第 2 章　空間のベクトル

2.1.1　空間の点

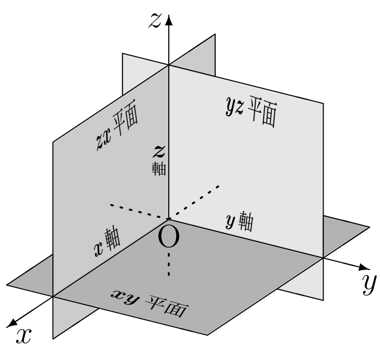
直線上の点や平面上の点は，数直線や座標軸を考えることにより，座標を用いて表すことができた．空間においても，点の座標を考えてみよう．

A 空間の点の座標

空間に点Oをとり，Oで互いに直交する3本の数直線を，右の図のように定める．これらを，それぞれ$\boldsymbol{x}$**軸**，$\boldsymbol{y}$**軸**，$\boldsymbol{z}$**軸**といい，まとめて**座標軸**という．また，点Oを**原点**という．さらに

x軸とy軸で定まる平面を$\boldsymbol{xy}$ **平面**，
y軸とz軸で定まる平面を$\boldsymbol{yz}$ **平面**，
z軸とx軸で定まる平面を$\boldsymbol{zx}$ **平面**

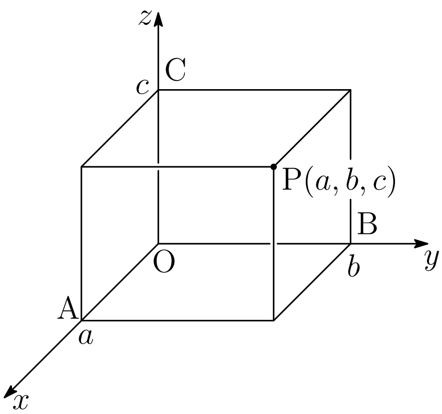
といい，これらをまとめて**座標平面**という．



空間の点Pに対して，Pを通り各座標軸に垂直な平面が，x軸，y軸，z軸と交わる点を，それぞれA，B，Cとする．A，B，Cの各座標軸上での座標が，それぞれa，b，cのとき，3つの実数の組

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$$

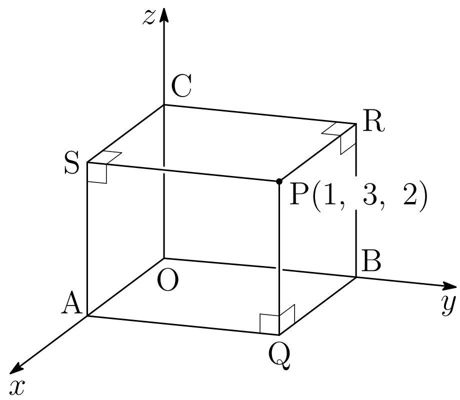
を点Pの**座標**といい，a，b，cをそれぞれ点Pの$\boldsymbol{x}$**座標**，$\boldsymbol{y}$**座標**，$\boldsymbol{z}$**座標**という．この点Pを$\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$と書くことがある．原点Oと，右上の図の点A，B，Cについては，O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(0, b, 0)，C(0, 0, c)である．



座標の定められた空間を**座標空間**という．

例 2.1 点 P(1, 3, 2) から xy 平面，yz 平面，zx 平面に垂線を下ろし，各平面との交点を，それぞれ Q，R，S とすると，Q(1, 3, 0)，R(0, 3, 2)，S(1, 0, 2) である．

xy 平面についてこの点 P と対称な点の座標は，(1, 3, −2) である．



練習 2.1 次の平面について点 P(1, 3, 2) と対称な点の座標を，それぞれ求めよ．

(1) yz 平面　　(2) zx 平面

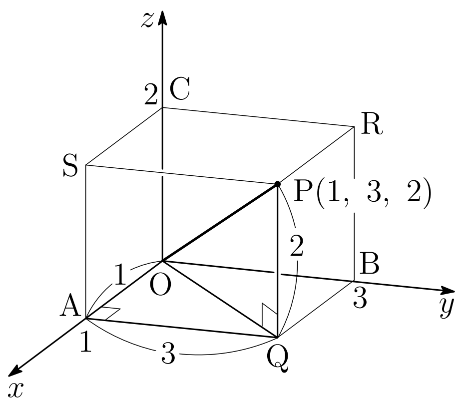
B 原点 O と点 P の距離

例 2.1 において，原点 O と点 P の距離を求めてみよう．

三平方の定理を使うと

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OP}^2 &= \mathrm{OQ}^2 + \mathrm{PQ}^2 \\
&= (\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AQ}^2) + \mathrm{PQ}^2 \\
&= 1^2 + 3^2 + 2^2 \\
&= 14
\end{aligned}
$$

OP > 0 であるから　　$\mathrm{OP} = \sqrt{14}$



点 P の座標が $(a,\ b,\ c)$ のときは，$\mathrm{OP}^2 = a^2 + b^2 + c^2$ となるから，次のことが成り立つ．

> 原点 O と点 P$(a,\ b,\ c)$ の距離は　　$\boldsymbol{\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

練習 2.2 原点 O と次の点の距離を求めよ．

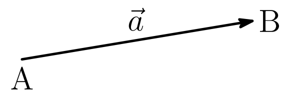
(1) P(2, 3, 6)　　(2) Q(3, 4, −5)

2.1.2　空間のベクトル

空間においても，平面の場合と同様に有向線分を考えることができる．空間の有向線分で，向きと大きさだけに着目したものが**空間のベクトル**である．ここでは，空間のベクトルについて考えてみよう．

A 空間のベクトル

空間において，始点を A，終点を B とする有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ で表し，その大きさを $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$ で表す．



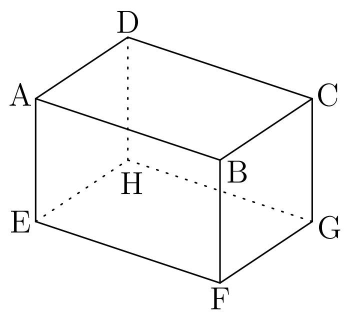
空間のベクトルも $\vec{\boldsymbol{a}}$，$\vec{\boldsymbol{b}}$ などで表すことがある．このとき，$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ や，$\vec{a}$ の逆ベクトル $-\vec{\boldsymbol{a}}$ の定義は，平面の場合とまったく同じである．

大きさが 0 のベクトルを**零ベクトル**といい，$\vec{\mathbf{0}}$ で表す．また，大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という．

例 2.2 右の図の直方体において，始点，終点がともに頂点となる有向線分でベクトルを考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{HG}}$$

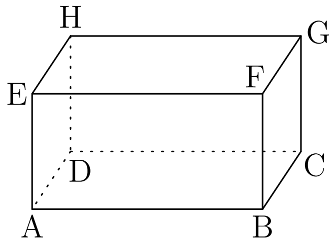
また，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ は，いずれも $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆ベクトルである．



練習 2.3 例 2.2 において，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ に等しいベクトルをあげよ．また，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の逆ベクトルで $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ 以外のものをあげよ．

空間のベクトルの和と差，実数倍の定義も，平面の場合とまったく同じである．さらに，それらに成り立つ性質は，空間のベクトルに対してもそのまま成り立つ．

例 2.3 右の図の立体は直方体である．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{EB}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})+\overrightarrow{\mathrm{CG}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}\end{aligned}$$

練習 2.4 例 2.3 の直方体において，次の □ に適する頂点を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\square}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\square\mathrm{D}}$

B ベクトルの分解

2 つずつ平行な 3 組の平面で囲まれる立体を**平行六面体**という．直方体も平行六面体である．平行六面体には，次のような性質がある．

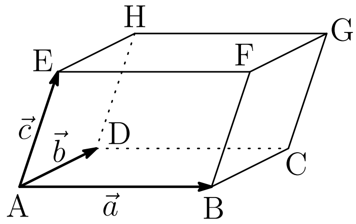
平行六面体の各面は，平行四辺形である．

例題 2.1 右の図の平行六面体において，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{c}$$

とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$



【解】 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}} = \overrightarrow{\mathrm{FE}} + \overrightarrow{\mathrm{EH}} + \overrightarrow{\mathrm{HD}} = -\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$

$= -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

練習 2.5 例題 2.1 の平行六面体の図において，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

空間において，同じ平面上にない4点O，A，B，Cが与えられたとき，次のことが成り立つ．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，この空間のどんなベクトル $\vec{p}$ も，適当な実数 s，t，u を用いて

$$\boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}}$$

の形に表すことができる．

[証明]　$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする．

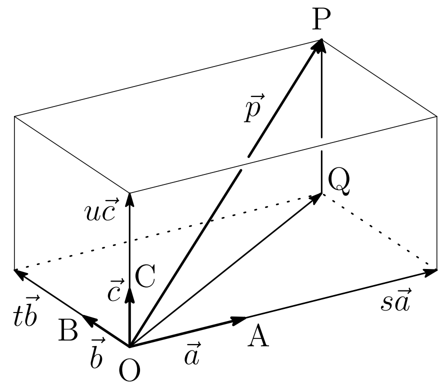
点Pを通り直線OCに平行な直線を引き，3点O,A,Bを通る平面OAB [1] との交点をQとすると，次が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}} \quad \cdots ①$$

[1]　点Qが平面OAB上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ となる実数 s，t がただ1組定まる．

[2]　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=u\vec{c}$ となる実数 u がただ1つ定まる．

①と［1］,［2］により，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ となる実数 s，t，u がただ1組定まる．　**[証終]**



[1] 一直線上にない3点O，A，Bを通る平面は，ただ1つ定まる．この平面を，平面OABということがある．

2.1.3　ベクトルの成分

座標空間でベクトルを考えて，ベクトルの表示について座標を利用してみよう．
ここでは，空間のベクトルの成分表示について学ぶ．

A ベクトルの成分表示

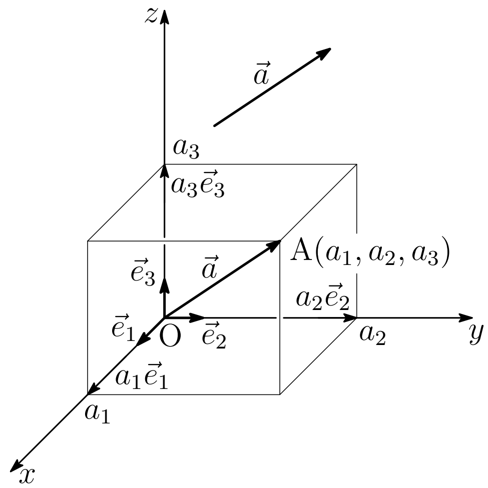
座標空間において，x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを**基本ベクトル**といい，それぞれ $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ で表す．

この空間のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

のとき，$\vec{a}$ は次のように表される．

$$\boldsymbol{\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3}$$



この $\vec{a}$ を，次のようにも書く．

$$\boldsymbol{\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)} \qquad ①$$

a_1，a_2，a_3 を，それぞれ $\vec{a}$ の $\boldsymbol{x}$ **成分**，$\boldsymbol{y}$ **成分**，$\boldsymbol{z}$ **成分**といい，まとめて $\vec{a}$ の**成分**という．また，① を $\vec{a}$ の**成分表示**という．

空間の基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ の成分表示は，次のようになる．

$$\vec{e}_1=(1,\ 0,\ 0), \quad \vec{e}_2=(0,\ 1,\ 0), \quad \vec{e}_3=(0,\ 0,\ 1)$$

空間の零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は，$\vec{0}=(0,\ 0,\ 0)$ である．

また，空間の 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3}$$

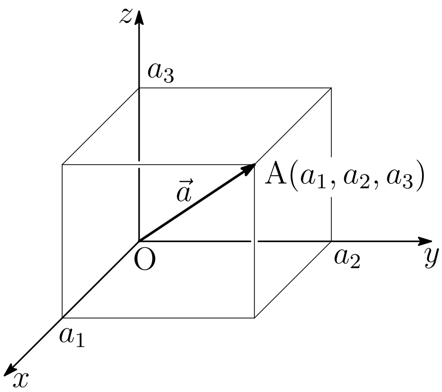
練習 2.6 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が等しくなるように，x，y，z の値を定めよ．

$$\vec{a}=(2,-1,-3), \quad \vec{b}=(x-4,\ y+2,-z+1)$$

座標空間において，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標が $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ であるとする．
このとき

$$|\vec{a}| = \mathrm{OA} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

である．
したがって，次のことが成り立つ．



ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ の大きさは　$\boldsymbol{|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$

練習 2.7 次のベクトルの大きさを求めよ．

(1) $\vec{a} = (3,\ 4,\ 5)$

(2) $\vec{b} = (-1,\ 2, -2)$

B 和，差，実数倍の成分表示

平面上の場合と同様にして，空間のベクトルの和，差，実数倍の成分表示は，次のようになる．

和，差，実数倍の成分表示

$$\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3) + (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)}$$

$$\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3) - (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)}$$

$$\boldsymbol{k(a_1,\ a_2,\ a_3) = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)} \quad k \text{ は実数}$$

例 2.4 $\vec{a}=(2,-3,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ 0,\ 5)$ のとき

$$\begin{aligned}3\vec{a}-2\vec{b}&=3(2,-3,\ 4)-2(-1,\ 0,\ 5)\\&=(6+2,-9-0,\ 12-10)\\&=(8,-9,\ 2)\end{aligned}$$

練習 2.8 $\vec{a}=(1,\ 3,-2)$, $\vec{b}=(4,-3,\ 0)$ のとき，次のベクトルを求めよ．

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$

(3)　$3\vec{a}+2\vec{b}$　　(4)　$2\vec{a}-3\vec{b}$

(5)　$2(-\vec{a}+4\vec{b})$　　(6)　$-3(\vec{a}-2\vec{b})$

C 座標空間の点とベクトル

原点Oと2点$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$の成分は，次のようになる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= (b_1,\ b_2,\ b_3) - (a_1,\ a_2,\ a_3)\\ &= (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)\end{aligned}$$

したがって，次のことがいえる．

2点A，Bとベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2点$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$について

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)}$$

$$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

例 2.5 2点$\mathrm{A}(-1,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(2,\ 4, -3)$について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2 - (-1),\ 4 - 0,\ \ -3 - 2) = (3,\ 4,\ \ -5)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

練習 2.9 次の2点A，Bについて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を成分表示し，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 4)$，$\mathrm{B}(3, -1,\ 5)$

(2) $\mathrm{A}(3,\ 0, -2)$，$\mathrm{B}(1, -4,\ 2)$

2.1.4　ベクトルの内積

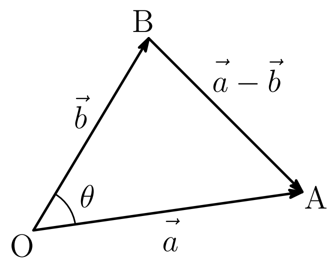
平面上の 2 つのベクトルの内積は，三角形の余弦定理に関連して定義した．
まったく同様にして，空間のベクトルにも内積を定義することができる．

A 空間のベクトルの内積

空間の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，そのなす角 θ を平面の場合と同様に定義し，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ も同じ式

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

で定義する．



空間のベクトルについても，16 ページで示した等式

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

が成り立つので，$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ とすると

$$\begin{aligned}&(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2 \\ &\qquad = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

整理すると　$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

したがって，次のことがいえる．

ベクトルの内積

$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ は $\vec{0}$ でないとし，そのなす角を θ とする．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である．このとき

1　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$

2　$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}}$

$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ と定義する．

例題 2.2 3点 A(1, 3, 2)，B(2, 5, 3)，C(−1, 5, 6) を頂点とする △ABC について，次のものを求めよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　　(2)　∠BAC の大きさ θ

【解】 (1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-1,\ 5-3,\ 3-2) = (1,\ 2,\ 1)$$

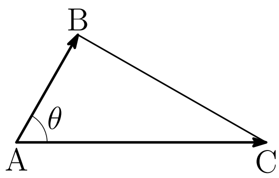
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1-1,\ 5-3,\ 6-2) = (-2,\ 2,\ 4)$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1\times(-2)+2\times2+1\times4 = 6$$

(2)

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{6}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{24}} = \frac{1}{2}$$



$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$\theta = 60^\circ$

練習 2.10 次の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積およびなす角 θ を求めよ．

$$\vec{a} = (2, -1, -2),\ \vec{b} = (4,\ 3, -5)$$

練習 2.11 3点 A(6, 7, −8)，B(5, 5, −6)，C(6, 4, −2) を頂点とする △ABC において，∠ABC の大きさ θ を求めよ．

B ベクトルの垂直

空間のベクトルの垂直条件について，次のことが成り立つ．

ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ で，$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

$$\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0}$$

応用例題 2.1 ベクトル $\vec{a} = (2, -1,\ 0)$，$\vec{b} = (6, -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 2 のベクトル $\vec{p}$ を求めよ．

考え方　$\vec{p} = (x,\ y,\ z)$ として，垂直条件 $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$，$\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$ と $|\vec{p}| = 2$ から x，y，z の方程式を導く．これを解くには，まず y，z を消去して得られる x の 2 次方程式を解く．

【解】 $\vec{p} = (x,\ y,\ z)$ とする．

$\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$　であるから　$2x - y = 0$　$\cdots$ ①

$\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$　であるから　$6x - 2y + z = 0$　$\cdots$ ②

$|\vec{p}| = 2$　であるから　$x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$　$\cdots$ ③

①，② から，y，z を x で表すと

$$y = 2x,\ z = -2x$$

これらを ③ に代入すると

$$x^2 + (2x)^2 + (-2x)^2 = 4$$

整理すると　$9x^2 = 4$　$\leftarrow x^2 = \frac{4}{9}$

これを解くと　$x = \pm\dfrac{2}{3}$

$x = \dfrac{2}{3}$ のとき　$y = \dfrac{4}{3},\ z = -\dfrac{4}{3}$

$x = -\dfrac{2}{3}$ のとき　$y = -\dfrac{4}{3},\ z = \dfrac{4}{3}$

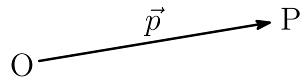
(答) $\vec{p} = \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$ または $\vec{p} = \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

[注意] 上で求めた 2 つのベクトルは，互いに逆ベクトルである．

練習 2.12 ベクトル $\vec{a} = (1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b} = (-1,\ 1,\ 0)$ の両方に垂直で，大きさが3のベクトル $\vec{p}$ を求めよ．

2.1.5　位置ベクトル

空間においても点Oを定めておくと，どんな点Pの位置も，ベクトル $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって決まる．このようなベクトル $\vec{p}$ を，点Oに関する点Pの**位置ベクトル**という．
位置ベクトルを用いて空間図形の性質を調べてみよう．



A 位置ベクトル

空間においても点Pの位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを，$\mathbf{P}(\vec{\boldsymbol{p}})$ で表す．
以下，とくに断らない限り，点Oに関する位置ベクトルを考える．
平面上の場合とまったく同様に，次のことが成り立つ．

1　2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{a}}$

線分ABを $m:n$ に内分する点，外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

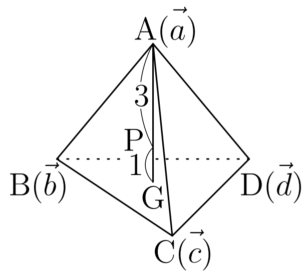
内分　$\cdots$　$\dfrac{\boldsymbol{n\vec{a}+m\vec{b}}}{\boldsymbol{m+n}}$　　外分　$\cdots$　$\dfrac{\boldsymbol{-n\vec{a}+m\vec{b}}}{\boldsymbol{m-n}}$

とくに，線分ABの中点の位置ベクトルは　$\dfrac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}}{\boldsymbol{2}}$

2　3点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心の位置ベクトルは

$$\frac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}}{\boldsymbol{3}}$$

練習 2.13　4点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{D}(\vec{d})$ を頂点とする四面体ABCDにおいて，$\triangle\mathrm{BCD}$ の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$，線分AGを $3:1$ に内分する点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とする．$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

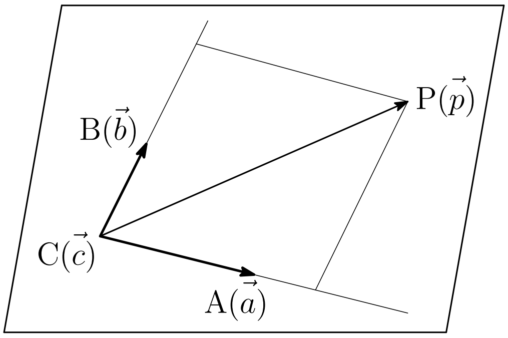


B 平面 ABC 上の点の位置ベクトル

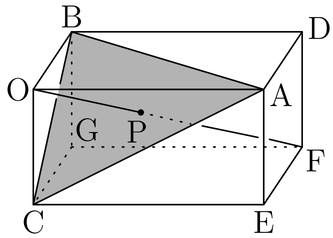
3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ で定まる平面 ABC 上に，点 P があるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$
$$= s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c})$$

となる実数 s，t が，ただ1組定まる．



応用例題 2.2 右の図のような直方体において，対角線 OF と平面 ABC の交点を P とする．
OP : OF を求めよ．



考え方　O に関する位置ベクトルを考え，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ とする．P が平面 ABC 上にあること，線分 OF 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて2通りに表す．

【解】 O に関する位置ベクトルを考え，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ とする．
P は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c})$$
$$= s\vec{a} + t\vec{b} + (1 - s - t)\vec{c}$$

また，P は線分 OF 上にあるから，OP : OF $= k : 1$ とおくと

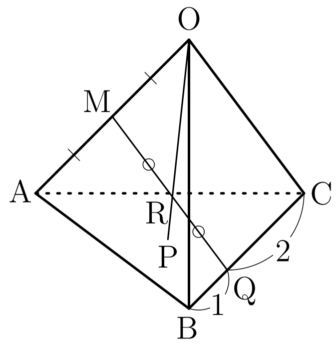
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OF}} = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた表し方はただ1通りであるから

$$s = k,\ t = k,\ 1 - s - t = k$$

これを解くと，$k = \dfrac{1}{3}$ であるから　　　OP : OF $= 1 : 3$

練習 2.14 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とする．OR : OP を求めよ．



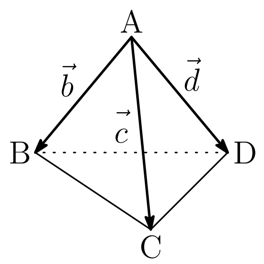
C 内積の利用

空間のベクトルについても，20 ページで示した内積の性質は，すべて成り立つ．内積を利用して，空間図形の性質を証明してみよう．

応用例題 2.3 正四面体 ABCD において，AB⊥CD が成り立つ．
このことを，ベクトルを用いて証明せよ．

考え方　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ を示す．正四面体の各面が正三角形であることも利用する．

[証明] $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とすると



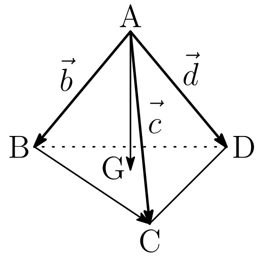
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})\\&=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

正四面体 ABCD においては，$\vec{b}$ と $\vec{d}$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は，ともに 60° であるから

$$\vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{b}||\vec{d}|\cos 60^\circ,$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ$$

$|\vec{d}|=|\vec{c}|$ であるから　　$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}$
よって，① により $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ となる．
したがって　　AB⊥CD　　**[証終]**

練習 2.15 正四面体 ABCD において，△BCD の重心を G とすると，AG⊥BC である．このことを，ベクトルを用いて証明せよ．



2.1.6　座標空間における図形

座標空間において，2 点間の距離，線分の内分点・外分点の座標，座標平面に平行な平面や球について調べてみよう．

A 2 点間の距離と内分点・外分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，A，B 間の距離を表す式は，
$\mathrm{AB} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ であることから得られる．
また，線分 AB を $m:n$ に内分する点を C，外分する点を D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n}$$

$\longleftarrow$ O は原点

である．以上から，次のことがいえる．

2点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

1　A，B間の距離は　$\boldsymbol{AB = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}}$

2　線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n},\ \frac{na_3+mb_3}{m+n}\right)}$$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \frac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)}$$

練習 2.16 2点 $A(1,\ 3, -2)$，$B(4, -3,\ 1)$ について，次のものを求めよ．

(1)　2点 A，B 間の距離　　(2)　線分 AB の中点の座標

(3)　線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標

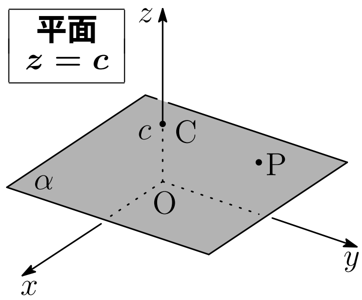
(4)　線分 AB を $2:1$ に外分する点の座標

練習 2.17 3点 $A(2, -1,\ 4)$，$B(1,\ 3,\ 0)$，$C(3,\ 1,\ 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標を，原点 O に関する位置ベクトルを利用して求めよ．

B 座標平面に平行な平面の方程式

座標平面に平行な平面について考えてみよう．

点 C$(0,\ 0,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面を α とする．
平面 α 上にある点 P の z 座標は常に c である．
すなわち，平面 α は方程式



$$z = c \qquad \cdots ①$$

を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体である．
① を**平面 α の方程式**という．

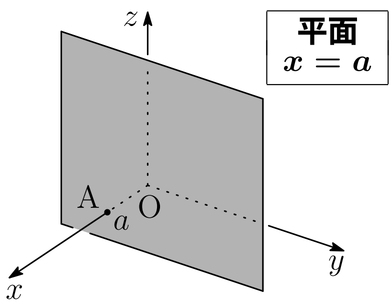
一般に，次のことがいえる．

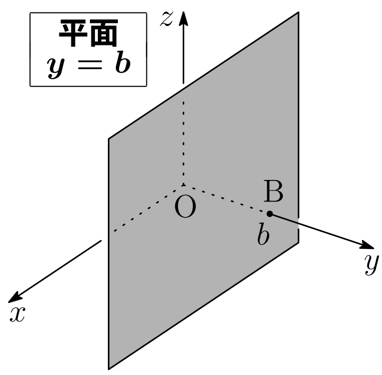
座標平面に平行な平面の方程式

点 A$(a,\ 0,\ 0)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$\boldsymbol{x = a}$

点 B$(0,\ b,\ 0)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は　$\boldsymbol{y = b}$

点 C$(0,\ 0,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$\boldsymbol{z = c}$

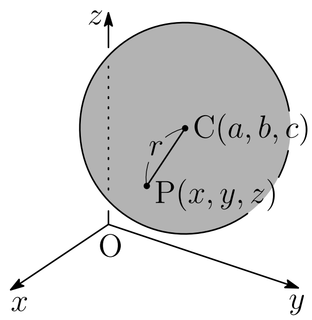




練習 2.18 点 $(1,\ 2,\ 3)$ を通り，次の平面に平行な平面の方程式を求めよ．

(1)　xy 平面　　(2)　yz 平面　　(3)　zx 平面

C 球面の方程式



空間において，定点Cからの距離が一定値rであるような点の全体を，Cを中心とする半径rの**球面**，または単に球という．

点C$(a,\ b,\ c)$を中心とする半径rの球面上に点P$(x,\ y,\ z)$をとると，点PはCP$=r$を満たすので，

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

すなわち　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

が成り立つ．これを，この**球面の方程式**という．

球面の方程式

点$(a,\ b,\ c)$を中心とする半径rの球面の方程式は

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$$

とくに，原点を中心とする半径rの球面の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=r^2}$$

例 2.6　点$(2, -3,\ 4)$を中心とする半径5の球面の方程式は

$$(x-2)^2+\{y-(-3)\}^2+(z-4)^2=5^2$$

すなわち　$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$

練習 2.19 次のような球面の方程式を求めよ．

(1) 原点を中心とする半径3の球面

(2) 点$(1,\ 2, -3)$を中心とする半径4の球面

(3) 点A$(0,\ 4,\ 1)$を中心とし，点B$(2,\ 4,\ 5)$を通る球面

例題 2.3 2点 $\mathrm{A}(2,\ 0, -3)$，$\mathrm{B}(-2,\ 6,\ 1)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ．

【解】 線分 AB の中点を C とすると，この球面の中心は点 C で，半径は線分 CA の長さである．C の座標は

$$\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{0+6}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0,\ 3, -1)$$

よって　$\mathrm{CA} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2 + \{-3-(-1)\}^2} = \sqrt{17}$

したがって，求める球面の方程式は

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 + \{z-(-1)\}^2 = (\sqrt{17})^2$$

すなわち　$x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$

練習 2.20 2点 $\mathrm{A}(4, -2,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 4, -5)$ を直径の両端とする球面の方程式を求めよ．

応用例題 2.4 球面 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である．その中心の座標と半径を求めよ．

> **考え方**　xy 平面は方程式 $z=0$ で表される．球面の方程式で，$z=0$ とすると，x，y の 2 次方程式が得られる．

【解】　球面の方程式で，$z=0$ とすると

$$(x-4)^2+(y+2)^2+(0-3)^2=5^2$$

すなわち　$(x-4)^2+(y+2)^2=4^2$　　$\longleftarrow 5^2-3^2=16=4^2$

この方程式は，xy 平面上では円を表す．　$\longleftarrow$ xy 平面上では，z 座標 $=0$

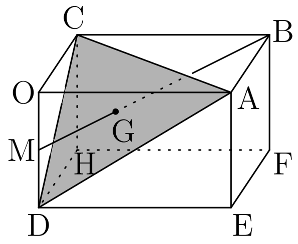
その中心の座標は $(4,-2,\ 0)$，半径は 4 である．

練習 2.21 応用例題 2.4 の球面と yz 平面が交わる部分は円である．その中心の座標と半径を求めよ．

2.1.7　補充問題

1 $\vec{p}=(-1,\ 5,\ 0)$ を，3 つのベクトル $\vec{a}=(1,-2,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 0)$，$\vec{c}=(2,-3,\ 1)$ と適当な実数 s，t，u を用いて，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ．

2 右の図のように，直方体 OABC-DEFH において，$\triangle$ACD の重心を G，辺 OD の中点を M とするとき，点 G は線分 BM を 2 : 1 に内分することを証明せよ．



3 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 2, 1)，B(−1, 0, 1) から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ．

【答】

1 $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$　　$[s - 2t + 2u = -1,\ -2s + t - 3u = 5,\ 3s + u = 0]$

2 $\Bigg[$ 線分 BM を 2 : 1 に内分する点を G$'$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OG'}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{3}$

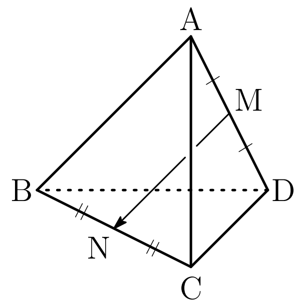
これから $\overrightarrow{\mathrm{OG'}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を導く． $\Bigg]$

3 (0, 1, 1)　　[P(0, y, z) として，$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{AP}^2$，$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{BP}^2$ から]

2.2 章末問題

2.2.1 章末問題 A

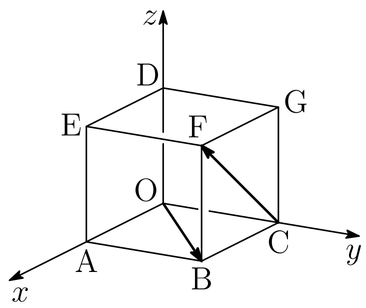
1 四面体 ABCD の辺 AD の中点を M，辺 BC の中点を N とするとき，
$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ を満たす実数 s，t の値を求めよ．



2 4 点 A(1, 2, 1)，B(5, 5, −1)，C(x, y, z)，D(−4, 2, 3) が平行四辺形 ABCD の頂点となるように，x，y，z の値を求めよ．

3 $\vec{a} = (1,\ 3, -2)$，$\vec{b} = (1, -2,\ 0)$ と実数 t に対して，$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ とする．$\vec{b} \perp \vec{p}$ となるような t の値を求めよ．また，このときの $|\vec{p}|$ を求めよ．

4 右の図の立方体 OABC-DEFG は，1 辺の長さが 2 である．



(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ を成分表示せよ．

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ を求めよ．

(3)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ のなす角 θ を求めよ．

5 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ を，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸に関する基本ベクトルとし，ベクトル $\vec{a}=(-1,\ \sqrt{2},\ 1)$ と $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ のなす角をそれぞれ α，β，γ とする．

(1) $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ の値を求めよ．

(2) α，β，γ を求めよ．

6 2点 A(1, 2, 2)，B(2, 3, 4) に対して，次のような点の座標を求めよ．

(1) A，B から等距離にある x 軸上の点 P

(2) △ABP の重心 G

7 球面 $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=5^2$ と平面 $z=3$ が交わる部分は円である．その中心の座標と半径を求めよ．

2.2.2 章末問題 B

8 3点 A(a, −1, 5)，B(4, b, −7)，C(5, 5, −13) が一直線上ある．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 k の値を求めよ．

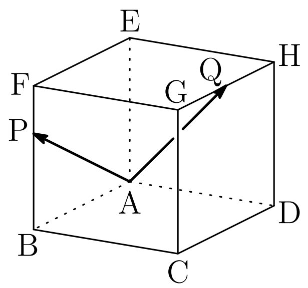
(2) a，b の値を求めよ．

9 3 点 O(0, 0, 0)，A(-1, -2, 1)，B(2, 2, 0) を頂点とする △OAB について，次の問いに答えよ．

(1) ∠AOB の大きさを求めよ．

(2) △OAB の面積 S を求めよ．

10 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH において，辺 BF 上に点 P をとり，辺 GH 上に点 Q をとる．



(1) $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HQ}$ を求めよ．

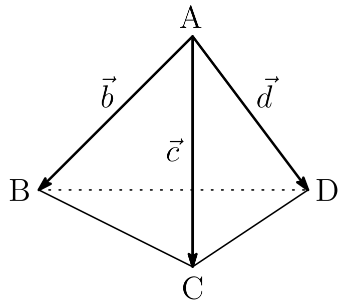
(2) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ を $|\overrightarrow{BP}|$，$|\overrightarrow{HQ}|$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ の最大値を求めよ．

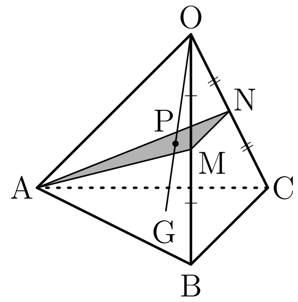
11 四面体 ABCD において，次のことが成り立つ．

$$\mathrm{AC} \perp \mathrm{BD} \quad \text{ならば} \quad \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2$$

このことを，ベクトルを用いて証明せよ．



12 四面体 OABC において，$\triangle$ABC の重心を G，辺 OB の中点を M，辺 OC の中点を N とする．直線 OG と平面 AMN の交点を P とするとき，OG : OP を求めよ．



ヒント

9　ベクトルの内積を利用する．　**10**　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HQ}}$ など．

11　線分の長さの 2 乗をベクトルの内積で表す．　**12**　応用例題 2.2 参照．

【答】

1 $s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$　$[\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}$ を利用$]$

2 $x=0$，$y=5$，$z=1$　$[\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から$]$

3 $t=1$，$|\vec{p}|=3$　$[\vec{p}=(1+t,\ 3-2t,\ -2)]$

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=(2,\ 0,\ 2)$　(2) 4　(3) 60°

5 (1) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$　(2) $\alpha=120^\circ$，$\beta=45^\circ$，$\gamma=60^\circ$
$[\vec{e}_1=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e}_2=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e}_3=(0,\ 0,\ 1)]$

6 (1) $(10,\ 0,\ 0)$　(2) $\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{5}{3},\ 2\right)$　[(1) $\mathrm{P}(x,\ 0,\ 0)$ とおく]

7 中心の座標は $(2, -3,\ 3)$，半径は $2\sqrt{6}$　$[(x-2)^2+(y+3)^2=24$，$z=3]$

8 (1) $k=\dfrac{2}{3}$　(2) $a=2$，$b=3$

9 (1) 150°　(2) $\sqrt{3}$　[(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-6$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2\sqrt{2}$]

10 (1) 0　(2) $2|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|+2|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|$　(3) 8
[(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$]

11 $[\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ として内積を利用する$]$

12 $5:3$　[P は平面 AMN 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AM}}+t\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ とおくと
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AM}}+t\overrightarrow{\mathrm{AN}}$
また，$\mathrm{OG}:\mathrm{OP}=1:k$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$]