \dfrac{1}{25} = \boxed{}$

(3)　$3 = 4^x$ のとき　$x = \log_{\square} 3$　　(4)　$\log_4 64 = x$ のとき　$x = \boxed{}$

$\log_a M = p$ のとき，$M = a^p$ であるから，次の等式が得られる．

$$\boldsymbol{\log_a a^p = p}$$

$\longleftarrow$$\log_a M$ の M を a^p におきかえたもの

例 5.9　(1)　$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

(2)　$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

練習 5.14 次の値を求めよ．

(1)　$\log_2 2^5$　　(2)　$\log_5 25$　　(3)　$\log_3 \dfrac{1}{27}$　　(4)　$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$

(5)　$\log_{10} 0.1$　　(6)　$\log_{\sqrt{5}} 5$　　(7)　$\log_{\frac{1}{3}} 3$　　(8)　$\log_2 \sqrt[3]{2}$

B 対数の性質

a を底とする対数の性質を調べてみよう．
まず，$1=a^0$，$a=a^1$ であることから，次が成り立つ．

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

また，指数法則から，次の性質が得られる．

対数の性質

$M>0$，$N>0$ で，k を実数とする．

1 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2 $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3 $\log_a M^k = k\log_a M$

←これらの等式は，右辺を左辺の形に変形するときにも用いられる．
また，**2** によると
$\log_a \dfrac{1}{N} = -\log_a N$

[1 の証明] $\log_a M = p$，$\log_a N = q$ とすると

$$M=a^p, \quad N=a^q$$

よって　$MN = a^p \times a^q = a^{p+q}$
したがって　$\log_a MN = p+q = \log_a M + \log_a N$　**[証終]**

練習 5.15 上の証明にならって，性質 **2** の等式が成り立つことを示せ．また，性質 **3** の等式が成り立つことを示せ．

[2 の証明] $\log_a M = p$，$\log_a N = q$ とすると

$$M=a^p, \quad N=a^q$$

よって　$\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
したがって　$\log_a \dfrac{M}{N} = p-q = \log_a M - \log_a N$　**[証終]**

[3 の証明] $\log_a M = p$ とすると　$M=a^p$
よって　$M^k = (a^p)^k = a^{kp}$
したがって　$\log_a M^k = kp = k\log_a M$　**[証終]**

さくらの個別指導（さくら教育研究所）

例 5.10　(1)　$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10} 10 = 1$

(2)　$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_3 \dfrac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(3)　$$\begin{aligned} 2\log_3 4 + \log_3 5 - \log_3 8 &= \log_3 4^2 + \log_3 5 - \log_3 8 \\ &= \log_3 \frac{16 \times 5}{8} = \log_3 10 \end{aligned}$$

練習 5.16 次の計算をせよ．

(1)　$\log_4 2 + \log_4 8$

(2)　$\log_3 2 - \log_3 18$

(3)　$\log_3 4 + \log_3 18 - 3\log_3 2$

(4)　$2\log_{10} 5 - \log_{10} 15 + \log_{10} 9$

C 底の変換公式

a を底とする対数 $\log_a b$ を，c を底とする対数で表してみよう．
$\log_a b = p$ とすると，$b = a^p$ であるから

$$\log_c b = \log_c a^p$$

すなわち

$$\log_c b = p \log_c a$$

$a \neq 1$ により $\log_c a \neq 0$ であるから　$p = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

したがって，次の**底の変換公式**が得られる．

底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ とするとき

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

例 5.11 (1) $\log_8 16$ の値は ← $8=2^3$，$16=2^4$ に注目

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4}{3}$$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$ の値は ← $\log_a \square \cdot \log_\square b$ の形

$$\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 3 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3}$$

$$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

練習 5.17 次の値を簡単にせよ．

(1) $\log_4 8$ (2) $\log_9 3$ (3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27$

5.2.2 対数関数

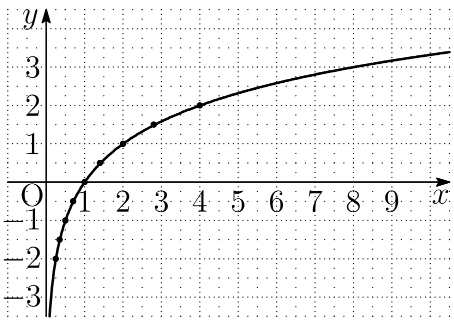
a を 1 と異なる正の定数とするとき，$y = \log_a x$ は x の関数である．この関数を，a を底とする x の**対数関数**という．対数関数の特徴を調べよう．

A 対数関数とそのグラフ

まず，対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフを調べてみよう．

$y = \log_2 x$ は $x = 2^y$ と同じである．そこで，189 ページで調べた $y = 2^x$ の対応表で x と y を入れ替えると，次の対応表が得られる．

x	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4
y	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2



この表の x，y を座標にもつ点 $(x,\ y)$ は，右の図のような曲線上にある．

この曲線が，対数関数

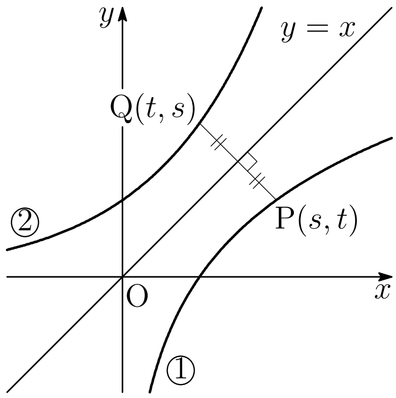
$$y = \log_2 x \quad \cdots ①$$

のグラフである．

このグラフは，指数関数

$y = 2^x$ $\cdots$ ②

のグラフと，直線 $y = x$ について対称である．
このことは，次の **1**，**2** から説明できる．

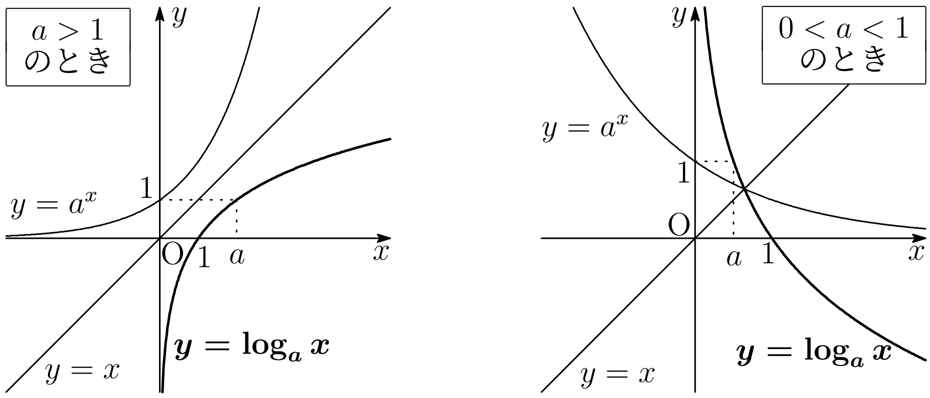


1. 「$t = \log_2 s \iff s = 2^t$」が成り立つから，① のグラフ上に点 P($s$, t) があれば，② のグラフ上に点 Q(t, s) がある．

この逆も成り立つ．

2. 点 P(s, t) と点 Q(t, s) は，直線 $y = x$ について対称である．

一般に，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，指数関数 $y = a^x$ のグラフと $y = x$ について対称であり，下の図のようなる．



どちらの場合も，y 軸が漸近線で，点 (1, 0)，(a, 1) を通る．
曲線は，$a > 1$ のとき右上がり，$0 < a < 1$ のとき右下がりである．

練習 5.18 次の対数関数のグラフをかけ．

(1) $y = \log_3 x$　　(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

B 対数関数の特徴

対数関数 $y = \log_a x$ は，次のような特徴をもつ．

対数関数 $\boldsymbol{y = \log_a x}$ の特徴

1　定義域は正の数全体，値域は実数全体である．

2　**$\boldsymbol{a > 1}$ のとき**，増加関数である．すなわち

$$\boldsymbol{0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q}$$

3　**$\boldsymbol{0 < a < 1}$ のとき**，減少関数である．すなわち

$$\boldsymbol{0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q}$$

[注意] $p > 0$，$q > 0$ のとき，次も成り立つ．

$$p = q \iff \log_a p = \log_a q$$

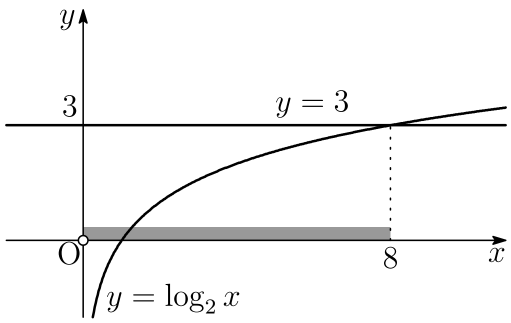
例 5.12 関数 $\boldsymbol{y = \log_2 x}$ について，$\boldsymbol{y \leqq 3}$ となる x の値の範囲を求める．

$\log_2 x \leqq 3$ より

$$\log_2 x \leqq \log_2 2^3 = \log_2 8$$

$y = \log_2 x$ は増加関数で，定義域は $x > 0$ であるから，求める x の値の範囲は

$$0 < x \leqq 8$$



練習 5.19 関数 $y = \log_2 x$ について，$y \leqq 4$ となる x の値の範囲を求めよ．また，関数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ について，$y \leqq 2$ となる x の値の範囲を求めよ．

C 対数関数を含む方程式，不等式

応用例題 5.1 次の方程式と不等式を解け.

(1) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2$

考え方　(1) $M>0$, $N>0$ のとき　$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

【解】 (1)　真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x-2>0$

すなわち　$x>2$　$\cdots$①

方程式を変形すると　$\log_2 x(x-2) = 3$

よって　$x(x-2) = 2^3$

したがって　$(x+2)(x-4) = 0$

① より $x+2>0$ であるから　$x=4$　$\longleftarrow x-4=0$

(2)　不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x-1>0$, $x-1<\dfrac{1}{4}$ より　$1<x<\dfrac{5}{4}$　$\longleftarrow y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ は減少関数

練習 5.20 次の方程式と不等式を解け.

(1) $\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geqq 3$

5.2.3 常用対数

大きな数や小さな数は,

$$1620000 = 1.62 \times 10^6, \qquad 0.000618 = 6.18 \times 10^{-4}$$

のように，10^n を用いて表すと便利である．
そこで，10 を底とする対数を考えて，いろいろな問題に利用してみよう．

A 常用対数

10 を底とする対数を**常用対数**という．
正の数 M は，次の形に表すことができる．

$$M = a \times 10^n \qquad \text{ただし}, n\text{は整数で } 1 \leqq a < 10$$

このとき，$\log_{10} M$ は整数 n と $\log_{10} a$ の和で表される．

$$\log_{10} M = \log_{10} a + \log_{10} 10^n = \log_{10} a + n$$

章末に**常用対数表**を載せた．この数表では，a が

$$1.00,\ 1.01,\ 1.02,\ \cdots,\ 9.99$$

のときの $\log_{10} a$ の近似値[1]を，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで載せてある．

例 5.13 常用対数表によると

$$\begin{aligned}
\log_{10} 1.62 &= 0.2095 \\
\log_{10} 1620000 &= \log_{10}(1.62 \times 10^6) \\
&= \log_{10} 1.62 + \log_{10} 10^6 \\
&= 0.2095 + 6 = 6.2095 \\
\log_{10} 0.00162 &= \log_{10}(1.62 \times 10^{-3}) \\
&= \log_{10} 1.62 + \log_{10} 10^{-3} \\
&= 0.2095 - 3 = -2.7905
\end{aligned}$$

数	0	1	2	3
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239
1.4	.1461	.1492	.1523	.1533
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075

練習 5.21 常用対数表を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めよ．

(1) $\log_{10} 3450$　　(2) $\log_{10} 92000$　　(3) $\log_{10} 0.000618$

[1] $1 \leqq a < 10$ であるから，$\log_{10} a$ の値の範囲は $0 \leqq \log_{10} a < 1$ である．

B 常用対数の応用

自然数 N の桁（けた）数と常用対数 $\log_{10} N$ の値の関係を調べてみよう．

自然数 N が 3 桁の数のとき，N は

$$100 \leqq N < 1000$$

の範囲にある数である．

すなわち　$10^2 \leqq N < 10^3$

← 一般に，n 桁なら $10^{n-1} \leqq N < 10^n$，$n-1 \leqq \log_{10} N < n$

常用対数をとると，次のようになる．

$$\log_{10} 10^2 \leqq \log_{10} N < \log_{10} 10^3$$
$$2 \leqq \log_{10} N < 3$$

逆に，$2 \leqq \log_{10} N < 3$ のとき，自然数 N は 3 桁の数である．

練習 5.22 自然数 N の桁数が次のとき，$\log_{10} N$ の値の範囲を求めよ．

(1) 2 桁　　(2) 5 桁　　(3) 10 桁

例題 5.3 3^{20} が何桁の数であるかを調べよ．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いてよい．

【解】

$$\log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$$

$9 < \log_{10} 3^{20} < 10$ であるから

$$\log_{10} 10^9 < \log_{10} 3^{20} < \log_{10} 10^{10}$$

よって　$10^9 < 3^{20} < 10^{10}$

したがって，3^{20} は 10 桁の数である．

練習 5.23 $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いて，次の数の桁数を調べよ．

(1) 2^{20}　　(2) 2^{30}

応用例題 5.2 $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いて，2^n が 10 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ．

> **考え方**　2^n が 10 桁の数のとき，$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ が成り立つ．
> これより，常用対数を用いて n の不等式を導く．

【解】 2^n が 10 桁の数となるのは，$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ のときである．

常用対数をとると　$9 \leqq n \log_{10} 2 < 10$

よって　$$\frac{9}{\log_{10} 2} \leqq n < \frac{10}{\log_{10} 2} \quad \cdots ①$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ であるから

$$\frac{9}{\log_{10} 2} = \frac{9}{0.3010} = 29.9\cdots$$
$$\frac{10}{\log_{10} 2} = \frac{10}{0.3010} = 33.2\cdots$$

したがって，① を満たす自然数 n は

$$n = 30,\ 31,\ 32,\ 33$$

練習 5.24 $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて，3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ．

$0 < M < 1$ である小数 M と常用対数 $\log_{10} M$ の値の関係も調べよう．
たとえば，M の小数第3位に初めて0でない数が現れるとき，M は

$$0.001 \leqq M < 0.01 \qquad \text{すなわち} \qquad 10^{-3} \leqq M < 10^{-2}$$

の範囲にある数である．よって，$-3 \leqq \log_{10} M < -2$ となる．
逆に，$-3 \leqq \log_{10} M < -2$ のとき，小数 M は小数第3位に初めて0でない数が現れる．

練習 5.25 $0 < M < 1$ である小数 M が，小数第5位に初めて0でない数が現れるとき，$\log_{10} M$ の値の範囲を求めよ．

5.2.4　補充問題

5 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{1}{2}\log_4 8 + \log_4 \sqrt{2}$　　　　(2) $\log_2 \sqrt[3]{12} - \dfrac{1}{3}\log_2 3$

6 関数 $y = \log_2(x-1)$ のグラフをかけ.

7 次の方程式と不等式を解け.

(1) $\log_3(x+1)^2 = 2$

(2) $\log_2(2-x) \geqq \log_2 x$

8 次の問いに答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1) $\log_{10} 5$ の値を求めよ．

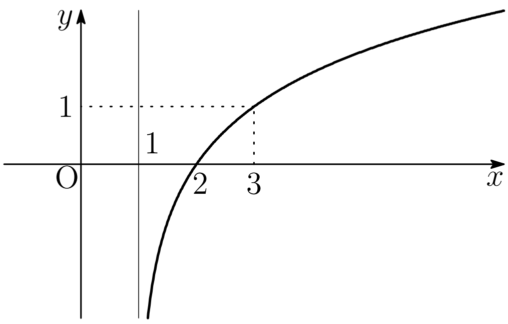
(2) 0.2^{10} は小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか.

さくらの個別指導（さくら教育研究所）

【答】

5 (1) 1 (2) $\dfrac{2}{3}$

6



7 (1) $x = 2,\ -4$ (2) $0 < x \leqq 1$

8 (1) 0.6990 (2) 小数第 7 位

5.3 章末問題

5.3.1 章末問題 A

1 次の計算をせよ.

(1) $36^{1.5} \times 32^{-0.2}$ (2) $9^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{12}}$

2 次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{2} \leqq 2^x \leqq 8$ (2) $1 \leqq 0.5^x \leqq 4$

3 次の方程式と不等式を解け.

(1) $3^{x+1} = \sqrt[3]{9}$　　(2) $8^x \leqq 4^{x+1}$　　(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geqq (\sqrt{2})^x$

4 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{1}{2}\log_5 3 + 3\log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$

(2) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

5 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき，次の値を a, b を用いて表せ.

(1) $\log_{10} \dfrac{3}{8}$　　(2) $\log_{10} \sqrt[3]{6}$

(3) $\log_2 3$　　(4) $\log_{10} 15$

6 a, b, c を 1 と異なる正の数とするとき，次の等式を証明せよ．

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

7 次の方程式を解け.

(1) $\log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1$

(2) $\log_3(x-2) + \log_3(2x-7) = 2$

8 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．ある菌は，30 分ごとに 2 倍に増えるという．菌の量がある時点の 100 万倍を超えるのは，その時点からおよそ何分後か.

5.3.2　章末問題 B

9 次の関数の値域を求めよ．

(1)　$y = 2^{x+1}$　$(-3 \leqq x \leqq 3)$　　　(2)　$y = \log_{\frac{1}{2}}(x + \sqrt{2})$　$(0 \leqq x \leqq \sqrt{2})$

10 x の方程式 $4^x - 3{\cdot}2^x - 4 = 0$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$2^x = t$ とおいて得られる t の方程式を作れ．

(2)　与えれた x の方程式を解け．

11 次の関数の最小値を求めよ．

(1)　$y = 4^x - 2^x$　　　(2)　$y = (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2$

12 次の不等式を解け.

(1) $\log_{0.5}(3-x) \geqq \log_{0.5} 2x$　　(2) $\log_2(x+1)+\log_2(x-2)<2$

13 $M=\sqrt[3]{5}$ とする．常用対数表を用いて，次の問いに答えよ.

(1) $\log_{10} M$ の値を求めよ.

(2) M の値を小数第 2 位まで求めよ.

14 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{10^4}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

15 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．$2^n < 3^{20} < 2^{n+1}$ を満たす自然数 n を求めよ．

ヒント

10　(2)　$2^x > 0$ より，$t > 0$ に注意．　**11**　(2)　$\log_3 x = t$ とおく．

13　(2)　$\log_{10} M$ の値に近い値が常用対数になる数を表からみつける．

14　$\log_{10} \dfrac{1}{2} = -\log_{10} 2$ に注意．　**15**　$3^{20} = 2^x$ を満たす x の値を調べる．

さくらの個別指導（さくら教育研究所）

【答】

1 (1) 108　(2) 3

2 (1) $-1 \leqq x \leqq 3$　(2) $-2 \leqq x \leqq 0$

3 (1) $x = -\dfrac{1}{3}$　(2) $x \leqq 2$　(3) $x \leqq \dfrac{2}{3}$

4 (1) 0　(2) 5

5 (1) $b - 3a$　(2) $\dfrac{1}{3}(a + b)$　(3) $\dfrac{b}{a}$　(4) $1 - a + b$

6 $\left[左辺 = \log_a b \cdot \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \dfrac{\log_a a}{\log_a c} \right]$

7 (1) $x = 0,\ -3$　(2) $x = 5$

8 およそ 598 分後　［$30n$ 分後 100 万倍を超えたとすると　$2^n > 10^6$　この両辺の常用対数をとる］

9 (1) $\dfrac{1}{4} \leqq y \leqq 16$　(2) $-\dfrac{3}{2} \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}$

10 (1) $t^2 - 3t - 4 = 0$　(2) $x = 2$

11 (1) $x = -1$ で最小値 $-\dfrac{1}{4}$　(2) $x = 3$ で最小値 -1

12 (1) $1 \leqq x < 3$　(2) $2 < x < 3$

13 (1) 0.2330　(2) 1.71

14 $n = 14$　$\left[n \log_{10} \dfrac{1}{2} < -4 \right]$

15 $n = 31$

5.4　常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3929	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6712	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

5.5 常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.6523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996