第 2 章　2次関数

2.1　2次関数とグラフ

2.1.1　関数とグラフ

自然現象や社会現象の中には，2 つの量が互いに関連しながら変化するような現象が多くある．変化する量 x，y について，y が x の 1 次式や 2 次式で表される場合を調べてみよう．

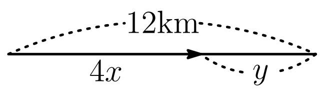
A 関数

2 つの変数 x，y について，x の値を決めるとそれに応じて y の値がただ 1 つ定まるとき，y は x の**関数**であるという．また，その変数 x のとりうる値の範囲を，その関数の**定義域**という．

例 2.1 x の関数と定義域

12km の道のりを時速 4 km で歩く．x 時間歩いたとき，残りの距離を y km とすると，$y = 12 - 4x$ となる．y は x の関数で，定義域は，$0 \leqq x \leqq 3$ である．

$$\begin{aligned}(\text{距離}) &= (\text{速さ}) \times (\text{時間}) \\ &= 4 \times x = 4x\end{aligned}$$



関数の定義域を示すのに，関数の式の後にかっこをつけて示すことがある．例 2.1 の関数は，次のように示される．

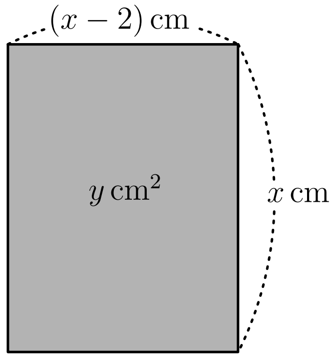
$$y = 12 - 4x \quad (0 \leqq x \leqq 3)$$

← 関数では定義域も示す．

練習 2.1 気温は地上から 10km までは，100m 高くなるごとに 0.6 ℃ずつ下がるという．地上の気温が 30 ℃のとき，地上から高さ x km の地点の気温を y ℃とすると，y は x の関数である．y を x の式で表せ．

例 2.2 関数の式と定義域

縦が x cm で，横が縦より 2cm 短い長方形の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とすると



$$y = x(x-2)$$

定義域は，$x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ より

$$x > 2$$

よって　$y = x^2 - 2x \quad (x > 2)$

練習 2.2 周の長さが 20cm の長方形を作る．ただし，縦より横を長くする．縦の長さを x cm，面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とするとき，y を x の式で表せ．

y が x の 1 次式で表されるとき，y は x の **1 次関数**であるといい，x の 2 次式で表されるとき，y は x の **2 次関数**であるという．

たとえば，$y = 2x + 3$ は x の 1 次関数であり，$y = 2x^2 + 3x + 1$ は x の 2 次関数である．

1 次関数，2 次関数の一般形

1 次関数は	$y = ax + b$	ただし，$a \neq 0$
2 次関数は	$y = ax^2 + bx + c$	ただし，$a \neq 0$

[注意] 定義域が実数全体であるときは，定義域を示すことを省略する．

練習 2.3 次の y を x で表し，y が x の 2 次関数であるものを選べ．

(1) 直径が $(x+1)$ cm の円の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とする．

(2) 1 辺が x cm の正方形の紙から，1 辺が $(x-2)$ cm の正方形を切り取った残りの部分の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とする．

(3) 面積が $10\mathrm{cm}^2$ の三角形において，底辺の長さを x cm，高さを y cm とする．

B 関数 $f(x)$

x の関数 y を表す式を $\boldsymbol{f(x)}$ とか $\boldsymbol{g(x)}$ などと書くことがある．
$f(x)$ の x に数 k を代入して計算した $f(x)$ の値を $\boldsymbol{f(k)}$ で表す．
$y=f(x)$ は，$f(x)$ が x の 1 次式のとき x の 1 次関数であり，$f(x)$ が x の 2 次式のとき x の 2 次関数である．
x の関数 $y=f(x)$ を単に，**関数 $\boldsymbol{f(x)}$** ともいう．

例 2.3 2 次関数 $\boldsymbol{f(x)=x^2-2x}$ において，$\boldsymbol{x=5}$ のときの値．

$f(x)$ の式の x に 5 を代入して

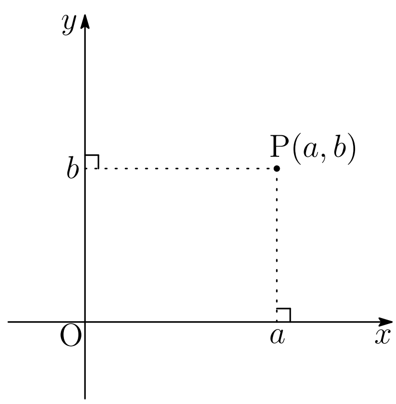
$$f(5)=5^2-2\cdot 5=25-10=15$$

練習 2.4 2次関数 $f(x)=x^2+2x+1$ において，次の値を求めよ．

(1) $f(3)$　　(2) $f(0)$　　(3) $f(-1)$

(4) $f(-2)$　　(5) $f(a)$　　(6) $f(a-1)$

C 関数のグラフ

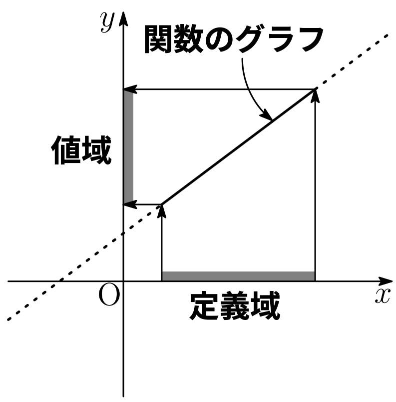


平面上に，右の図のような点Oで垂直に交わる2本の数直線をとり，それらを x 軸と y 軸とする．点Oを**原点**といい，x 軸と y 軸を**座標軸**という．

この平面上の点Pの位置は，図のように2つの実数の組 (a,b) で表される．この組 (a,b) を点Pの**座標**といい，このような点Pを $\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と書く．また，座標が (a,b) である点を，単に**点** $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ ということがある．

このようにして座標を定めた平面を**座標平面**という．

1次関数のグラフが直線になることは，すでに学んでいる[a]．



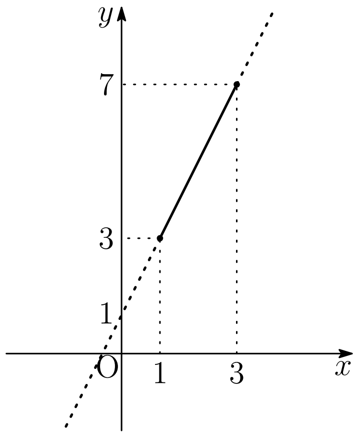
一般に，関数 $y=f(x)$ の**グラフ**とは，変数 x が定義域にあるような点 $(x,f(x))$ 全体のことである．また，関数の定義域の x の値に対応して y がとる値の範囲を，この関数の**値域**という．

グラフを用いて関数の値域を求めてみよう．

[a] 1次関数 $y=ax+b$ のグラフは，傾きが a，切片が b の直線である．

例題 2.1 次の関数のグラフをかけ．また，関数の値域を求めよ．

$$y = 2x + 1 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$$



【解】 この関数のグラフは，$y = 2x + 1$ のグラフのうち，$1 \leqq x \leqq 3$ に対応する部分である．

$x = 1$ のとき　$y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$x = 3$ のとき　$y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

よって，グラフは右の図の実線部分である．

値域は　$3 \leqq y \leqq 7$

[注意] 関数のグラフをかく場合，定義域内は実線でかくが，定義域外は破線でかくことが多い．

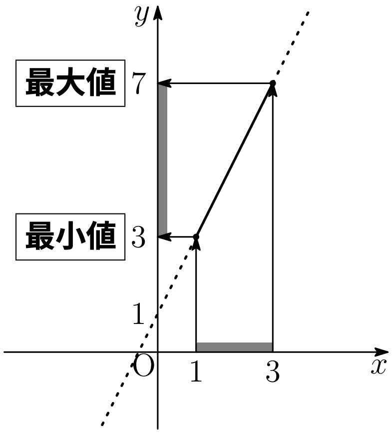
練習 2.5 次の関数のグラフをかけ．また，関数の値域を求めよ．

(1) $y = 3x - 2 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y = -2x + 4 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

D 関数の最大値・最小値

関数の値域に最大の値があるとき，その値を**関数の最大値**という．また，最小の値があるとき，その値を**関数の最小値**という．



例題 2.1 で調べたように関数

$$y = 2x + 1 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$$

の値域は，$3 \leqq y \leqq 7$ である．

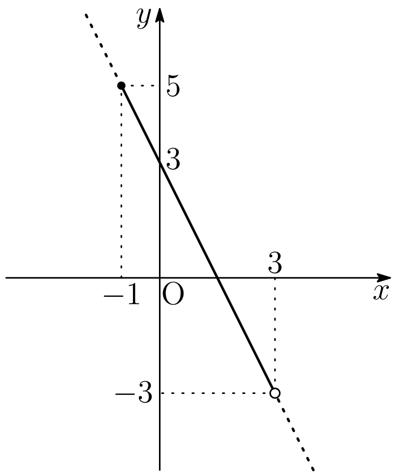
したがって，この関数の

最大値は 7，最小値は 3

である．

例題 2.2 次の関数の値域を求めよ．また，関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ．

$$y = -2x + 3 \quad (-1 \leqq x < 3)$$



【解】 この関数のグラフは右の図の実線部分である．

よって，関数の値域は

$$-3 < y \leqq 5$$

である．また，この関数の

最大値は 5 であり，

最小値はない．

[注意] y は -3 にいくらでも近い値をとるが，定義域のどんな x に対しても $y = -3$ とはならないので，最小値は存在しない．

練習 2.6 次の関数の値域を求めよ．また，関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1)　$y = 2x - 1 \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$　　　(2)　$y = -3x + 5 \quad (0 < x \leqq 3)$

E 身の回りにある関数

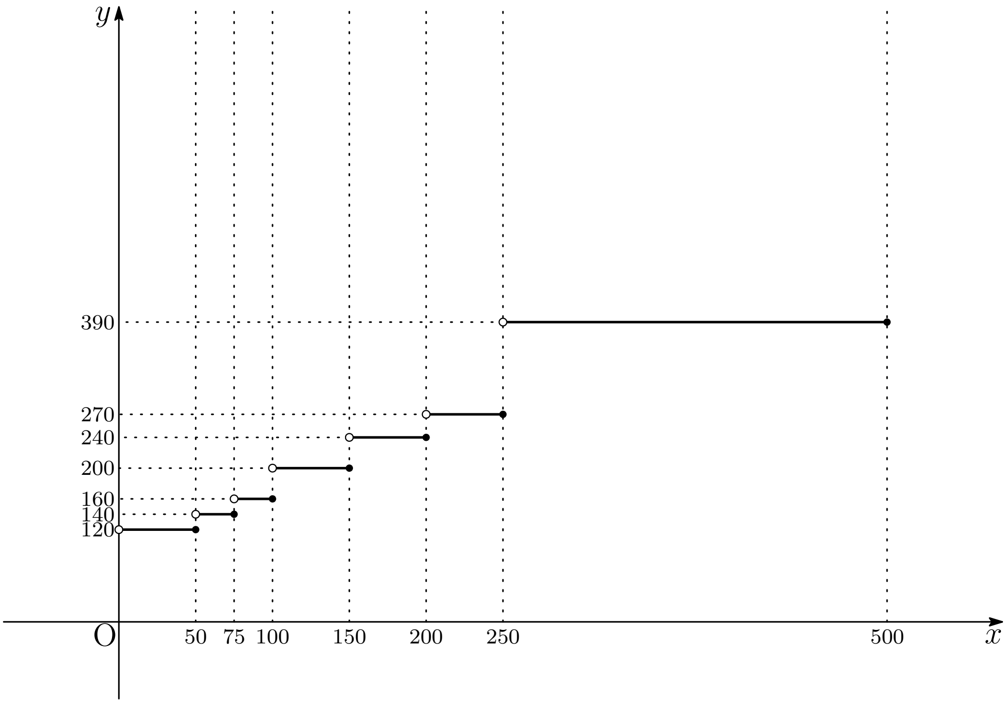
身の回りには，関数の式が段階的に定義されるものがある．

例 2.4 重さが 500g までの定形外の郵便料金は，右の表のようになっている．
郵便物の重さを x g，普通郵便の料金を y 円とすると，y は x の関数である．
この場合，関数の定義域を

$$0 < x \leqq 500$$

としてグラフをかくと，下の図のようになる．

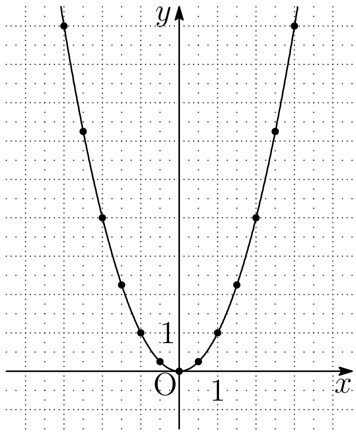
重さ	普通	速達
50g まで	120 円	390 円
75g まで	140 円	410 円
100g まで	160 円	430 円
150g まで	200 円	470 円
200g まで	240 円	510 円
250g まで	270 円	540 円
500g まで	390 円	760 円



練習 2.7 例 2.4 において，郵便物の重さを x g，速達郵便の料金を y 円とするとき，この関数のグラフを上の図を利用してかけ．

2.1.2　2次関数のグラフ

2次関数 $y = x^2$ のグラフは，右の図のような曲線になる．
このグラフは，点 (x, x^2) を多くとっていくと得られる．
ここでは，まず基本的な2次関数 $y = ax^2$ のグラフを調べ，それをもとにほかの2次関数のグラフも調べていこう．

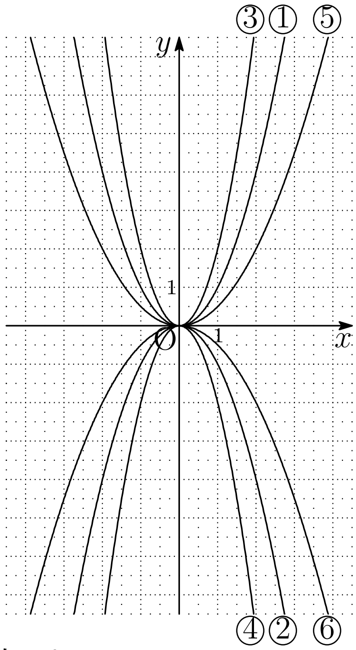


A　2次関数 $y = ax^2$ のグラフ

2次関数

①	$y = x^2$	②	$y = -x^2$
③	$y = 2x^2$	④	$y = -2x^2$
⑤	$y = \dfrac{1}{2}x^2$	⑥	$y = -\dfrac{1}{2}x^2$

のグラフは，それぞれ右の図のような曲線になる．



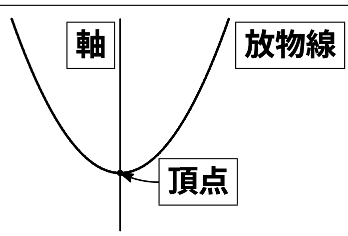
① と ② は x 軸ついて対称．
③ と ④ , ⑤ と ⑥ も，それぞれ x 軸について対称．

2次関数 $y = ax^2$ のグラフには，次のような特徴がある．

1　原点を通り，y 軸について対称である．

2　$a > 0$ のとき，上に開いた形をしている．
　　$a < 0$ のとき，下に開いた形をしている．

2次関数 $y = ax^2$ のグラフの形の曲線を**放物線**という．この放物線は左右に限りなくのびており，また対称の軸をもつ．この軸を放物線の**軸**といい，放物線とその軸の交点を放物線の**頂点**という．

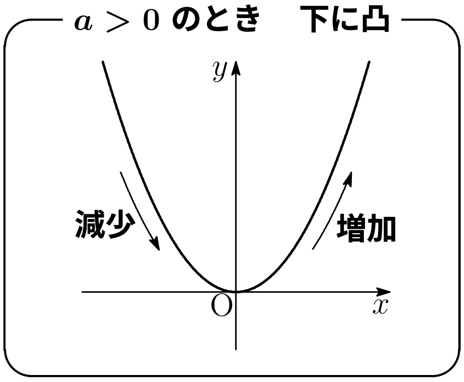


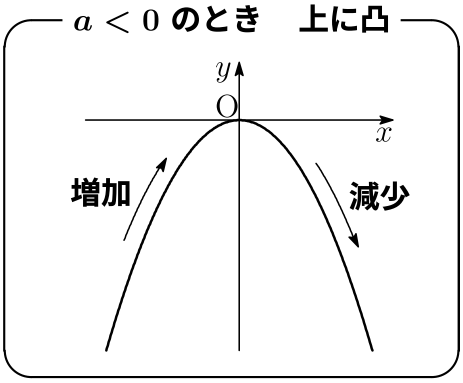
上に開いた形の放物線は**下に凸**であるといい，下に開いた形の放物線は**上に凸**であるという．

2 次関数 $y = ax^2$ の y の値の変化については，次のことがいえる．

　$a > 0$ のとき，$x = 0$ の前後で減少から増加に変わる．

　$a < 0$ のとき，$x = 0$ の前後で増加から減少に変わる．





練習 2.8 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その放物線は上に凸，下に凸のどちらであるか．

(1) $y = 3x^2$　　　　(2) $y = -3x^2$

(3) $y = \dfrac{1}{3}x^2$　　　　(4) $y = -\dfrac{1}{3}x^2$

2次関数 $y = ax^2$ のグラフについてまとめると，次のようになる．

2次関数 $y = ax^2$ のグラフ

グラフは放物線で，軸は y 軸，頂点は原点である．
$a > 0$ のとき　下に凸　　　$a < 0$ のとき　上に凸

B 2次関数 $y = ax^2 + q$ のグラフ

次の2つの2次関数のグラフの関係を調べてみよう．

$$y = 2x^2, \quad y = 2x^2 + 3$$

2つの関数の値を比べると，右の表のように，x のどの値についても，それに対応する $2x^2 + 3$ の値は $2x^2$ の値より3だけ大きい．

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	$\cdots$ **+3**
$2x^2$**+3**	$\cdots$	11	5	3	5	11	$\cdots$

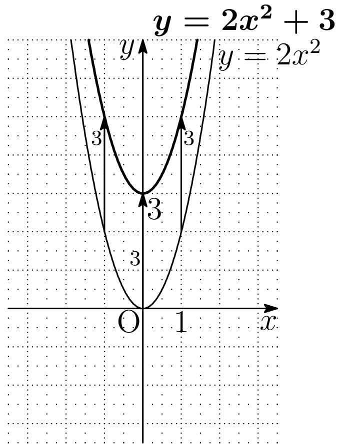
よって，$y = 2x^2 + 3$ のグラフ上の各点は，$y = 2x^2$ のグラフ上の各点を，

y 軸の正の向きに3だけ移動させたもの

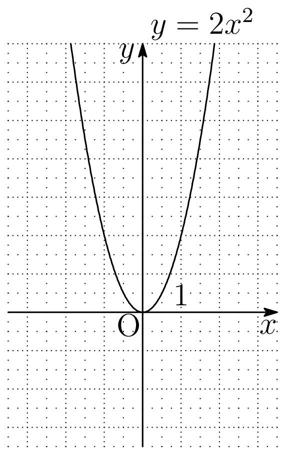
になっている．

したがって，$y = 2x^2 + 3$ のグラフは右の図のようになる．

その軸は y 軸，頂点は点 $(0, 3)$ である．



練習 2.9 $y = 2x^2 - 3$ のグラフを下の図にかけ．また，その放物線の軸と頂点をいえ．



図形上の各点を一定の方向に一定の距離だけ動かす移動を，**平行移動**という．一般に，次のことがいえる．

$y = ax^2 + q$ のグラフ

2 次関数 $y = ax^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを，
点 $(0, q)$ が頂点となるように平行移動した放物線である．
その軸は y 軸である．

練習 2.10 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点を求めよ．

(1) $y = x^2 + 1$

(2) $y = -2x^2 + 3$

(3) $y = -x^2 - 2$

(4) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 4$

C 2 次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフ

次の 2 つの 2 次関数のグラフの関係を調べてみよう.

$$y=2x^2,\qquad y=2(x-3)^2$$

2 つの関数の値を比べると，次のような表ができる.

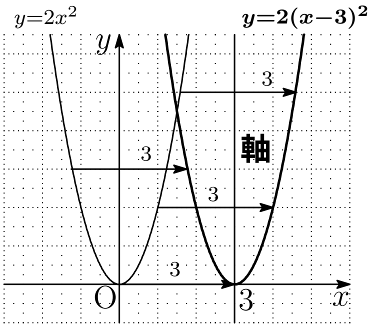
x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$
$2(x-3)^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$

この表から，$y=2(x-3)^2$ のグラフ上の各点は，$y=2x^2$ のグラフ上の各点を，

x 軸の正の向きに 3 だけ
平行移動させたもの

になっていることがわかる.

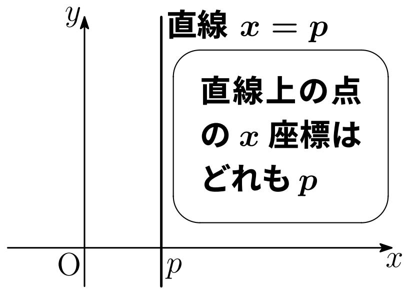
したがって，$y=2(x-3)^2$ のグラフは，右の図のようになる.



その頂点は点 $(3,0)$ である.

またその軸は，点 $(3,0)$ を通り y 軸に平行な直線 $x=3$ である.

[注意] 点 $(p,0)$ を通り y 軸に平行な直線を，**直線 $x=p$** という.

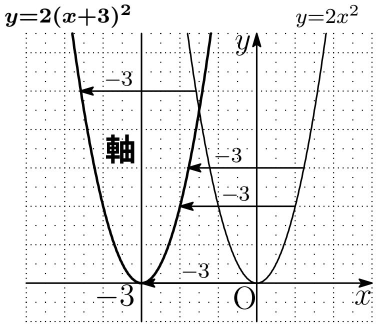


次の 2 つの 2 次関数のグラフの関係はどうであろうか.

$$y=2x^2,\qquad y=2(x+3)^2$$

上と同様な表を作ると，次のようになる.

x	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$2x^2$	$\cdots$	50	32	18	8	2	0	2	8	$\cdots$
$2(x+3)^2$	$\cdots$	8	2	0	2	8	18	32	50	$\cdots$



したがって，$y=2(x+3)^2$ のグラフは，
$y=2x^2$ のグラフを，
x 軸の正の向きに -3 だけ
平行移動させたもの
であり，右の図のようになる．
その頂点は点 $(-3, 0)$ であり，軸は直線 $x=-3$ である．

[注意]「正の向きに -3」とは,「負の向きに 3」ということである．

一般に次のことがいえる．

$y=a(x-p)^2$ のグラフ

2次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，
点 $(p, 0)$ が頂点となるように平行移動した放物線である．
その軸は直線 $x=p$ である．

練習 2.11 次の2次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y=(x-2)^2$　　(2) $y=2(x+1)^2$

(3) $y=-(x-3)^2$　　(4) $y=-2(x+2)^2$

D 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

これまでに調べたことから，$y=a(x-p)^2+q$ の形で表される2次関数のグラフもわかる．

例 2.5　2次関数 $y=2(x-3)^2+1$ のグラフ

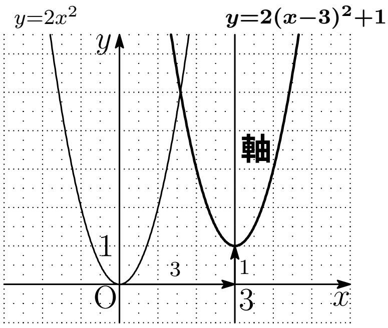
$y=2x^2$ と $y=2(x-3)^2+1$ のグラフの関係は，次のようになる．

$$y=2x^2 \xrightarrow[\text{平行移動}]{x\text{ 軸の正の向きに }\mathbf{3}} y=2(x-\mathbf{3})^2 \xrightarrow[\text{平行移動}]{y\text{ 軸の正の向きに }\mathbf{1}} y=2(x-3)^2+\mathbf{1}$$

したがって，$y=2(x-3)^2+1$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸の正の向きに3,
y 軸の正の向きに1

だけ平行移動させた放物線で，右の図のようになる．
その頂点は点 $(3,1)$ であり，軸は直線 $x=3$ である．



一般に，次のことがいえる．

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，
点 (p,q) が頂点となるように平行移動した放物線である．
その軸は 直線 $x=p$ である．

練習 2.12　次の2次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y=(x-1)^2+2$　　　(2) $y=2(x-2)^2-4$

(3) $y=-2(x+1)^2+2$　　(4) $y=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2-1$

前ページでまとめたことは，次のようにいうこともできる．

> 2 次関数 $y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させると，$y=a(x-p)^2+q$ のグラフになる．

[注意] 今後は「x 軸の正の向き」を単に「x 軸方向」という.「y 軸方向」についても同じである．

例 2.6 2 次関数 $y=2x^2$ のグラフの平行移動

平行移動後の放物線をグラフにもつ 2 次関数の式を調べると，たとえば次のようになる．

	もとの式	x 軸方向	y 軸方向	平行移動後の式
(1)	$y=2x^2$	1	3	$y=2(x-1)^2+3$
(2)	$y=2x^2$	1	-3	$y=2(x-1)^2-3$
(3)	$y=2x^2$	-1	3	$y=2\{x-(-1)\}^2+3$ すなわち $y=2(x+1)^2+3$

練習 2.13 2 次関数 $y=-2x^2$ のグラフを次のように平行移動させると，どのような 2 次関数のグラフになるか．その関数の式を求めよ．

(1) x 軸方向に 3，y 軸方向に -1 だけ平行移動

(2) x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動

E 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

2 次式 $2(x+1)^2+3$ について

$$\begin{aligned} 2(x+1)^2+3 &= 2(x^2+2x+1)+3 \\ &= 2x^2+4x+2+3 \\ &= 2x^2+4x+5 \end{aligned}$$

となる．すなわち，次の等式が成り立つ．

$$2x^2+4x+5 = 2(x+1)^2+3$$

平方完成

$a(x+\square)^2+\bigcirc$ の形の 2 次式に表すこと

x の 2 次式を上の右辺のような形に変形することを，**平方完成**するという．

例 2.7 $3x^2+6x+2$ を平方完成する．

$$\begin{aligned} \underline{3x^2+6x}+2 &= \underline{3(x^2+2x)}+2 \\ &= \underline{3\{(x+1)^2-1^2\}}+2 \\ &= \underline{3(x+1)^2-3\cdot 1}+2 \\ &= 3(x+1)^2-1 \end{aligned}$$

① x^2，x を含む項だけを x^2 の係数 3 でくくる．
② $(x+1)^2 = x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2$ から $x^2+2x=(x+1)^2-1^2$
③ 3 をかけて｛　｝をはずす．

2 次式を平方完成するときは，次の変形を使うと考えやすい．

$$x^2+\blacksquare x = \left(x+\frac{\blacksquare}{2}\right)^2 - \left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2$$

練習 2.14 次の 2 次式を平方完成せよ．

(1) x^2+8x　　(2) x^2-4x+1

(3) $2x^2+8x+5$　　(4) $2x^2-4x-1$

(5) $x^2 + x - 2$　　(6) $2x^2 - 6x + 3$

2 次式の平方完成を利用して，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを調べてみよう．

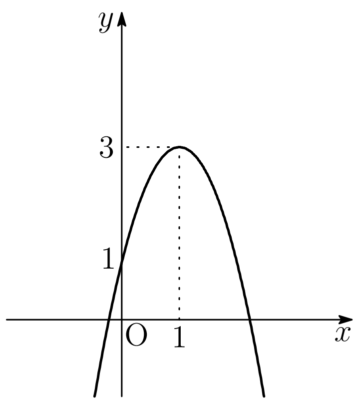
例題 2.3 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

$$y = -2x^2 + 4x + 1$$

【解】

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x + 1 &= -2(x^2 - 2x) + 1 \\ &= -2\{(x-1)^2 - 1^2\} + 1 \\ &= -2(x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

よって　$y = -2(x-1)^2 + 3$



したがって，この関数のグラフは右の図のような放物線である．頂点は点 $(1, 3)$，軸は直線 $x = 1$ である．

練習 2.15 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y = x^2 - 4x + 3$　　(2) $y = 2x^2 + 4x - 1$

(3) $y = -3x^2 + 6x + 1$

(4) $y = -x^2 - 4x + 2$

(5) $y = 2x^2 - 6x - 1$

(6) $y = -x^2 + 3x$

一般に，次のことがいえる[1].

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを平行移動させた放物線である．

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを，**放物線** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ ということもある．

[1]2次式 $ax^2 + bx + c$ の平方完成は 79 ページに示す．

応用例題 2.1 放物線 $y = x^2 + 2x + 2$ を平行移動して放物線 $y = x^2 - 6x + 11$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか.

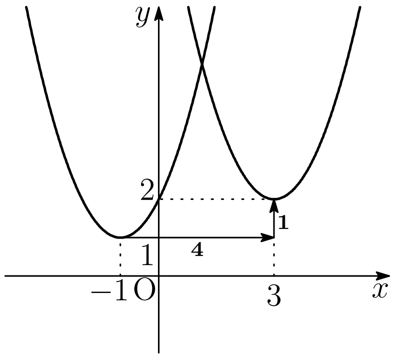
考え方　2つの放物線の頂点の移動に注目する.

【解】 $y = x^2 + 2x + 2$ を変形すると

$$y = (x+1)^2 + 1$$

$y = x^2 - 6x + 11$ を変形すると

$$y = (x-3)^2 + 2$$



よって，頂点は点 $(-1, 1)$ から点 $(3, 2)$ に移動する.
したがって，
　x 軸方向に 4，y 軸方向に 1 だけ平行移動すればよい.

練習 2.16 放物線 $y = 2x^2 - 4x$ を平行移動して次の放物線に重ねるには，どのように平行移動すればよいか.

(1) $y = 2x^2$　　　(2) $y = 2x^2 + 4x + 3$

■ 2次式 $ax^2 + bx + c$ の平方完成

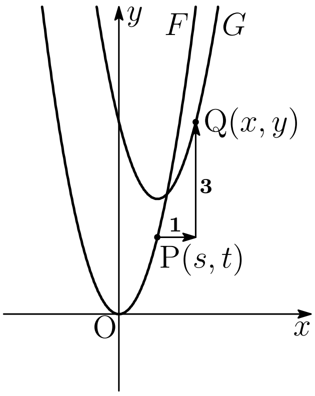
2次式 $ax^2 + bx + c$ は，次のようにして平方完成することができる.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

発展

グラフの平行移動

2次関数 $y=2x^2$ のグラフ F を，x 軸方向に1，y 軸方向に3だけ平行移動することを，グラフ上の点の移動で考えてみよう．移動後の放物線を G とする．



F 上に点 $\mathrm{P}(s,t)$ をとり，この平行移動によって，点Pが G 上の点 $\mathrm{Q}(x,y)$ へ動くとすると

$$t=2s^2 \qquad \cdots ①$$
$$x=s+1,\ y=t+3 \qquad \cdots ②$$

が成り立つ．② から

$$s=x-1,\ t=y-3$$

① に代入すると　$y-3=2(x-1)^2$
すなわち　$y=2(x-1)^2+3$

この2次関数のグラフが，放物線 G である．

一般に，2次関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の放物線は，次の関数のグラフになる．

$$y=f(x-p)+q$$

たとえば，$f(x)=2x^2+3x+1$，$p=1$，$q=3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x-1)+3 &= 2(x-1)^2+3(x-1)+1+3 \\ &= 2x^2-x+3 \end{aligned}$$

となるから，移動後の放物線は，次の2次関数のグラフになる．

$$y=2x^2-x+3$$

2.1.3 補充問題

1 1 次関数 $f(x) = ax + b$ について，$f(0) = 1$ かつ $f(3) = 7$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

2 次の 2 次関数のグラフをかけ．また，その頂点と軸を求めよ．

(1) $y = 2x^2 + 4x + 2$　　(2) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 1$

(3) $y = (x-1)(x-5)$　　(4) $y = (2x-1)(x+3)$

3 放物線 $y = 2x^2 - 4x - 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) この放物線の頂点を A とするとき，A の座標を求めよ．

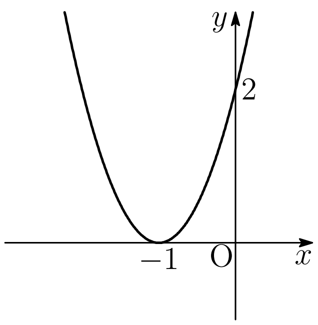
(2) この放物線を，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したとき，移動後の放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

【答】

1 $a = 2$，$b = 1$

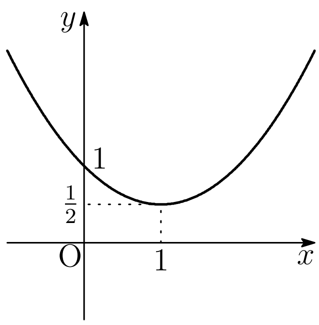
2

(1)



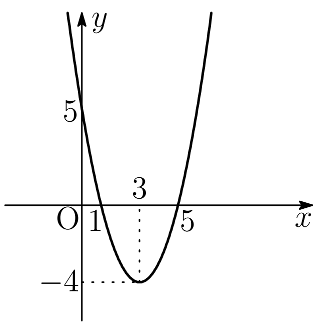
頂点 $(-1, 0)$，軸 $x = -1$

(2)



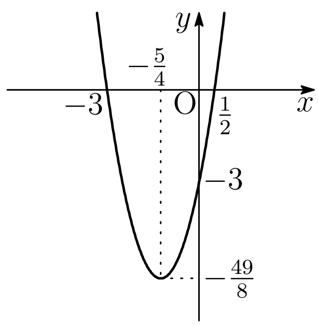
頂点 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$，軸 $x = 1$

(3)



頂点 $(3, -4)$，軸 $x = 3$

(4)



頂点 $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right)$，軸 $x = -\frac{5}{4}$

3 (1) $(1, -3)$　(2) $y = 2x^2 - 12x + 14$

2.2　2 次関数の値の変化

2.2.1　2 次関数の最大・最小

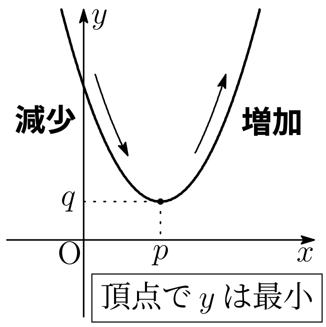
関数のグラフを利用すると，関数の値の変化のようすを知ることができる．ここでは，2 次関数の値の変化を調べよう．

A 2 次関数の最大・最小

2 次関数 $y = ax^2$ の値の変化については，69 ページで述べた．

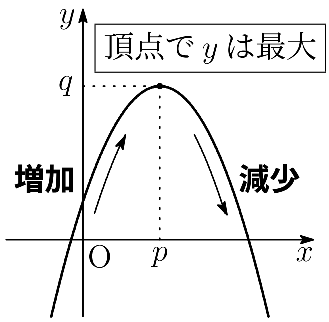
2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の変化についても，a の値が正か負かによって次のような 2 つの場合がある．

$a > 0$ のとき



y はいくらでも大きな値をとる

$a < 0$ のとき



y はいくらでも小さな値をとる

したがって，次のことがいえる．

2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の最大・最小

$a > 0$ のとき，$x = p$ で最小値 q をとる．最大値はない．
$a < 0$ のとき，$x = p$ で最大値 q をとる．最小値はない．

練習 2.17 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = 2(x-3)^2 + 4$　　(2) $y = -2(x+1)^2 - 3$

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の最大値，最小値を調べるには，関数の式を $y = a(x-p)^2 + q$ の形にすればよい．

例題 2.4 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = x^2 - 4x + 3$　　(2) $y = -2x^2 - 4x$

【解】

(1) 関数の式を変形すると　$y = (x-2)^2 - 1$

よって，y は $x = 2$ で最小値 -1 をとる．

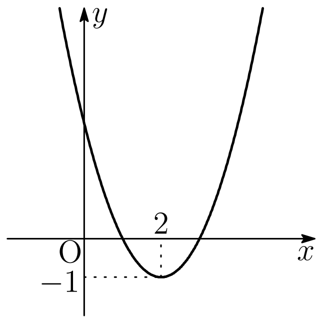
最大値はない．

(2) 関数の式を変形すると　$y = -2(x+1)^2 + 2$

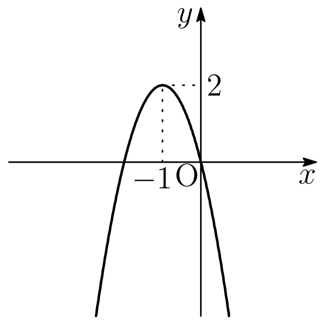
よって，y は $x = -1$ で最大値 2 をとる．

最小値はない．

(1)



(2)



練習 2.18 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = x^2 - 6x + 5$　　(2) $y = 2x^2 + 4x - 1$

(3) $y = -x^2 - 4x + 2$　　(4) $y = -2x^2 + 8x$

(5) $y = x^2 + 3x + 1$

(6) $y = -2x^2 + 5x$

B 2 次関数の値域と最大・最小

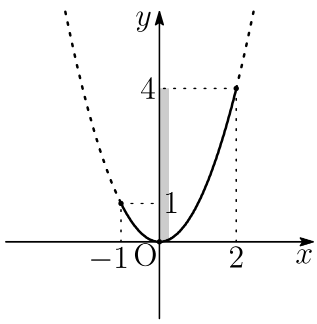
これまでは 2 次関数の定義域が実数全体であったが，関数の定義域に制限のある場合についても，最大・最小を調べてみよう．

例 2.8 関数 $\boldsymbol{y = x^2\ (-1 \leqq x \leqq 2)}$ の値域と最大値，最小値

この関数のグラフは，右の図の実線部分である．
よって，値域は

$$0 \leqq y \leqq 4$$

である．また，y は
$x = 2$ で最大値 4 をとり，
$x = 0$ で最小値 0 をとる．

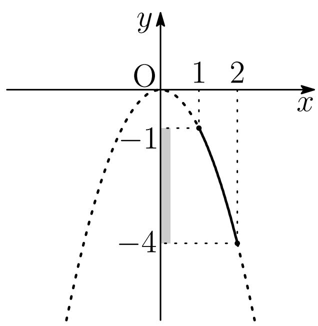


例 2.9 関数 $\boldsymbol{y = -x^2\ (1 \leqq x \leqq 2)}$ の値域と最大値，最小値

この関数のグラフは，右の図の実線部分である．
よって，値域は

$$-4 \leqq y \leqq -1$$

である．また，y は
$x = 1$ で最大値 -1 をとり，
$x = 2$ で最小値 -4 をとる．



練習 2.19 次の関数の値域と最大値，最小値を求めよ.

(1) $y = x^2 \ (-2 \leqq x \leqq -1)$

(2) $y = 2x^2 \ (-2 \leqq x \leqq 1)$

(3) $y = -x^2 \ (-1 \leqq x \leqq 2)$

(4) $y = -2x^2 \ (-2 \leqq x \leqq 0)$

例題 2.5 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

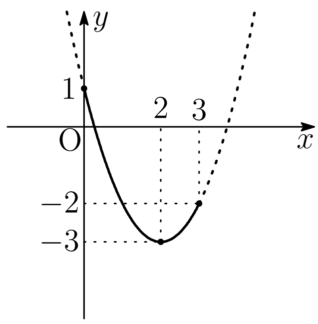
(1) $y = x^2 - 4x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = -2x^2 + 8x \quad (1 < x < 4)$

【解】

(1) $y = x^2 - 4x + 1$ を変形すると

$$y = (x-2)^2 - 3$$

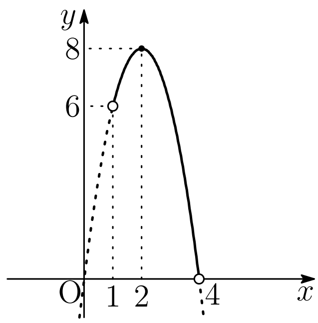
$0 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は
　$x = 0$ で最大値 1 をとり，
　$x = 2$ で最小値 -3 をとる．



(2) $y = -2x^2 + 8x$ を変形すると

$$y = -2(x-2)^2 + 8$$

$1 < x < 4$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は
　$x = 2$ で最大値 8 をとる．
最小値はない．



練習 2.20 関数 $y = x^2 - 4x + 1$ の定義域として次の範囲をとるとき，各場合について，最大値と最小値を求めよ．

(1) $-2 \leqq x \leqq 1$　　(2) $1 \leqq x \leqq 4$

(3) $1 \leqq x \leqq 3$　　(4) $3 \leqq x \leqq 4$

練習 2.21 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y = x^2 + 2x + 3 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = -x^2 + 4x - 3 \quad (0 \leqq x \leqq 4)$

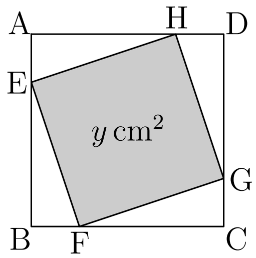
(3) $y = 3x^2 + 6x - 1 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$

(4) $y = -2x^2 + 14x \quad (0 < x < 7)$

C 最大・最小の応用

2次関数の最大・最小を応用して解決できる問題を考えてみよう．

応用例題 2.2 1辺が 10cm の正方形 ABCD に，それより小さい正方形 EFGH を右の図のように内接させる．
正方形 EFGH の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とするとき，
y の最小値を求めよ．



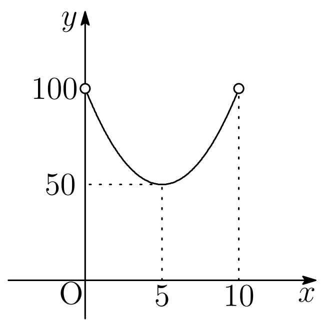
考え方　AH=x として y を x で表す．x の値の範囲にも注意．

【解】 AH$=x$ とすると，AE=HD$=10-x$ である．
$x>0$ かつ $10-x>0$ から

$$0<x<10 \qquad \cdots ①$$

また，$y=\mathrm{EH}^2$ である．
三平方の定理により

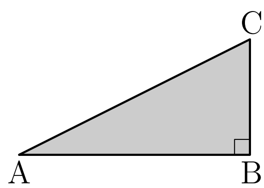
$$\begin{aligned}\mathrm{EH}^2 &= \mathrm{AE}^2+\mathrm{AH}^2\\ &=(10-x)^2+x^2\\ &=2x^2-20x+100\end{aligned}$$



よって　　$y=2(x-5)^2+50$
① において，y は $x=5$ で最小値 50 をとる．

[注意] 正方形 EFGH の面積が最小のとき，1辺 EH の長さも最小となる．

練習 2.22 直角三角形 ABC において，直角をはさむ2辺 AB, BC の長さの和が 10cm であるとする．このような三角形の面積の最大値を求めよ．



2.2.2　2次関数の決定

これまでは与えられた2次関数について，そのグラフを調べたり関数の最大値，最小値などを求めてきた．ここでは，与えられた条件を満たす2次関数を求めてみよう．

A 最大値，最小値から関数を決定

2次関数を決定する問題で，2次関数の最大値か最小値がわかっているときは，83ページで調べた「2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の最大・最小」を使うとよい．

例題 2.6 $x = 1$ で最大値9をとり，$x = 0$ で $y = 6$ となるような2次関数を，$y = ax^2 + bx + c$ の形で求めよ．

【解】 $x = 1$ で最大値9をとるから，y は

$$y = a(x-1)^2 + 9 \qquad \text{ただし}, a < 0$$

の形に表される．

$x = 0$ で $y = 6$ となるから　　← $y = a(x-1)^2 + 9$ に $x = 0$, $y = 6$ を代入する．

$$6 = a(0-1)^2 + 9$$

よって　$a = 6 - 9 = -3$

これは，$a < 0$ を満たす．

したがって　$y = -3(x-1)^2 + 9$

すなわち　$y = -3x^2 + 6x + 6$

[注意] とくに指定がない場合には，2次関数の定義域は実数全体である．

練習 2.23 次の条件を満たす2次関数を，$y = ax^2 + bx + c$ の形で求めよ．

(1) $x = 2$ で最大値8をとり，$x = 1$ で $y = 5$ となる．

(2) $x = -1$ で最小値 -3 をとり，$x = 0$ で $y = -1$ となる．

B 放物線の軸や頂点から関数を決定

2 次関数のグラフの放物線について，その軸や頂点がわかっているときも，$y = a(x-p)^2 + q$ の形が利用できる．

例題 2.7 直線 $x = 1$ を軸とし，2 点 $(0, -1)$，$(3, 8)$ を通る放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

【解】 放物線の軸が直線 $x = 1$ であるから，この 2 次関数は

$$y = a(x-1)^2 + q$$

の形に表される．このグラフが

点 $(0, -1)$ を通るから　$-1 = a(0-1)^2 + q$
点 $(3, 8)$ を通るから　$8 = a(3-1)^2 + q$

よって　$a + q = -1,\ 4a + q = 8$
これを解くと　$a = 3,\ q = -4$

したがって　$y = 3(x-1)^2 - 4$
すなわち　$y = 3x^2 - 6x - 1$

[注意] この種の問題では，2 次関数を一般形 $y = ax^2 + bx + c$ で求めておくことにする．

練習 2.24 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

(1) 頂点が点 $(1, -3)$ で，点 $(3, 5)$ を通る．

(2) 頂点が点 $(-2, 4)$ で，点 $(-4, 2)$ を通る．

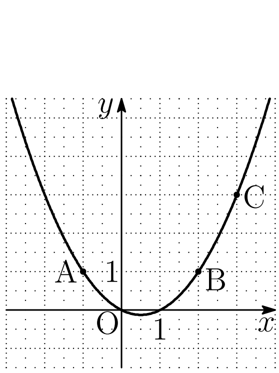
練習 2.25 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

(1) 直線 $x=3$ を軸とし，2 点 $(2,6)$，$(5,9)$ を通る．

(2) 直線 $x=-1$ を軸とし，2 点 $(0,5)$，$(2,-11)$ を通る．

C 放物線上の 3 点から関数を決定

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 3 点 $\mathrm{A}(-1,1)$，$\mathrm{B}(2,1)$，$\mathrm{C}(3,3)$ を通るとする．このとき，係数 a，b，c が満たすべき条件を式で表すと，次のようになる．



点 A を通るから　$1 = a(-1)^2 + b(-1) + c$
点 B を通るから　$1 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c$
点 C を通るから　$3 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c$

そこで，これらを同時に成り立たせる a，b，c の値を求めてみよう．

例 2.10 次の等式を同時に満たす a，b，c の値を求める．

$$\begin{cases} a-b+c=1 & \cdots ① \\ 4a+2b+c=1 & \cdots ② \\ 9a+3b+c=3 & \cdots ③ \end{cases}$$

まず，① と ② を用いて c を消去する．

② − ① から　$3a+3b=0$

すなわち　$a+b=0 \quad \cdots ④$

また，② と ③ を用いて c を消去する．

③ − ② から　$5a+b=2 \quad \cdots ⑤$

④ と ⑤ を連立させた方程式を解くと

$$a=\frac{1}{2}, \quad b=-\frac{1}{2}$$

これらを ① に代入して　$c=0$

例 2.10 のような，3 文字を含む 1 次方程式を 3 つ組み合わせた連立方程式を**連立 3 元 1 次方程式**という．

連立 3 元 1 次方程式の解き方は，次のようになる．

連立 3 元 1 次方程式の解き方

① 1 文字を消去して，残りの 2 文字の連立方程式を導く．

② 2 文字の連立方程式を解く．

③ 残りの 1 文字の値を求める．

練習 2.26 次の連立3元1次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ 9a+3b+c=4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a-b+c=1 \\ 4a-2b+c=-6 \\ 9a+3b+c=9 \end{cases}$

例題 2.8 2次関数のグラフが3点 $(1,5)$，$(2,1)$，$(-1,1)$ を通るとき，この2次関数を求めよ.

【解】 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする.
グラフが3点 $(1,5)$，$(2,1)$，$(-1,1)$ を通るから

$$5=a+b+c \qquad \cdots①$$
$$1=4a+2b+c \qquad \cdots②$$
$$1=a-b+c \qquad \cdots③$$

②−① から　$3a+b=-4$　$\cdots$④

①−③ から　$2b=4$　$\cdots$⑤

④,⑤ を解くと　$b=2$，$a=-2$
これらを ① に代入して　$c=5$
よって，求める2次関数は　$y=-2x^2+2x+5$

練習 2.27 2次関数のグラフが次の3点を通るとき，その2次関数を求めよ．

(1) $(0, 2)$，$(2, 0)$，$(3, 5)$

(2) $(2, -2)$，$(3, 5)$，$(-1, 1)$

D 身の回りにある関数の決定

応用例題 2.3 ボールを地上から真上に打ち上げて，t 秒後の高さを y m とするとき，y は t の 2 次関数になるという．打ち上げてから 4 秒後にボールの高さが最高 78.4m になるとき，y は t のどのような式で表されるか．

考え方　$t=0$ のとき $y=0$ であることに注意することに注意する．

【解】 $t=4$ で最大値 78.4 をとるから，y は

$$y=a(t-4)^2+78.4 \qquad \text{ただし}, a<0$$

の形に表される．
$t=0$ のとき $y=0$ であるから

$$0=a(0-4)^2+78.4$$

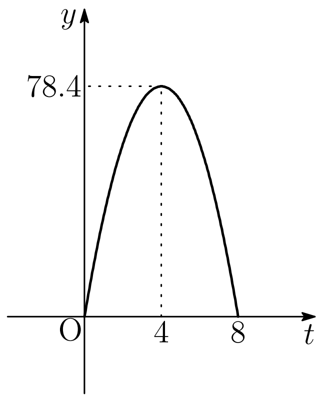
すなわち　$16a+78.4=0$

よって　$a=-4.9$

これは，$a<0$ を満たす．

したがって　$y=-4.9(t-4)^2+78.4$

すなわち　$y=-4.9t^2+39.2t$



[注意] ボールが地上に落下するのは，$-4.9t^2+39.2t=0$ を解いて 8 秒後であることがわかる．したがって，この関数の定義域は $0 \leqq t \leqq 8$ である．

練習 2.28 秒速 20m の速さで進んでいた自動車が，急ブレーキをかけてから t 秒間に進んだ距離を y m とするとき，y は t の 2 次関数になるという．t，y を計測すると右の表が得られた．y を t で表せ．

t	2	4	5
y	32	48	50

2.2.3 補充問題

4 2次関数 $y = x^2 + 2mx + m$ について，次の問いに答えよ．

(1) この関数の最小値を m の式で表せ．

(2) この関数の最小値が -2 であるとき，m の値を求めよ．

5 次の関数の最大値が 8 であるとき，定数 c の値を求めよ．

$$y = x^2 - 4x + c \quad (1 \leqq x \leqq 5)$$

6 次のような2次関数を求めよ．

(1) グラフは x 軸と2点 $(3,0)$，$(-1,0)$ で交わり，$x=2$ のとき $y=6$ である．

(2) グラフの頂点は放物線 $y=2x^2+4x+1$ の頂点と同じであり，y 軸と点 $(0,2)$ で交わる．

【答】

4 (1) $-m^2+m$　(2) $m=2,-1$

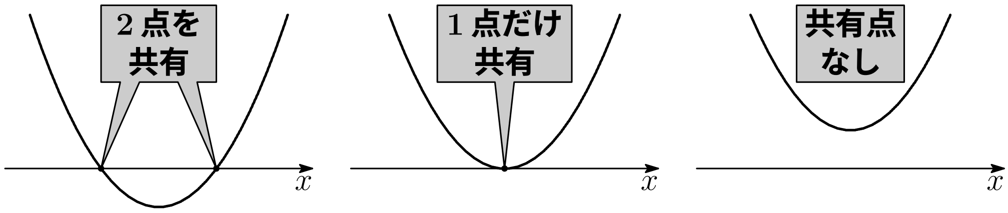
5 $c=3$

6 (1) $y=-2x^2+4x+6$　(2) $y=3x^2+6x+2$

2.3　2次不等式

2.3.1　2次関数のグラフと x 軸の位置関係

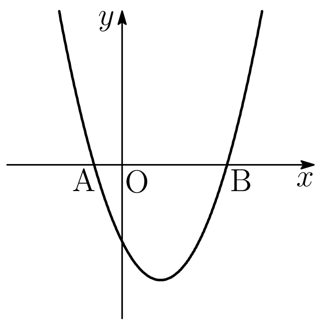
2次関数のグラフと x 軸の位置関係は，次のような3つに分類できる．ここでは，これらの場合についてもう少し詳しく調べることにしよう．



A 2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，共有点の x 座標は，$y = 0$ となる x の値，すなわち2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解である．

例題 2.9 2次関数 $y = x^2 - 2x - 2$ のグラフは右の図のように x 軸と2点で交わる．交点A，Bの座標を求めよ．



【解】 交点A，Bの x 座標は，2次方程式

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

の解である．

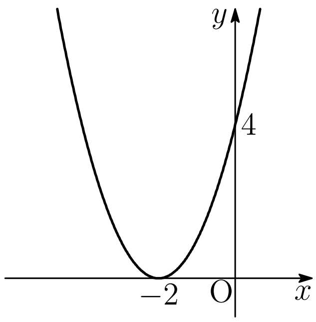
これを解くと　　$x = 1 \pm \sqrt{3}$

よって，点A，Bの座標は

$$\mathrm{A}(1 - \sqrt{3},\ 0),\ \mathrm{B}(1 + \sqrt{3},\ 0)$$

例題 2.10 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ．

$$y = x^2 + 4x + 4$$



【解】 この2次関数は　$y = (x+2)^2$
とも表されるから，グラフは右の図のような放物線である．
よって，x 軸との共有点は放物線の頂点であり，その座標は

$$(-2, 0)$$

[終]

[注意] 2次方程式 $x^2 + 4x + 4 = 0$ を解いて求めてもよい．

例題2.10の場合のように，2次関数のグラフと x 軸の共有点がただ1つのとき，グラフは x 軸に**接する**といい，その共有点を x 軸との**接点**という．x 軸との接点は，放物線の頂点でもある．

練習 2.29 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ．また，グラフが x 軸に接するものはどれか．

(1) $y = x^2 - 2x - 3$　　　(2) $y = -x^2 + 3x - 1$

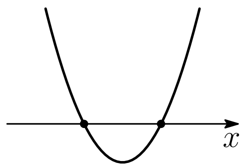
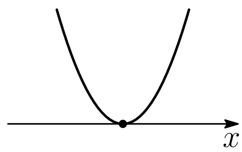
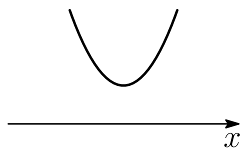
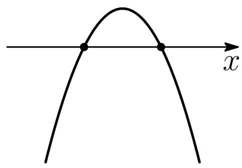
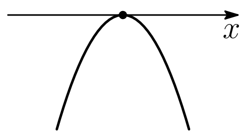
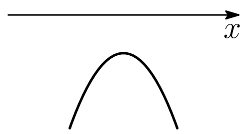
(3) $y = 2x^2 + 4x + 2$　　　(4) $y = 2x^2 - 5x - 3$

B 2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

次の ① と ② がいえるから，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係は，次ページのような表にまとめられる．

① 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の座標は，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数の解の個数と一致する．

② 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数の解の個数は，48 ページの表のように $b^2 - 4ac$ の符号によって分類される．

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$b^2 - 4ac$ の符号	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
x 軸との 位置関係	異なる 2 点で 交わる	接する	共有点を もたない
x 軸との 共有点の個数	2 個	1 個	0 個
$a > 0$ のとき			
$a < 0$ のとき			
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数の解	$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a}$	ない

[注意] 上の $b^2 - 4ac$ を D で表すことがある．

例 2.11　2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数

(1)　$y = x^2 + 5x + 3$
$a = 1$，$b = 5$，$c = 3$
$D = b^2 - 4ac$
$\quad = 5^2 - 4{\cdot}1{\cdot}3 = 13 > 0$
共有点の個数は 2 個

(2)　$y = -2x^2 + x - 1$
$a = -2$，$b = 1$，$c = -1$
$D = b^2 - 4ac$
$\quad = 1^2 - 4{\cdot}(-2){\cdot}(-1) = -7 < 0$
共有点の個数は 0 個

練習 2.30 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ．

(1) $y = x^2 + 6x + 3$　　(2) $y = 2x^2 - 3x + 4$

(3) $y = -2x^2 + 5x + 1$　　(4) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

例題 2.11 2 次関数 $y = x^2 + mx + 9$ のグラフが x 軸に接するとき，定数 m の値を求めよ．また，そのときの接点の座標を求めよ．

【解】 このグラフが x 軸に接するための条件は，係数について

$$m^2 - 4{\cdot}1{\cdot}9 = 0 \qquad \leftarrow\ m^2 - 36 = 0$$

が成り立つことである．これを解いて

$$m = \pm 6$$

接点の x 座標は $x = -\dfrac{m}{2}$ であるから，接点の座標は

$$m = 6 \text{ のとき}\quad (-3, 0), \qquad m = -6 \text{ のとき}\quad (3, 0)$$

練習 2.31 2 次関数 $y = x^2 + mx + 4$ のグラフが x 軸に接するとき，定数 m の値を求めよ．また，そのときの接点の座標を求めよ．

応用例題 2.4 2次関数 $y = x^2 - 3x + m$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

> **考え方**　前ページの表で，$b^2 - 4ac > 0$ または $b^2 - 4ac = 0$
> すなわち $D = b^2 - 4ac \geqq 0$ の場合である．

【解】 このグラフが x 軸と共有点をもつための条件は，係数について

$$(-3)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}m \geqq 0 \qquad \leftarrow \ 9 - 4m \geqq 0$$

が成り立つことである．これを解いて

$$m \leqq \frac{9}{4}$$

練習 2.32 2次関数 $y = x^2 + 5x + m$ のグラフについて，次の問いに答えよ．

(1) x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(2) x 軸と共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

2.3.2　2次不等式

不等式のすべての項を左辺に移項して整理したとき，$ax^2+bx+c>0$，$ax^2+bx+c \leqq 0$ などのように，左辺が x の2次式になる不等式を，x の**2次不等式**という．ただし，$a \neq 0$ とする．
2次関数のグラフを利用して，2次不等式を解いてみよう．

A 2次不等式と2次関数

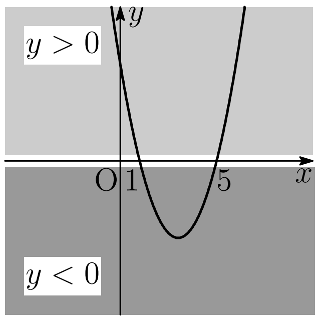
まず，2次関数の値の符号について調べることにしよう．

例 2.12　2次関数 $y=x^2-6x+5$ の値の符号

この関数のグラフは，右の図のように x 軸と2点で交わる．交点の x 座標は，2次方程式

$$x^2-6x+5=0$$

の解 $x=1,\ 5$ である．
右の図から，$y=x^2-6x+5$ の値の符号について，次の表が得られる．



x	$x<1$	1	$1<x<5$	5	$5<x$
$y=x^2-6x+5$	$+$	0	$-$	0	$+$

例 2.12 の表から，次のことがいえる．

2次不等式 $x^2-6x+5<0$ の解は，$1<x<5$ である．
2次不等式 $x^2-6x+5>0$ の解は，$x<1$ と $5<x$ である．

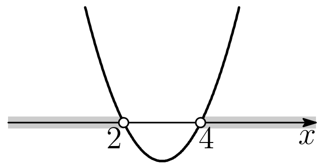
上の「$x<1$ と $5<x$」を「$x<1,\ 5<x$」と書くことにする．

例 2.13

(1) **2次不等式 $(x-2)(x-4)>0$ を解く．**

$(x-2)(x-4)=0$ の解は

$$x=2,\ 4$$



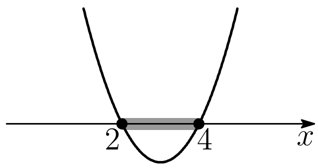
$y=(x-2)(x-4)$ のグラフと x 軸の位置関係は，右の図のようになる．
$y>0$ となる x の値の範囲は

$$x<2,\ 4<x$$

よって，$(x-2)(x-4)>0$ を解くと

$$x<2,\ 4<x$$

(2) **2次不等式 $(x-2)(x-4)\leqq 0$ を解く．**
$y\leqq 0$ となる x の値の範囲を求めて



$$2\leqq x\leqq 4$$

練習 2.33 次の2次不等式を解け．

(1) $(x-1)(x-3)>0$

(2) $(x-2)(x-5)<0$

(3) $(x+1)(x-2)\geqq 0$

(4) $x(x-1)\leqq 0$

(5) $x(x+1)>0$

(6) $(x+2)(x+3)\leqq 0$

$a>0$ の場合を考える．

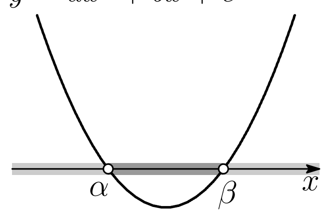
2次関数 $y = ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係が右の図のようなとき，次のことがいえる．

2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は

$$x<\alpha,\ \beta<x$$

2次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は

$$\alpha<x<\beta$$



$ax^2+bx+c=0$
の解が α（アルファ），β（ベータ）

B 2次不等式の解き方

例題 2.12 次の2次不等式を解け．

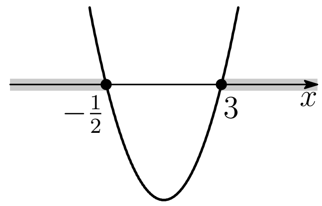
$$2x^2-5x-3 \geqq 0$$

【解】 $2x^2-5x-3=0$ を解くと

$$x=-\frac{1}{2},\ 3$$

よって，この2次不等式の解は

$$x \leqq -\frac{1}{2},\ 3 \leqq x$$



練習 2.34 次の2次不等式を解け．

(1) $x^2-3x+2>0$

(2) $x^2-2x-8<0$

(3) $2x^2-5x+2 \geqq 0$

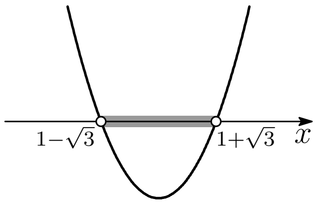
(4) $2x^2+5x+3 \leqq 0$

例題 2.13 次の 2 次不等式を解け.

$$2x^2 - 1 < (x+1)^2$$

【解】 式を変形すると

$$x^2 - 2x - 2 < 0$$



$x^2 - 2x - 2 = 0$ を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

よって，この 2 次不等式の解は

$$1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$$

練習 2.35 次の 2 次不等式を解け.

(1) $x^2 + 2x < 1$

(2) $3x^2 - 5 > x^2 + 7$

(3) $2x^2 - 3x + 1 \geqq x^2 - 6x$

(4) $2x^2 - x \leqq (x-1)(x-2)$

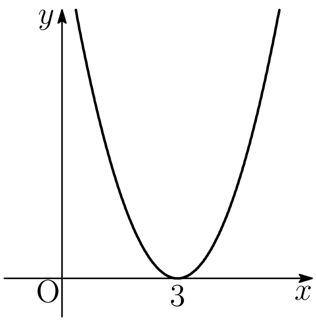
C 解の範囲が特別な 2 次不等式

2 次関数のグラフが x 軸と 2 点で交わらない場合について，2 次関数の値の符号を調べてみよう．

例 2.14　2 次関数 $y = x^2 - 6x + 9$ の値の符号

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

であるから，この関数のグラフは，右の図のように x 軸と点 (3, 0) で接する．右の図から，$y = x^2 - 6x + 9$ の値の符号について，次の表が得られる．



x	$x < 3$	3	$3 < x$
$y = x^2 - 6x + 9$	$+$	0	$+$

例 2.14 の表から，次のことがわかる．

2 次不等式	**解**
$x^2 - 6x + 9 \geqq 0$	すべての実数
$x^2 - 6x + 9 > 0$	3 以外のすべての実数
$x^2 - 6x + 9 \leqq 0$	$x = 3$
$x^2 - 6x + 9 < 0$	ない

$\leftarrow$　$x^2 - 6x + 9$
$= (x-3)^2 \geqq 0$

であることに着目しよう．

練習 2.36　次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2 - 4x + 4 \geqq 0$　　(2) $x^2 - 4x + 4 \leqq 0$

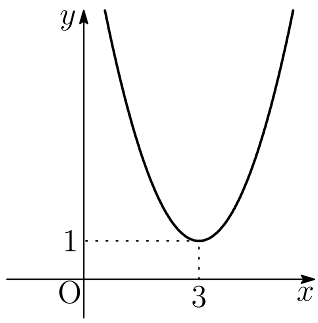
(3) $x^2 + 6x + 9 > 0$　　(4) $x^2 + 6x + 9 < 0$

(5) $4x^2 - 4x + 1 > 0$　　(6) $4x^2 + 4x + 1 \geqq 0$

例 2.15　2 次関数 $y = x^2 - 6x + 10$ の値の符号

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$$

であるから，この関数のグラフは，右の図のように x 軸より上側にあり，x 軸と共有点をもたない．関数の値の符号は，常に $+$ である．



例 2.15 で調べたことから，次のことがわかる．

2 次不等式	解
$x^2 - 6x + 10 \geqq 0$	すべての実数
$x^2 - 6x + 10 > 0$	すべての実数
$x^2 - 6x + 10 \leqq 0$	ない
$x^2 - 6x + 10 < 0$	ない

$\leftarrow$　$x^2 - 6x + 10$
$= (x-3)^2 + 1 > 0$

であることに着目しよう．

練習 2.37　次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2 - 4x + 6 \geqq 0$　　(2) $x^2 - 4x + 6 \leqq 0$

(3) $2x^2 + 4x + 3 > 0$　　(4) $2x^2 + 4x + 3 < 0$

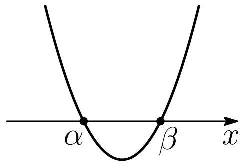
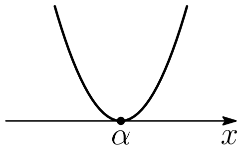
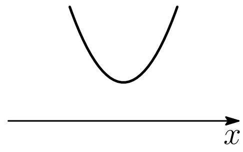
D 2 次不等式の解き方のまとめ

2 次不等式は，2 次関数のグラフと x 軸の位置関係を利用して解いた．そこで，101 ページの表のように，2 次不等式

$$ax^2 + bx + c > 0, \qquad ax^2 + bx + c \leqq 0$$

などの解についても，$b^2 - 4ac$ の符号によって分類してみよう．

なお，$a < 0$ のときは，不等式の両辺に -1 をかけて 2 次の係数を正にして解けばよいで，$a > 0$ の場合だけを次ページにまとめた．

2次不等式の解についてのまとめ　($a>0$ の場合)			
b^2-4ac の符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$ax^2+bx+c=0$ の実数の解	$x=\alpha,\ \beta$	$x=\alpha$	ない
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha,\ \beta<x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解	$x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	ない	ない
$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解	$\alpha\leqq x\leqq\beta$	$x=\alpha$	ない

[注意] 上の b^2-4ac を D で表すことがある.

例題 2.14 次の2次不等式を解け.

$$-2x^2+3x-4>0$$

【解】 両辺に -1 をかけると［2次の係数を正にして解く］

$$2x^2-3x+4<0$$

係数について［D の符号を調べる］

$$(-3)^2-4\cdot2\cdot4=-23<0$$

であるから，求める2次不等式の解は ない.

練習 2.38 次の 2 次不等式を解け.

(1) $x^2 - 5x + 3 > 0$

(2) $-x^2 + x - 1 < 0$

(3) $2x^2 + 3x + 3 < 0$

(4) $-9x^2 + 6x - 1 \geqq 0$

(5) $x + 6 \leqq x^2$

(6) $x^2 - 3x + 2 > 2x^2 - x$

E 2次不等式の応用

応用例題 2.5 2次関数 $y = 2x^2 + 2mx + 1$ のグラフが x 軸と異なる2点を共有するとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

> **考え方** 101 ページの表で，$b^2 - 4ac > 0$ の場合である．この m についての2次不等式を解く．

【解】 このグラフが x 軸と異なる2点を共有するための条件は，係数について，次の不等式が成り立つことである．

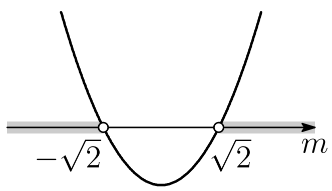
$$(2m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 > 0$$

$4m^2 - 8 > 0$ より　　$m^2 - 2 > 0$

$m^2 - 2 = 0$ を解くと　　$m = \pm\sqrt{2}$

よって，求める m の値の範囲は

$$m < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < m$$



練習 2.39 2次関数 $y = x^2 + mx + m$ のグラフと x 軸の位置関係が次のようなとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(1) 異なる2点を共有する．　(2) 共有点をもつ．

(3) 共有点をもたない．

練習 2.40 2 次方程式 $2x^2+mx+2=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

応用例題 2.6 ある速さで真上に打ち上げたボールの，打ち上げてから x 秒後の地上からの高さを h m とする．h の値が $h=-5x^2+40x$ で与えられるとき，ボールが地上から 60m 以上 75m 以下の高さにあるのは，x の値がどのような範囲にあるときか．

考え方　不等式 $60 \leqq -5x^2+40x \leqq 75$ を解く．それには 2 つの 2 次不等式 $-5x^2+40x \geqq 60$, $-5x^2+40x \leqq 75$ に分け，39 ページの連立不等式の要領で解けばよい．

【解】 $60 \leqq -5x^2+40x \leqq 75$ であるから，次の連立不等式を解く．

$$\begin{cases} -5x^2+40x \geqq 60 & \cdots ① \\ -5x^2+40x \leqq 75 & \cdots ② \end{cases}$$

① から　　$x^2-8x+12 \leqq 0$

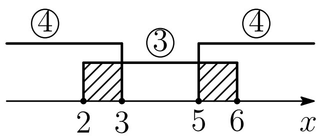
これを解くと　　$2 \leqq x \leqq 6$　$\cdots$ ③

② から　　$x^2-8x+15 \geqq 0$

これを解くと　　$x \leqq 3,\ 5 \leqq x$　$\cdots$ ④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$$2 \leqq x \leqq 3,\ 5 \leqq x \leqq 6$$

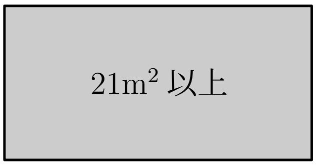


練習 2.41 次の連立不等式を解け.

(1) $\begin{cases} 5x - 2 < 3x + 4 \\ x^2 - 3x \leqq 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leqq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geqq 0 \end{cases}$

練習 2.42 周りの長さが 20m で，面積が $21\mathrm{m}^2$ 以上の長方形状の囲いを作りたい.
長くない方の辺の長さをどのような範囲にとればよいか.



2.3.3　補充問題

7 放物線 $y = x^2 + 4x + 2$ は x 軸と 2 点で交わる．その交点を A，B とする．この放物線が x 軸から切り取る線分 AB の長さを求めよ．

8 2 次関数 $y = ax^2 + 3x - 2$ のグラフが x 軸と共有点をもたず，常に x 軸より下側にあるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

9 次の 2 次不等式を満たす整数 x をすべて求めよ．

(1) $2x^2 + x - 6 < 0$　　(2) $4x - 2 \geqq x^2$

10 2次不等式 $x^2+2mx+m+2>0$ の解が，すべての実数となるとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

【答】

7 $2\sqrt{2}$

8 $a<-\dfrac{9}{8}$

9 (1) $-1,\ 0,\ 1$　(2) $1,\ 2,\ 3$

10 $-1<m<2$

2.4　章末問題

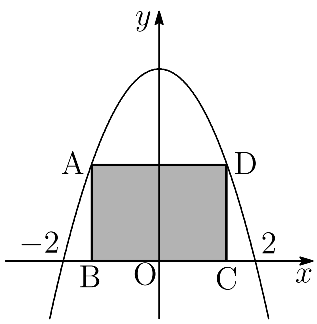
2.4.1　章末問題 A

1 放物線 $y=-2x^2+3x+1$ を平行移動したものが，2点 $(-2,0)$，$(1,12)$ を通るとき，その放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ．

2 次の 2 つの放物線の頂点が一致するとき，定数 a，b の値を求めよ．

$$y = 2x^2 + 4x, \quad y = x^2 + ax + b$$

3 放物線 $y = 4 - x^2$ と x 軸で囲まれた部分に，長方形 ABCD を，辺 BC が x 軸上にあるように内接させる．
この長方形の周の長さが最大となるときの辺 BC の長さを求めよ．

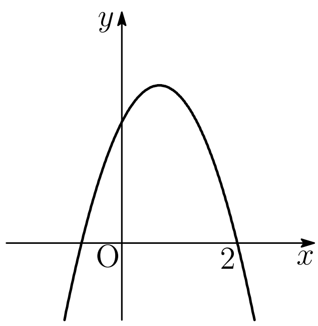


4 x の 2 次関数 $y = x^2 - mx + m$ の最小値を k とする.

(1) k を m の式で表せ.

(2) k の値を最大にする m の値と，k の最大値を求めよ.

5 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を求めよ.



(1) a　　(2) c　　(3) b

(4) $b^2 - 4ac$　　(5) $a + b + c$

6 2 次関数 $y = x^2 - 2ax + a$ が正の値しかとらないとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

7 a は定数とする．2 次不等式 $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ を次の場合について解け．

(1) $a > 0$ のとき　　(2) $a < 0$ のとき

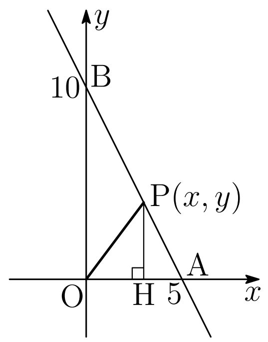
2.4.2 章末問題B

8 放物線 $y = 2x^2 - 4x + 5$ の頂点をPとする．次の問いに答えよ．

(1) x 軸について点Pと対称な点Qの座標を求めよ．

(2) この放物線と x 軸について対称な放物線を表す式を求めよ．

9 1次関数 $y = -2x + 10$ のグラフが，x 軸，y 軸と交わる点を，それぞれA，Bとする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ が線分AB上を動くとき，次の問いに答えよ．



(1) OP^2 を x で表せ．

(2) 線分OPの長さの最小値を求めよ．

10 a は定数とする．関数 $y = x^2 - 4x$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ の最大値，最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ．

(1) $a \leqq 0$

(2) $0 < a < 1$

(3) $a = 1$

(4) $1 < a < 2$

(5) $2 \leqq a$

11 周の長さが一定である長方形には，いろいろな大きさのものがある．このうち，面積が最大になるものは正方形であることを示せ．

12 2 次関数 $y = x^2 + (m+1)x + m$ のグラフは，定数 m の値に関係なく常に x 軸と共有点をもつことを示せ．

13 2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 1$ のグラフが x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ．

ヒント

8 (1) 点 (a, b) と x 軸について対称な点の座標は $(a, -b)$ である．

11 周の長さを $2a$ とおく．　**13** 頂点の x 座標，y 座標の符号に着目．

【答】

1 $y=-2x^2+2x+12$ [$y=-2x^2+bx+c$ の形に表される]

2 $a=2$，$b=-1$ $\left[\text{頂点の座標は，それぞれ}\ (-1,-2),\ \left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)\right]$

3 2 [OC$=x$ とすると $0<x<2$ で，CD$=4-x^2$，周の長さ$=4$OC$+2$CD]

4 (1) $k=-\frac{m^2}{4}+m$ (2) $m=2$ で最大値 1 をとる

5 (1) 負 (2) 正 (3) 正 (4) 正 (5) 正

$\left[(3)\ \text{頂点の}\ x\ \text{座標}=-\frac{b}{2a}>0 \quad (5)\ x=1\ \text{のときの}\ y\ \text{の値が}\ a+b+c\right]$

6 $0<a<1$ [最小値>0 であるから $-a^2+a>0$]

7 (1) $-a<x<2a$ (2) $2a<x<-a$ [$x^2-ax-2a^2=(x+a)(x-2a)$]

8 (1) $(1,-3)$ (2) $y=-2x^2+4x-5$ [(2) $y=-2(x-1)^2-3$]

9 (1) $\mathrm{OP}^2=5x^2-40x+100$ (2) $2\sqrt{5}$

[(1) $\mathrm{OP}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{PH}^2=x^2+(-2x+10)^2$ (2) OP^2 の最小値は 20]

10 (1) $x=a$ で最大値 a^2-4a，$x=a+2$ で最小値 a^2-4

(2) $x=a$ で最大値 a^2-4a，$x=2$ で最小値 -4

(3) $x=1,\ 3$ で最大値 -3，$x=2$ で最小値 -4

(4) $x=a+2$ で最大値 a^2-4，$x=2$ で最小値 -4

(5) $x=a+2$ で最大値 a^2-4，$x=a$ で最小値 a^2-4a

11 [長方形の周の長さを $2a$，1 辺の長さを x，面積を y とすると $y=x(a-x)$，y は $x=\frac{a}{2}$ で最大となる．]

12 [係数について $(m+1)^2-4{\cdot}1{\cdot}m \geqq 0$ であることを示す]

13 $m>1$ [$y=(x-m)^2-m^2+1$ で，$m>0$ かつ $-m^2+1<0$ であればよい]