最低限の解析学

高瀬幸一

ver.2017.2.28

第1章　微分

1.1　Taylor の定理

定理 1.1.1 (Rolle の定理) 関数 $F(x)$ は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能で $F(a)=F(b)$ とすると，$F'(\xi)$ なる $a<\xi<b$ が存在する．

定理 1.1.2 (Taylor の定理) 関数 $f(x)$ は開区間 I で n 回微分可能とする $(n>0)$．$a,b\in I$ に対して

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(b+\theta(b-a))}{n!}\cdot(b-a)^n$$

なる $0<\theta<1$ が存在する．

[証明] まず

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(b-a)^k+\frac{A}{n!}\cdot(b-a)^n$$

なる A をとる．

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\cdot(b-x)^k+\frac{A}{n!}\cdot(b-x)^n$$

とおくと，$F(x)$ は $[a,b]$（または $[b,a]$）で連続，(a,b)（または (b,a)）で微分可能で $F(a)=F(b)=f(b)$ である．よって Rolle の定理 1.1.1 より $F'(c)=0$ なる $a<c<b$（または $b<c<a$）が存在する．ここで

$$\begin{aligned}F'(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}\cdot(b-x)^k-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}\cdot(b-x)^{k-1}\\&\qquad-\frac{A}{(n-1)!}\cdot(b-x)^{n-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}\cdot(b-x)^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}\cdot(b-x)^{k-1}\\&\qquad-\frac{A}{(n-1)!}\cdot(b-x)^{n-1}\\&=\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}\cdot(b-x)^{n-1}-\frac{A}{(n-1)!}\cdot(b-x)^{n-1}\end{aligned}$$

だから $A = f^{(n)}(c)$ である．更に $c = b + \theta(b-a)$ なる $0 < \theta < 1$ がとれる．
$\blacksquare$

これを次のように言い換えることができる；

系 1.1.3 関数 $f(x)$ は $x = a$ の近傍で n 回微分可能とすると，$|x|$ が十分小さいとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!} \cdot (x-a)^n$$

なる $0 < \theta < 1$ が存在する．

特に $a = 0$ の場合には

系 1.1.4 (MacLaurin の定理) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ の近傍で n 回微分可能ならば，$|x|$ が十分小さいとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \cdot x^n$$

なる $0 < \theta < 1$ が存在する．

1.2 関数の Taylor 展開，MacLaurin 展開

関数 $f(x)$ は $x = a$ の近傍で無限回微分可能とすると，任意の $n > 0$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!} \cdot (x-a)^n$$

なる $0 < \theta < 1$ が存在する．ここで θ は a, x, n の関数であって，一般には複雑な動きをする．しかし

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!} \cdot (x-a)^n = 0$$

が証明できれば，$f(x)$ は $x = a$ の近傍で無限級数として

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

と表すことができる．これを $f(x)$ の Taylor 展開と呼ぶ．特に $a = 0$ の場合

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

を $f(x)$ の MacLaurin 展開と呼ぶ．例を幾つか示すために，次の補題が必要である；

補題 1.2.1 任意の実数 a に対して $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ である．

[証明] $|a|<N$ なる自然数 N をとる．$n\geq N$ ならば

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^N}{N!}\cdot\frac{a}{N+1}\cdot\frac{a}{n}\leq\frac{a^N}{N!}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N}.$$

$\left|\dfrac{a}{N}\right|<1$ だから $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{N}\right)^{n-N}=0$．よって $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$. ■

例 1.2.2 $f(x)=e^x$ とおくと $f^{(k)}(x)=e^x$ $(k=0,1,2,3\cdots)$ だから

$$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\cdot x^k+\frac{e^{\theta x}}{n!}\cdot x^n\qquad(0<\theta<1)$$

となる．ここで

$$e^{\theta x}\leq\begin{cases}e^x & :\text{if } x\geq 0,\\ 1 & :\text{if } x<0\end{cases}$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\theta x}}{n!}\cdot x^n\right|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0.$$

よって任意の x に対して

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

例 1.2.3 $f(x)=\sin x$ とおくと

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

よって

$$f^{(k)}(x)=f\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\qquad(k=0,1,2,3\cdots).$$

従って

$$f^{(k)}(0)=\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & :k=\text{偶数},\\ (-1)^{(k-1)/2} & :k=\text{奇数}\end{cases}$$

となる．よって

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}+\frac{\sin(\theta x+n\pi)}{(2n)!}\cdot x^{2n}\qquad(0<\theta<1).$$

ここで $\sin(\theta x+n\pi)|\leq 1$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(\theta x+n\pi)}{(2n)!}\cdot x^{2n}\right|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}=0.$$

よって任意の x に対して

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

となる．

例 1.2.4 $f(x) = cosx$ とおくと

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

よって

$$f^{(k)}(x) = f\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3 \cdots)$$

だから

$$f^{(k)}(0) = \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & : k = \text{奇数}, \\ (-1)^{k/2} & : k = \text{偶数} \end{cases}$$

となる．よって

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + \frac{\cos\left(\theta x + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

となる．ここで $\left|\cos\left(\theta x + (2n-1)\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1$ だから

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos\left(\theta x + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!} = 0.$$

よって任意の x に対して

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

となる．

1.3 多変数関数の Taylor 展開

二変数 (x, y) の関数 $f(x, y)$ は x, y に関して無限回微分可能として，t の関数

$$g(t) = f(a + \alpha t, b + \beta t)$$

に MacLaurin の定理を適用する．まず

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \alpha t, b + \beta t) \cdot \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a + \alpha t, b + \beta t) \cdot \beta$$

だから

$$g'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot\beta=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)f\Big|_{(x,y)=(a,b)}$$

と書ける．同様に

$$\begin{aligned}g''(0)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\alpha^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\cdot\alpha\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot\beta^2\\&=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(x,y)=(a,b)}\end{aligned}$$

となる．一般に

$$g^{(k)}(0)=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\Big|_{(x,y)=(a,b)}\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

となる．よって $g(t)$ に MacLaurin の定理を用いて

$$g(1)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\cdot t^k+\frac{g^{(n)}(\theta)}{n!}\qquad(0<\theta<1)$$

となるから

$$\begin{aligned}f(a+\alpha,b+\beta)=g(1)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}+R_n\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\Big|_{(x,y)=(a,b)}+R_n\end{aligned}$$

となる．ここで

$$R_n=\frac{1}{n1}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(x,y)=(a+\theta\alpha,b+\theta\beta)}\qquad(0<\theta<1)$$

である．一般に n 変数関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ の Taylor の定理は次のように書ける；

定理 1.3.1 n 変数関数 $f(x_1,\cdots x_n)$ が x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して無限回微分可能ならば

$$\begin{aligned}&f(a_1+\alpha_1,\cdots,a_n+\alpha_n)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\Big|_{(x_1,\cdots,x_n)=(a_1,\cdots,a_n)}+R_n.\end{aligned}$$

ここで

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f\Big|_{x=a+\theta\cdot\alpha}\qquad(0<\theta<1)$$

である．

1.4 多変数関数の極大，極小

n 変数 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ の関数 $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$ が $x = a = (a_1, \cdots, a_n)$ で極小になる必要条件は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0 \tag{1.1}$$

なることであるが，これは十分条件ではない．そこで (1.1) を仮定した上で，$f(x)$ が $x = a$ で極小となる十分条件を考える．

定理 1.3.1 から，(1.1) の下で

$$f(a+\alpha) = f(a) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f\Bigg|_{x=a} + \cdots$$

である．ここで $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ で $|\alpha_i|$ は十分小さいとする．ところで

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} f_{11}(a) & f_{12}(a) & \cdots & f_{1n}(a) \\ f_{21}(a) & f_{22}(a) & \cdots & f_{2n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(a) & f_{n2}(a) & \cdots & f_{nn}(a) \end{bmatrix} \qquad (f_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$$

は実係数対称行列となって

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f\Bigg|_{x=a} = (\alpha, H_f(a)\alpha)$$

と書ける．ここで縦ベクトル

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

に対して $(u, v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ とおいて，$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ を縦ベクトルと見るのである．$H_f(a)$ は実係数対称行列だから直交行列 P が存在して

$$P^{-1} H_f(a) P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

が対角行列となり，λ_i $(i = 1, \cdots, n)$ は $H_f(a)$ の固有値である；

$$\chi_{H_f(a)}(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n).$$

ここで $v=P^{-1}\alpha$ とおけば

$$(\alpha, H_f(a)\alpha) = \lambda_1 v_1^s + \cdots + \lambda_n v_n^2$$

となって，次の三命題は同値である；

1) $\alpha \neq 0$ ならば常に $(\alpha, H_f(a)\alpha) > 0$,

2) $H_f(a)$ の固有値 λ_i $(i=1,\cdots,n)$ は全て正（即ち実係数対称行列 $H_f(a)$ は正定値），

3) $H_f(a)$ の主小行列式

$$D_f^{(k)}(a) = \det \begin{bmatrix} f_{11}(a) & \cdots & f_{1k}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1}(a) & \cdots & f_{kk}(a) \end{bmatrix} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

が全て正.

よって次の定理を得る；

定理 1.4.1 n 変数 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ の関数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ と $a=(a_1,\cdots,a_n)$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

かつ

$$D_f^{(k)}(a) > 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

ならば $f(x)$ は $x=a$ で極小となる.

例 1.4.2 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して

$$H_f(a,b) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}$$

だから

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

のとき

1)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極小,

2)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$
ならば $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極大

となる.

第2章　積分の計算

2.1　基本的な積分

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$

[証明] 1) $y = \arctan x$ とおくと $x = tany$ だから

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\frac{\sin y}{\cos y} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2.$$

よって $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$ だから $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C.$ ■

2.2　分数関数の部分分数展開

複素数を係数とする変数 x の多項式の全体を $\mathbb{C}[x]$ と表す．$f(x)$
$in\mathbb{C}[x]$ が 0 でなけらば

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \qquad (a_i \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0)$$

と書ける．このとき n を多項式 $f(x)$ の次数と呼び $\deg f(x)$ と書く．0-多項式の次数は定義されない．

実数を係数とする変数 x の多項式全体を $\mathbb{R}[x]$ と書く．

次の二つの定理が基本的である．

定理 2.2.1 (代数学の基本定理) 複素数を係数とする多項式 $f(x)$ に対して $f(\alpha) = 0$ となる複素数 α が存在する．従って $\deg f(x) = n$ ならば

$$f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \quad (\alpha_i \in \mathbb{C})$$

と因数分解される．

定理 2.2.2 (多項式に関する剰余の定理) $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ で $g(x) \neq 0$ とすると

$$f(x) = q(x)\cdots g(x) + r(x), \quad r(x) = 0 \text{ または } \deg r(x) < \deg g(x)$$

なる $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ が唯一存在する．

空でない部分集合 $\mathfrak{a} \subset \mathbb{R}[x]$ が**イデアル** であるとは，次の二条件が満たされることを言う；

1) $f(x), g(x) \in \mathfrak{a}$ ならば $f(x) \pm g(x) \in \mathfrak{a}$,

2) $f(x) \in \mathbb{R}[x], g(x) \in \mathfrak{a}$ ならば $f(x)g(x) \in \mathfrak{a}$.

例えば $0 \in \mathbb{R}[x]$ のみからなる集合 $\{0\}$ はイデアルである．
あるいは $f_1(x), \cdots, f_r(x) \in \mathbb{R}[x]$ を取った時に

$$(f_1(x), \cdots, f_r(x)) = \{g_1(x)f_1(x) + \cdots + g_r(x)f_r(x) \mid g_i(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

はイデアルである．これを $f_1(x), \cdots, f_r(x)$ で生成されたイデアルと呼ぶ．

定理 2.2.3 イデアル $\{0\} \neq \mathfrak{a} \subset \mathbb{R}[x]$ に含まれる次数最小の多項式を $d(x) \in \mathfrak{a}$ とすると $\mathfrak{a} = (d(x))$ である．

[証明] $d(x) \in \mathfrak{a}$ で $\mathfrak{a}$ はイデアルだから $(d(x)) \subset \mathfrak{a}$ は明らかである．任意の $f(x) \in \mathfrak{a}$ に対して定理 2.2.2 により

$$f(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x), \quad r(x) = 0 \text{ または } \deg r(x) < \deg d(x)$$

なる $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ がとれる．ここで $r(x) \neq 0$ と仮定すると，$f(x) \in \mathfrak{a}$ かつ $q(x)d(x) \in (d(x)) \subset \mathfrak{a}$ だから

$$r(x) = f(x) - q(x)d(x) \in \mathfrak{a}, \quad \deg r(x) < \deg d(x)$$

となり $d(x)$ の定義に反する．よって $r(x) = 0$，即ち $f(x) = q(x) \cdot d(x) \in (d(x))$ となる．よって $\mathfrak{a} \subset (d(x))$ が示されたから $\mathfrak{a} = (d(x))$ となる．■

命題 2.2.4 多項式 $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_r(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して

$$F_1(\alpha) = F_2(\alpha) = \cdots = F_r(\alpha) = 0$$

なる複素数 α が存在しないならば

$$g_1(x)F_1(x) + g_2(x)F_2(X) + \cdots + g_r(x)F_r(x) = 1$$

なる $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ が存在する．

[証明] 定理 2.2.3 より

$$(F_1(x), F_2(x) < \cdots, F_r(x)) = (d(x))$$

なる $d(x) \in \mathbb{R}[x]$ がとれる．

$$F_i(x) \in (F_1(x), F_2(x), \cdots, F_r(x)) = (d(x))$$

だから $F_i(x) = f_i(x) \cdots d(x)$ なる $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ がとれる．ここで $\deg d(x) > 0$ とすると，定理 2.2.1 から $d(\alpha) - 0$ なる複素数 α が存在するが，これは

$$F_i(\alpha) = f_(\alpha) \cdots d(\alpha) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

を意味するから，仮定に反する．よって $\deg d(x) = 0$，即ち $d(x) = c$ は 0 でない定数多項式となる．すると

$$c = d(x) \in (d(x)) = (F_1(x), F_2(x), \cdots, F_r(x))$$

だから $c = h_1(x)F_1(x) + h_2(x)F_2(x) + \cdots + h_r(x)F_r(x)$ なる $h_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ がとなるから，$g_i(x) = c^{-1}h_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ とおけば

$$g_1(x)F_1(x) + g_2(x)F_2(x) + \cdots + g_r(x)F_r(x) = 1$$

となる．■

命題 2.2.5 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_r(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して，$i \neq j$ ならば $f_i(\alpha) = f_j(\alpha) = 0$ なる複素数 α は存在しないとする．このとき

$$\frac{1}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_r(x)} = \frac{g_1(x)}{f_1(x)} + \frac{g_2(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{g_r(x)}{f_r(x)}$$

なる $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ が存在する．

[証明] $i = 1, 2, \cdots, r$ に対して

$$F_i(x) = \frac{f_1(x)f_2(x)\cdots f_r(x)}{f_i(x)} \in \mathbb{R}[x]$$

とおくと

$$F_1(\alpha) = F_2(\alpha) = \cdots = F_r(\alpha) = 0$$

なる複素数 α は存在しない．よって命題 2.2.4 より

$$g_1(x)F_1(x) + g_2(x)F_2(x) + \cdots + g_r(x)F_r(x) = 1$$

なる $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ がとれる．両辺を $f_1(x)f_2(x)\cdots f_r(x)$ で割れば求める等式を得る．■

多項式 $F(x), G(x) \in \mathbb{R}[x]$ $(F(x) \neq 0)$ に対して分数関数 $\dfrac{G(x)}{F(x)}$ の構造を調べよう．ここで分子分母を 0 でない定数で割ることができるから，$F(x)$ の最高次の係数は 1 であると仮定してよい．

まず複素数 α の共役複素数を $\overline{\alpha}$ と書くと

$$F(\alpha) = 0 \implies F(\overline{\alpha}) = \overline{F(\alpha)} = 0$$

だから，実数係数方程式 $F(x)=0$ の解は i) 実数，または ii) 実数でない複素数の対 $\alpha, \overline{\alpha}$ である．従って $F(x)$ は次のように因数分解される；

$$F(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{m_i}\cdot\prod_{j=1}^{s}(x^2+p_jx+q_j)^{n_j}.$$

但し $a_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$ かつ $p_j^2-4q_j<0$ であり，更に

$$x-a_i \quad (i=1,\cdots,r), \qquad x^2+p_jx+q_j \quad (j=1,\cdots,s)$$

の根は互いに異なる．従って命題 2.2.5 より

$$\frac{1}{F(x)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{g_i(x)}{(x-a_i)^{m_i}}+\sum_{j=1}^{s}\frac{h_j(x)}{(x^2+p_jx+q_j)^{n_j}}$$

なる $g_i(x), h_j(x) \in \mathbb{R}[x]$ がとれるから

$$\frac{G(x)}{F(x)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{G_i(x)}{(x-a_i)^{m_i}}+\sum_{j=1}^{s}\frac{H_j(x)}{(x^2+p_jx+q_j)^{n_j}}$$

なる $G_i(x), H_j(x) \in \mathbb{R}[x]$ がとれる．

1) $\dfrac{G(x)}{(x-a)^n}$ を部分分数に展開しよう．定理 2.2.2 を繰り返し用いる．まず

$$G(x)=q(x)(x-a)^m+r(x), \quad r(x)=0 \text{ または } \deg r(x)<m$$

として，$r(x)\neq 0$ ならば更に

$$\begin{aligned}
r(x)&=q_1(x)(x-a)+a_1, \quad \deg q_1(x)<m-1,\\
q_1(x)&=q_2(x)(x-a)+a_2, \quad \deg q_2(x)<m-2,\\
q_2(x)&=q_3(x)(x-a)+a_3, \quad \deg q_3(x)<m-3,\\
&\vdots\\
q_{m-2}(x)&=q_{m-1}(x)(x-a)+a_{m-1}, \quad \deg q_{m-1}(x)<1
\end{aligned}$$

とおく．ここで $q_{m-1}(x)=a_m$ は定数多項式である．よって

$$\begin{aligned}
&\frac{G(x)}{(x-a)^m}\\
&=q(x)+\frac{r(x)}{(x-a)^m}\\
&=q(x)+\frac{a_1}{(x-a)^m}+\frac{q_1(x)}{(x-a)^{m-1}}\\
&=q(x)+\frac{a_1}{(x-a)^m}+\frac{a_2}{(x-a)^{m-1}}+\frac{q_2(x)}{(x-a)^{m-2}}\\
&\vdots\\
&=q(x)+\frac{a_1}{(x-a)^m}+\frac{a_2}{(x-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{(x-a)^2}+\frac{a_m}{x-a}
\end{aligned}$$

となる．

2) $\dfrac{H(x)}{(x^2+px+q)^n}$ を部分分数に展開しよう．まず

$$H(x) = q(x)(x^2+px+q)^n + r(x), \quad r(x) = 0 \text{ または } \deg r(x) < 2n$$

として，$r(x) \neq 0$ ならば更に

$$\begin{aligned}
r(x) &= q_1(x)(x^2+px+q) + a_1x + b_1, \quad \deg q_1(x) < 2(n-1),\\
q_1(x) &= q_2(x)(x^2+px+q) + a_2x + b_2, \quad \deg q_2(x) < 2(n-2),\\
q_2(x) &= q_3(x)(x^2+px+q) + a_3x + b_3, \quad \deg q_3(x) < 2(n-3),\\
&\vdots\\
q_{n-2}(x) &= q_{n-1}(x)(x^a+px+q) + a_{n-1}x + b_{n-1}, \quad \deg q_{n-1}(x) < 2
\end{aligned}$$

とおく．ここで $q_{n-1}(x) = a_nx + b_n$ は高々一次式である．よって

$$\begin{aligned}
&\frac{H(x)}{(x^2+px+q)^n}\\
&= q(x) + \frac{r(x)}{(x^2+px+q)^n}\\
&= q(x) + \frac{a_1x+b_1}{(x^a+px+q)^n} + \frac{q_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}}\\
&= q(x) + \frac{a_1x+b_1}{(x^a+px+q)^n} + \frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{q_2(x)}{(x^2+px+q)^{n-2}}\\
&\vdots\\
&= q(x) + \frac{a_1x+b_1}{(x^a+px+q)^n} + \frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^{n-1}}\\
&\qquad\qquad + \cdots + \frac{a_{n-1}x+b_{n-1}}{(x^2+px+q)^2} + \frac{a_nx+b_n}{x^2+px+q}
\end{aligned}$$

となる．

2.3 分数関数の積分

多項式 $F(x), G(x)$ に対して，分数関数 $\dfrac{G(x)}{F(x)}$ の積分 $\displaystyle\int \frac{G(x)}{F(x)}dx$ は次のように計算すればよい；

1) $G(x)$ を $F(x)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすれば，$Q(x), R(x)$ は多項式で，$R(x)$ の次数は $F(x)$ の次数より小さくて

$$\int \frac{G(x)}{F(x)}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{F(x)}dx$$

となる．$\int Q(x)dx$ は多項式の積分だから簡単なので，問題は $\int \frac{R(x)}{F(x)}dx$ の計算である．

2) $F(x)$ を一次式と二次式に因数分解して

$$F(x) = A \cdot (x-a)^k \cdots (x-b)^l \cdot (x^2+cx+d)^m \cdots (x^2+px+q)^n$$

とする．ただし二次式 $x^2+bx+c, \cdots, x^2+px+q$ の判別式はすべて負

$$c^2-4d<0, \cdots, p^2-4q<0$$

とする．このとき部分分数展開

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{F(x)} = &\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_l}{(x-b)^l} \\
&+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2} + \cdots + \frac{C_mx+D_m}{(x^2+cx+d)^m} \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{P_nx+Q_n}{(x^2+px+q)^n}
\end{aligned}$$

が成り立つから，積分 $\int \frac{R(x)}{F(x)}dx$ の計算は

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx \qquad k=1,2,3,\cdots$$

と

$$\int \frac{Cx+D}{(x^2+cx+d)^m}dx \qquad c^2-4d<0 \qquad m=1,2,3,\cdots$$

の計算に帰着される．

3) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$ の計算は簡単で

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \begin{cases} A\log|x-a| & k=1 \text{ のとき}, \\ \dfrac{1}{1-k}\dfrac{A}{(x-a)^{k-1}} & k=2,3,\cdots \text{ のとき}. \end{cases}$$

2.3.1 $\int \frac{Cx+D}{(x^2+cx+d)^m}dx$ の計算 $(c^2-4d<0)$

1) x^2+cx+d を平方完成すると

$$x^2+cx+d = \left(x+\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{4d-c^2}{4}$$

となる．ここで $c^2-4d<0$ だから $\dfrac{4c-d^2}{4}=p^2\ (p>0)$ とおいて，$t=x+\dfrac{c}{2}$ と変数変換すると，$dx=dt$ だから

$$\begin{aligned}\int\frac{Cx+D}{(x^2+cx+d)^m}dx &= \int\frac{C't+D'}{(t^2+p^2)^m}dt\\ &= C'\int\frac{t}{(t^2+p^2)^m}dt+D'\int\frac{dt}{(t^2+p^2)^m}\end{aligned}$$

と変形される．

2) $\displaystyle\int\frac{t}{(t^2+p^2)^m}dt$ の計算は，$t^2=u$ とおけば $2tdt=du$ だから

$$\begin{aligned}\int\frac{t}{(t^2+p^2)^m}dt &= \frac{1}{2}\int\frac{du}{(u+p^2)^m}\\ &= \begin{cases}\dfrac{1}{2}\log|u+p^2| & m=1,\\ \dfrac{1}{2(1-m)}\dfrac{1}{(u+p^2)^{m-1}} & m=2,3,\cdots\end{cases}\\ &= \begin{cases}\dfrac{1}{2}\log(t^2+p^2) & m=1,\\ \dfrac{1}{2(1-m)}\dfrac{1}{(t^2+p^2)^{m-1}} & m=2,3,\cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+p^2}$ の計算は，$t=pu$ とおくと $dt=pdu$ だから

$$\begin{aligned}\int\frac{dt}{t^2+p^2} &= \frac{1}{p}\int\frac{du}{u^2+1}\\ &= \frac{1}{p}\arctan u=\frac{1}{p}\arctan\left(\frac{t}{p}\right).\end{aligned}$$

4) $\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+p^2)^2}$ の計算は，部分積分により

$$\begin{aligned}\int\frac{dt}{t^2+p^2} &= \frac{t}{t^2+p^2}-\int\frac{-2t^2}{(t^2+p^2)^2}dt\\ &= \frac{t}{t^2+p^2}+2\int\frac{t^2+p^2}{(t^2+p^2)^2}dt-2\int\frac{p^2}{(t^2+p^2)^2}dt\\ &= \frac{t}{t^2+p^2}+2\int\frac{dt}{t^2+p^2}-2p^2\int\frac{dt}{(t^2+p^2)^2}.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}2p^2\int\frac{dt}{(t^2+p^2)^2} &= \frac{t}{t^2+p^2}+\int\frac{dt}{t^2+p^2}\\ &= \frac{t}{t^2+p^2}+\frac{1}{p}\arctan\left(\frac{t}{p}\right).\end{aligned}$$

よって

$$\int \frac{dt}{(t^2+p^2)^2} = \frac{1}{2p^2}\frac{t}{t^2+p^2} + \frac{1}{2p^3}\arctan\left(\frac{t}{p}\right).$$

5) 一般に，部分積分により

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{(t^2+p^2)^m} &= \frac{t}{(t^2+p^2)^m} - \int \frac{-2mt^2}{(t^2+p^2)^{m+1}}dt \\
&= \frac{t}{(t^2+p^2)^m} + 2m\int \frac{t^2+p^2}{(t^2+p^2)^{m+1}}dt - 2m\int \frac{p^2}{(t^2+p^2)^{m+1}}dt \\
&= \frac{t}{(t^2+p^2)^m} + 2m\int \frac{dt}{(t^2+p^2)^m} - 2mp^2\int \frac{dt}{(t^2+p^2)^{m+1}}.
\end{aligned}$$

よって

$$2mp^2\int \frac{dt}{(t^2+p^2)^{m+1}} = \frac{t}{(t^2+p^2)^m} + (2m-1)\int \frac{dt}{(t^2+p^2)^m}.$$

よって

$$\int \frac{dt}{(t^2+p^2)^{m+1}} = \frac{1}{2mp^2}\frac{t}{(t^2+p^2)^m} + \frac{2m-1}{2mp^2}\int \frac{dt}{(t^2+p^2)^m}$$

となり，次数を下げていけばよい．

2.4 三角関数の分数関数の積分

X, Y の分数関数 $F(X,Y)$ に対して，$\sin x, \cos x$ の分数関数の積分

$$\int F(\sin x, \cos x)dx$$

は次のように計算すればよい．まず $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$1+t^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \qquad \therefore \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

よって

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

また

$$dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2}dx \qquad \therefore dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

よって

$$\int F(\sin x, \cos x)dx = \int F\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となり，t の分数関数の積分に帰着される．

2.5　二次式の平方根を含む分数関数の積分

X, Y の分数関数 $F(X,Y)$ にたいして，積分 $\displaystyle\int F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ $(a \neq 0)$ の計算は次のようにすればよい．

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

と平方完成する．$b^2-4ac=0$ とすると，$a<0$ ならば平方根の中が負となり不可能であり，$a>0$ ならば $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$ となり

$$F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) = F\left(x, \sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)$$

は x の分数関数となって，2.3 節に場合になる．従って $b^2-4ac \neq 0$ の場合が問題となる．更に平方根の中が正または 0 であるためには，$a<0$ かつ $b^2-4ac<0$ とはなり得ない．従って次の 3 通りの場合が考えられる；

1) $a>0$ かつ $b^2-4ac<0$,

2) $a>0$ かつ $b^2-4ac>0$,

3) $a<0$ かつ $b^2-4ac>0$.

2.5.1　$a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ の場合

$t = x + \dfrac{b}{2a}$ とおけば

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = at^2+p^2.$$

ここで $\dfrac{4ac-b^2}{4a} > 0$ だから $\dfrac{4ac-b^2}{4a} = p^2$ $(p>0)$ とおいた．
更に $t = \dfrac{p}{\sqrt{a}}\dfrac{2u}{1-u^2}$ とおくと

$$at^2+p^2 = p^2\left\{\frac{4u^2}{(1-u^2)^2}+1\right\} = p^2\cdot\frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2}$$

$$\therefore \sqrt{at^2+p^2} = p\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2},$$

また

$$\frac{dt}{du} = \frac{p}{\sqrt{a}}\frac{2(1-u^2)+4u^2}{(1-u^2)^2} = \frac{2p}{\sqrt{a}}\frac{1+u^2}{(1-u^2)^2} \qquad \therefore dt = \frac{2p}{\sqrt{a}}\frac{1+u^2}{(1-u^2)^2}du$$

となり，分数関数の積分に帰着される．

2.5.2　$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac > 0$ のとき

$t = x + \dfrac{b}{2a}$ とおけば

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = at^2 - p^2.$$

ここで $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ だから $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = p^2$ $(p > 0)$ とおいた．
更に $t = \dfrac{p}{\sqrt{a}}\dfrac{1 + u^2}{1 - u^2}$ とおくと

$$at^2 - p^2 = p^2\left\{\left(\frac{1 + u^2}{1 - u^2}\right)^2 - 1\right\} = p^2 \cdot \frac{4u^2}{(1 - u^2)^2}$$

$$\therefore \sqrt{at^2 - p^2} = p \cdot \frac{2u}{|1 - u^2|},$$

また

$$\frac{dt}{du} = \frac{p}{\sqrt{a}}\frac{2u(1 - u^2) + 2u(1 + u^2)}{(1 - u^2)^2} = \frac{p}{\sqrt{a}}\frac{4u}{(1 - u^2)^2}$$

となり，分数関数の積分に帰着される．

2.5.3　$a < 0$ かつ $b^2 - 4ac > 0$ の場合

$t = x + \dfrac{b}{2a}$ とおけば

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = p^2 - |a|t^2.$$

ここで $\dfrac{4ac - b^2}{4a} > 0$ だから $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = p^2$ $(p > 0)$ とおいた．
更に $t = \dfrac{p}{\sqrt{|a|}}\dfrac{2u}{1 + u^2}$ とおくと

$$p^2 - |a|t^2 = p^2\left\{1 - \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right)^2\right\} = p^2 \cdot \frac{(1 - u^2)^2}{(1 + u^2)^2}$$

$$\therefore \sqrt{p^2 - |a|t^2} = p \cdot \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

また

$$\frac{dt}{du} = \frac{p}{\sqrt{|a|}}\frac{2(1 + u^2) - 4u^2}{(1 + u^2)^2} = \frac{2p}{\sqrt{|a|}}\frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} \qquad \therefore dt = \frac{2p}{\sqrt{|a|}}\frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}du$$

となり，分数関数の積分に帰着される．

$a > 0,\ p > 0$		変数の範囲の対応
$\sqrt{at^2 + p^2}$	$t = \dfrac{p}{\sqrt{a}} \dfrac{2u}{1 - u^2}$	$-\infty < t < \infty \Leftrightarrow -1 < u < 1$
$\sqrt{at^2 - p^2}$	$t = \dfrac{p}{\sqrt{a}} \dfrac{1 + u^2}{1 - u^2}$	$\begin{cases} t > \dfrac{p}{\sqrt{a}} & \Leftrightarrow \quad 0 < u < 1 \\ t < -\dfrac{p}{\sqrt{a}} & \Leftrightarrow \quad 1 < u < \infty \end{cases}$
$\sqrt{p^2 - at^2}$	$t = \dfrac{p}{\sqrt{a}} \dfrac{2u}{1 + u^2}$	$-\dfrac{p}{\sqrt{a}} \leq t \leq \dfrac{p}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow -1 \leq u \leq 1.$

第3章　無限級数

3.1　基本

数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を第 n **部分和** と呼ぶ． $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$ が収束するとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha$$

と定義し，無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は α に収束する，あるいは無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の値は α であるという．

無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するとき，第 n 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ は Cauchy 列だから，任意の $\varepsilon > 0$ をとると，番号 N が定まって $m > n \geq N$ ならば

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

となる．特に $n = m - 1$ とおけば $|a_m| < \varepsilon$ となる．即ち

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k : \text{収束} \implies \lim_{m\to\infty} |a_m| = 0$$

である．

無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ に対して $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が収束するとき，第 n 部分和は Cauchy 列だから，任意の $\varepsilon > 0$ をとると，番号 N が定まって $m > n \geq N$ ならば

$$|T_m - T_n| = |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon$$

となる．よって第 n 部分和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ について

$$\begin{aligned}|S_m - S_n| &= |a_{n+1} + \cdots + a_m| \\ &\leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = |T_m - T_n| < \varepsilon\end{aligned}$$

となる．即ち $\{S_n\}$ は Cauchy 列となり，$\lim_{n\to\infty} S_n$ は収束する．即ち

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| : \text{収束} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k : \text{収束}$$

である．そこで $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ が収束するとき $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は**絶対収束**するという．

注意 3.1.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束るとは限らない．

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束しても $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ が収束するとは限らない（例 3.3.2 を参照せよ）．

3.2 絶対収束の判定法

定理 3.2.1 $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = r$ が収束するとき

1) $r < 1$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ は収束する（即ち $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は絶対収束する）．

2) $r > 1$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ は発散する．

[証明] 1) $r < 1$ だから $r < r_0 < 1$ なる $r?0$ がとれる．$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = r$ だから，$|a_n|^{1/n} > r_0$ となる n は有限個である．それらの n を除外して考えれば $|a_n|^{1/n} \le r_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるとして一般性を失わない．このとき，$|a_n| \le r_0^n$ 打から

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| \le \sum_{k=1}^{n} r_0^k = \frac{r_0 - r_0^{n+1}}{1 - r_0} < \frac{r_0}{1 - r_0}.$$

よって第 n 部分和 $\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ は単調非減少かつ上に有界だから収束する．

2) $r > 1$ だから $r > r_0 > 1$ なる r_0 がとれる．上と同様にして $|a_n|^{1/n} \ge r_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるとしてよい．このとき $|a_n| \ge r_0^n$ で $\lim_{n\to\infty} r_0^n = \infty$ だから $\lim_{n\to\infty}|a_n| \ne 0$．よって $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ は収束しない．■

定理 3.2.2 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ が収束するとき

1) $r < 1$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ は収束する（即ち $\sum_{k=1} \infty a_k$ は絶対収束する）．

2) $r > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ は発散する．

[証明] 1) $r < 1$ だから $r < r_o < 1$ なる r_0 がとれる．$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と仮定してよい．このとき

$$|a_{n+1} \leq r_0 |a_n| \leq \cdots \leq r_0^n |a_1|$$

だから $|a_n| \leq r_0^{n-1} |a_1|$ $(n = 1, 2, \cdots)$ となる．よって

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq |a_1| \sum_{k=1}^{n} r_0^{k-1} = |a_1| \cdot \frac{1 - r_0^n}{1 - r_0} < |a_1| \cdot \frac{1}{1 - r_0}.$$

よって第 n 部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ は単調非減少かつ上に有界だから収束する．

2) $r > 1$ だから $r > r_0 > 1$ なる r_0 がとれる．$|a_{n+1}/a_n| \geq r_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と仮定してよい．このとき

$$|a_{n+1}| \geq r_0 |a_n| \geq \cdots \geq r_0^n |a_1|$$

だから $|a_n| \geq r_0^{n-1} |a_1|$ $(n = 1, 2, \cdots)$ となる．よって $\displaystyle\lim_{n \to \infty} r_0^{n-1} = \infty$ より $\displaystyle\lim_{n \to \infty} |a_n| \neq 0$，従って $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ は収束しない．■

例 3.2.3 1) $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ とおくと

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は全ての x に対して絶対収束する．実際

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n1}.$$

2) $a_n = n^{-s}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくと

$$\lim_{n \to \infty} \log n^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

より $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$ だから

$$\lim_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \left(n^{1/n}\right)^{-s} = 1.$$

よって定理 3.2.1 によってじゃ判定できない．

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^s\right| = 1$$

だから，定理 3.2.2 によっても判定できない．

命題 3.2.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ が収束する必要十分条件は $s>1$ なることである．

[証明] $s>0$ とする．このとき $f(x)=x^{-s}$ $(x>0)$ は単調減少函数だから

$$n^{-s} < \int_{n-1}^{n} x^{-s}dx < (n-1)^{-s} \quad (n=2,3,\cdots). \tag{3.1}$$

ここで

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} x^{-s}dx = \int_{1}^{n} x^{-s}dx = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^n = \dfrac{1-n^{-s}}{s-1} & : s\neq 1, \\ [\log x]_1^n = \log n & : s=1 \end{cases}$$

だから $s>1$ ならば

$$\sum_{k=2}^{n} k^{-s} < \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} x^{-s}dx < \frac{1}{s-1}.$$

よって第 n 部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-s}$ は単調増大かつ上に有界となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k^{-s}$ は収束する．

$s=1$ のときには

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} > \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} x^{-1}dx = \log n \tag{3.2}$$

で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$ だから $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ は発散する．

$s<1$ ならば $n^{-s}>n^{-1}$ だから $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-s} > \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$ となり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ は発散する．■

定理 3.2.5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\cdot\log\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = l$ が収束するとき

1) $l>1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ は収束する（即ち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する）．

2) $l<1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ は発散する．

[証明] (3.1) と (3.2) から

$$\log n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < 1+\sum_{k=2}^{n-1}\int_{k-1}^{k} x^{-1}dx = 1+\int_{1}^{n-1} x^{-1}dx = 1+\log n-1 \tag{3.3}$$

である．よって $s>0$ に対して

$$n^{-s} > e^{-s\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} > e^{-s}(n-1)^{-s}. \tag{3.4}$$

1) $l>1$ だから $l>s>1$ なる s がとれる．$\lim_{n\to\infty} n\cdot\log\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = l$ だから $n\cdot\log\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > s$ $(n=1,2,\cdots)$ と仮定してよい．よって

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < e^{-\frac{s}{n}} \quad (n=1,2,\cdots),$$

よって

$$\left|\frac{a_n}{a_1}\right| = \prod_{k=1}^{n-1}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \prod_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{s}{k}} = e^{-s\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} < n^{-s},$$

よって $|a_n| \leq |a_1|\cdot n^{-s}$ $(n=1,2,\cdots)$．よって命題 3.2.4 より

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} < \infty.$$

2) $l<1$ だから $l<s<1$ なる s がとれる．よって $n\cdot\log\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < s$ $(n=1,2,\cdots)$ と仮定してよい．よって

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > e^{-\frac{s}{n}} \quad (n=1,2,\cdots)$$

よって

$$\left|\frac{a_n}{a_1}\right| = \prod_{k=1}^{n-1}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq \prod_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{s}{k}} = e^{-s\sum_{k=1}^{n-1}} > e^{-s}\cdot(n-1)^{-s},$$

よって $|a_n| \geq |a_1|e^{-s}\cdot(n-1)^{-s}$ $(n=2,3,\cdots)$．よって

$$\sum_{k=2}^{n}|a_k| \geq |a_1|e^{-s}\sum_{k=1}^{n-1}k^{-s}.$$

よって命題 3.2.4 より $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}$ は発散するから，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ も発散する．■

定理 3.2.6 $\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right) = l$ が収束するとき

1) $l>1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ は収束する（即ち $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する）．

2) $l<1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ は発散する．

[証明] $n\left(\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)=c_n$ とおくと

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{c_n}{n},\qquad \lim_{n\to\infty}c_n=l.$$

ここで $\nu=n/c_n$ とおくと $n\to\infty$ のとき $\nu\to\infty$，よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\cdot\log\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty}n\cdot\log\left(1+\frac{c_n}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}c_n\cdot\nu\cdot\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}c_n\lim_{\nu\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=l.\end{aligned}$$

よって定理 3.2.5 より求める結果を得る．■

例 3.2.7 複素数 α,β,γ に対して

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\cdot(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}\tag{3.5}$$

を**超幾何級数**と呼ぶ．但し

$$(\alpha)_n=\begin{cases}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1) & :n>0,\\ 1 & :n=0\end{cases}$$

とする．

$$a_n=\frac{(\alpha)_n\cdot(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}$$

とおくと

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)}\right||x|\tag{3.6}$$

だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|$．よって定理 3.2.2 より

1) $|x|<1$ ならば (3.5) は絶対収束する．

2) $|x|>1$ ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(\alpha)_n\cdot(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}\right|$$

は発散する．

$|x|=1$ のとき

$$n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)=n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^2-1\right)\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|+1\right)^{-1}.$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|+1\right)=2.$$

一方

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^2-1\\=&\frac{(n+\gamma)(n+1)(n+\overline{\gamma})(n+1)-(n+\alpha)(n+\beta)(n+\overline{\alpha})(n+\overline{\beta})}{|(n+\alpha)(n+\beta)|^2}\\=&\frac{\{\gamma+1+\overline{\gamma}+1-(\alpha+\beta+\overline{\alpha}+\overline{\beta})\}n^3+\cdots}{n^4\left|\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\right|^2}\\=&\frac{2\{\mathrm{Re}(\gamma)+1-\mathrm{Re}(\alpha+\beta)\}n^3+\cdots}{n^4\left|\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\right|^2}\end{aligned}$$

だから

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^2-1\right)=\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)+1.$$

よって定理 3.2.6 より

1) $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha+\beta)$ ならば (3.5) は $|x|=1$ のとき絶対収束する.

2) $\mathrm{Re}(\gamma)<\mathrm{Re}(\alpha+\beta)$ ならば $|x|=1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(\alpha)_n\cdot(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}\right|$ は発散する.

3.3 交代級数

正の実数列 a_n に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

を交代級数と呼ぶ.

定理 3.3.1 正の実数列 a_n が単調非増加 $(a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1})$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n:\text{収束する}\iff\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

このとき $\alpha=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ とおくと $\left|\alpha-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k\right|\leq a_{n+1}$ である.

[証明] $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ とおくと

$$S_{2m+2}-S_{2m}=a_{2m+1}-a_{2m+2}\geq 0,$$
$$S_{2m+1}-S_{2m-1}=-a_{2m}+a_{2m+1}\leq 0$$

かつ $S_{2m+1}-S_{2m}=a_{2m+1}>0$ だから

$$S_{2l}\leq S_{2m+1}\qquad (l,m=1,2,3,\cdots).$$

よって

$$S_2\leq S_4\leq\cdots\leq S_{2m}\leq S_{2m+1}\leq S_{2m-1}\leq\cdots S_3\leq S_1.$$

よって $\alpha=\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_{2m}$, $\beta=\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_{2m+1}$ は共に収束して

$$S_{2m}\leq\alpha\leq\beta\leq S_{2m+1}\quad (m=1,2,\cdots)$$

である．よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ならば $\alpha=\beta$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$$

は収束する．更に

$$|\alpha-S_{2m}|\leq S_{2m+1}-S_{2m}=a_{2m+1},$$
$$|\alpha-S_{2m-1}|\leq|S_{2m}-S_{2m-1}|=a_{2m}.$$

よって $\left|\alpha-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k\right|\leq a_n$ となる．■

例 3.3.2 定理 3.3.1 により

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

は収束するが絶対収束はしない（命題 3.2.4 参照）．

上の例の様に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束するが $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ は発散するとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は**条件収束**するという．

命題 3.3.3 $\gamma=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$ は収束する．これを **Euler の定数**と呼ぶ．

[証明] (3.1) より

$$\frac{1}{n} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} = \log n - \log(n-1) < \frac{1}{n-1}$$

だから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k-1} > \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1).$$

そこで

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n > \log(n+1) - \log n > 0$$

とおくと

$$c_n - c_{n-1} = \frac{1}{n} - \log n + \log(n-1) < 0,$$

即ち c_n は単調減少である．よって $\lim_{n\to\infty} c_n$ は収束する．■

定理 3.3.4 数列

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots$$

から p 個づつ，数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \cdots$$

から q 個づつ交互に取ってできる数列を a_n とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{p}{q}$$

である．

[証明] 命題 3.3.3 から

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma + \log n + \varepsilon_n, \qquad lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

とおける．

$$T_m = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1}, \quad U_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2m}$$

とおくと

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}(\gamma + \log m + \varepsilon_m)$$

であり

$$T_m + U_m = \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} = \gamma + \log(2m) + \varepsilon_{2m}$$

だから

$$T_m = \frac{1}{2}\gamma + \log 2 + \frac{1}{2}\log m + \varepsilon_{2m} - \frac{1}{2}\varepsilon_m$$

となる．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおいて

$$S_{(p+q)m} = T_{pm} - U_{qm} = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q} + \varepsilon_{2pm} - \frac{1}{2}\varepsilon_{qm}$$

となる．よって

$$\lim_{m\to\infty} S_{(p+q)m} = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$$

となる．$(p+q)m < n < (p+q)(m+1)$ のとき

$$\begin{aligned}
|S_n - S_{(p+q)m}| &\leq \frac{1}{2pm+1} + \cdots + \frac{1}{2p(m+1)-1} \\
&\leq \frac{p}{2pm+1}, \\
|S_n - S_{(p+q)(m+1)}| &\leq \frac{1}{2qm+2} + \cdots + \frac{1}{2q(m+1)} \\
&\leq \frac{q}{2qm+2}
\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} S_{(p+q)m}$ となる．■

例 3.3.5 定理 3.3.4 で $p = q = 1$ として

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \log 2.$$

$p = 1, q = 2$ として

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = -\frac{1}{2}\log 2$$

となる．

第4章　完全微分

二変数 x, y の関数 $P(x, y)$ と $Q(x, y)$ に対して

$$dF = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{4.1}$$

となる x, y の関数 F を求めるには次のようにすればよい．まずこの様な F が存在するための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4.2}$$

が成り立つことである．これが成り立つとき，原点 $(0, 0)$ から点 (u, v) に至る曲線 C のパラメータ表示を

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (a \leq t \leq b)$$

とすると，C にそった線積分

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_C (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) \\ &= \int_a^b (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))\, dt \end{aligned}$$

は，曲線 C の選び方に依らない．こうして定義された関数 F は (4.1) を満たす．

第5章　微分方程式

5.1　変数分離形

変数分離形の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = X(x) \cdot Y(y)$$

を解くには

$$\frac{dy}{Y(y)} = X(x)dx$$

の両辺を積分すればよい．

5.2　同次形

同次形の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

を解くには，$y = ux$ として

$$f(u) = \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \qquad \therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \cdot (f(u) - u)$$

となり，変数分離形になる．よって

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \qquad \therefore \log x = \int \frac{du}{f(u) - u}$$

などとなる．

5.3　完全微分方程式

完全微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad \text{ただし } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5.1}$$

を解くには

$$dF = P(x,y)dx - Q(x,y)dy$$

なる x, y の関数 $F(x, y)$ を求めて（その求め方は 4 章に示してある），任意の定数 C をとって $F(x, y) = C$ とすればよい．x, y の関係式 $F(x, y) = C$ が微分方程式 (5.1) の解である．

5.4　1 階線形微分方程式

1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{5.2}$$

を解くには，まず $q(x) = 0$ の場合を考えて

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

を解く．これは変数分離形だから

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \qquad \therefore \log y = -\int p(x)dx + \text{積分定数}$$

$$\therefore y = C \cdot e^{-P(x)} \quad P(x) = \int p(x)dx \quad (C \text{ は任意の定数})$$

である．そこで (5.2) の解を求めるために $y = u \cdot e^{-P(x)}$ (u は x の関数) とおくと

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \frac{du}{dx} \cdot e^{-P(x)} - u \cdot p(x)e^{-P(x)} + p(x)u \cdot e^{-P(x)} = \frac{du}{dx} \cdot e^{-P(x)}$$

となるから，u は微分方程式

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-P(x)} = q(x) \qquad \therefore \frac{du}{dx} = q(x)e^{P(x)}$$

を満たしていればよい．よって

$$u = \int q(x)e^{P(x)}dx + C.$$

よって (5.2) の一般解は

$$y = \left(\int q(x)e^{P(x)}dx + C\right) \cdot e^{-P(x)}, \qquad \text{ただし } P(x) = \int p(x)dx$$

(C は任意の定数) となる．

5.5　定数係数 2 階線形微分方程式

定数係数 2 階線形微分方程式

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = Q(x) \tag{5.3}$$

($a \neq 0$) を解くには次の二段階に分けて考える；

1) まず何がしかの方法で (5.3) を満たす関数 $y = f_0(x)$ を一つ見つける．このような $f_0(x)$ を見つける一般的な方法は無い．

2) (5.3) で $Q(x)=0$ の場合の微分方程式

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \tag{5.4}$$

の一般解を求める．そのためには二次方程式

$$at^2+bt+c=0$$

の二つの解 $\alpha, \beta=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を用いる．ここで

i) $\alpha\neq\beta$ のとき

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x} \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

が (5.4) の一般解である．

ii) $\alpha=\beta$ のとき

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x} \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

が (5.4) の一般解である．実際，この場合 $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ だから

$$y=xe^{\alpha x}, \quad y'=e^{\alpha x}+\alpha xe^{\alpha x}, \quad y''=2\alpha e^{\alpha x}+\alpha^2xe^{\alpha x}$$

より

$$\begin{aligned} ay''+by'+cy &= e^{\alpha x}\left(2a\alpha+a\alpha^2x+b+b\alpha x+cx\right) \\ &= e^{\alpha x}\left[(2a\alpha+b)+(a\alpha^2+b\alpha+c)x\right]=0 \end{aligned}$$

となるから，$y=xe^{\alpha x}$ が (5.4) のもう一つの解となる．

3) (5.3) の一般解は

$$y=f_0(x)+\begin{cases} C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x} & :\alpha\neq\beta \text{ のとき}, \\ C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x} & :\alpha=\beta \text{ のとき} \end{cases}$$

である．

5.6 ベルヌイ型の微分方程式

ベルヌイ型の微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)y^{\alpha}=0$$

を解くには，$u = y^{1-\alpha}$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} &= (1-\alpha)y^{-\alpha}\left(-p(x)y - q(x)y^{\alpha}\right) \\ &= -(1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} - (1-\alpha)q(x)\end{aligned}$$

から

$$\frac{du}{dx} + (1-\alpha)p(x)u = (\alpha-1)q(x)$$

となるから，5.4 節の方法で u を求めて $y = u^{1/(1-\alpha)}$ から y を求めればよい．

第6章　多変数の積分

6.1　基本的な計算

$x-y$ 平面状の領域

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

上で定義された関数 $f(x,y)$ の D 上の積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ は

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

のように，それぞれの変数に関して順番に計算すればよい．

6.2　変数変換

$x-y$ 平面状の領域 Ω 上で定義された関数 $f(x,y)$ の積分

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

を計算するのに，次のような変数変換を用いることができる．

$$\begin{cases} x = \varphi(s,t) \\ y = \psi(s,t) \end{cases}$$

により，$x-y$ 平面状の領域 Ω と $s-t$ 平面状の領域 D が 1 対 1 に対応しているとする．このとき

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(s,t)} = \begin{vmatrix} \varphi_s & \varphi_t \\ \psi_s & \psi_t \end{vmatrix} = \varphi_s \cdot \psi_t - \varphi_t \cdot \psi_s$$

として

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_D f(\varphi(s,t),\psi(s,t)) \cdot \frac{D(\varphi,\psi)}{D(s,t)} dsdt$$

が成り立つ．