最低限の連分数

高瀬 幸一

ver.2024.4.11

目 次

1 Euclid の互除法

1.1 最大公約数

定義 1.1 整数 a, b $(b \neq 0)$ に対して

$$a = bc$$

となる整数 c が存在するとき，b は a を**割り切る**，a は b の**倍数**である，b は a の**約数**であるという．記号では $b|a$ と書く．

注意 1.2 1) 任意の整数 b $(b \neq 0)$ に対して $0 = 0 \cdot b$ だから，0 は全ての整数で割り切れる．

2) 任意の整数 c に対して $0 = 0 \cdot c$ だから，0 は 0 のみを割り切る．

定義 1.3 整数 a, b に対して

1) a, b の両方を割り切る整数を a, b の**公約数**と呼ぶ．

2) a, b の公約数のなかで最大のものを a, b の**最大公約数**と呼び，$\mathrm{GCD}\{a, b\}$ と表す[1]

注意 1.4 整数 a, b に対して

1) $a = b = 0$ の場合，注意 1.2 にある通り，0 は全ての整数で割り切れるから，$0, 0$ の公約数の全体とは全ての整数全体のことになり，最大のものは存在しない．即ち，$\mathrm{GCD}\{, 0\}$ は定義されない．

2) $a \neq 0, b = 0$ の場合，$\mathrm{GCD}\{a, 0\} = |a|$ である．

次の定理は，整数に関する様々な議論の出発点となるものである：

定理 1.5 (整数の剰余の定理) 整数 a, b $(b > 0)$ に対して

$$a = qb + r, \qquad 0 \leqq r < b$$

となる整数 q, r が唯一存在する．q を a を b で割ったときの**商**，r を a を b で割ったときの**余り**と呼ぶ．

[証明] <u>存在すること</u> 有理数 $\dfrac{a}{b}$ に対して

$$q \leqq \frac{a}{b} < q + 1$$

[1]最大公約数を英語で Greatest Common Divisor と呼ぶので，頭文字をとって GCD と書くのである．

となる整数 q が存在する．$r = a - qb \geqq 0$ は整数で

$$r = b\left(\frac{a}{b} - q\right) < b$$

となる．

<u>唯一であること</u>

$$a = qb + r = q'b + r', \qquad 0 \leqq r < b, \quad 0 \leqq r' < b$$

なる整数 q, q', r, r' があったとする．

$$|b(q - q')| = |r - r'| < b$$

だから $|q - q'| < 1$．$q - q'$ は整数だから，これは $q - q' = 0$ を意味する．即ち $q = q'$．よって $r = r'$ となる．■

整数の剰余の定理と最大公約数は次の定理によって結びついている：

定理 1.6 整数 a, b $(b > 0)$ に対して

$$a = qb + r, \qquad 0 \leqq r < b$$

なる整数 q, r をとると

$$\mathrm{GCD}\{a, b\} = \mathrm{GCD}\{b, r\}$$

である．

[証明] 整数 d $(d \neq 0)$ をとる．d が a, b の公約数とすると

$$a = da', \qquad b = db'$$

なる整数 a', b' が存在するが，このとき

$$r = a - qb = d(a' - qb')$$

となり，$a' - qb'$ は整数だから，d は r の約数となる．即ち d は b, r の公約数である．逆に d が b, r の公約数とすると

$$b = db', \qquad r = dr'$$

なる整数 b', r' が存在するが，このとき

$$a = qb + r = d(qb' + r')$$

となり，$qb' + r'$ は整数だから，d は a の約数となる．即ち d は a, b の公約数である．以上の事から，集合として

$$\{a, b \text{ の公約数 }\} = \{b, r \text{ の公約数 }\}$$

となるから，この中の最大の整数は等しい．即ち $\mathrm{GCD}\{a,b\}=\mathrm{GCD}\{b,r\}$ となる．■

<u>Euclid の互除法</u>

整数 a,b $(b>0)$ をとる．a を b で割った商を q_1, 余りを r_1 として

$$a=q_1b+r_1,\qquad 0<r_1<b$$

とする．b を r_1 で割った商を q_2，余りを r_2 として

$$b=q_2r_1+r_2,\qquad 0<r_2<r_1$$

とする．r_1 を r_2 で割った商を q_3, 余りを r_3 として，以下同様に

$$\begin{aligned}
r_1&=q_3r_2+r_3, &&0<r_3<r_2\\
r_2&=q_4r_3+r_4, &&0<r_4<r_3\\
&\vdots\\
r_{n-2}&=q_nr_{n-1}+r_n, &&0<r_n<r_{n-1}\\
r_{n-1}&=q_{n+1}r_n
\end{aligned}$$

とする．余りは

$$b>r_1>r_2>r_3>\cdots\geqq 0$$

という具合に，次々と小さくなるが，全体としては正またはゼロだから，いつかは余りがゼロとなる，即ち，割り切れることになる．

ここで定理 1.6 を用いると

$$\begin{aligned}
\mathrm{GCD}\{a,b\}&=\mathrm{GCD}\{b,r_1\}\\
&=\mathrm{GCD}\{r_1,r2\}\\
&=\mathrm{GCD}\{r_2,r_3\}\\
&=\cdots\\
&=\mathrm{GCD}\{r_{n-1},r_n\}=r_n
\end{aligned}$$

となる．即ち，最後の余り r_n が a,b の最大公約数となる．これを **Euclid の互除法**と呼ぶ.

例 1.7 $a=4389, b=1014$ として，Euclid の互除法を適用してみよう.

$$\begin{aligned}
a&=4\cdot b+333\\
b&=3\cdot 333+15\\
333&=22\cdot 15+3\\
15&=5\cdot 3
\end{aligned}$$

より $\mathrm{GCD}\{4389,1014\}=3$ である.

Euclid の互除法は整数の最大公約数を計算する手段として重要であるが，更に次の定理を証明するためにも重要である：

定理 1.8 整数 a, b に対して

$$A \cdot a + B \cdot b = \mathrm{GCD}\{a, b\}$$

なる整数 A, B が存在する．

[**証明**] 整数 a, b $(b > 0)$ に Euclid の互除法を用いて最大公約数 $\mathrm{GCD}\{a, b\}$ を求めると

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1, \qquad 0 < r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2, \qquad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \qquad 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 &= q_4 r_3 + r_4, \qquad 0 < r_4 < r_3 \\
&\ \vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, \qquad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n \qquad r_n = \mathrm{GCD}\{a, b\}
\end{aligned}$$

となる．このとき，最初の式から順番に

$$\begin{aligned}
r_1 &= a - q_1 b \\
r_2 &= b - q_2 r_1 = b - q_2(a - q_1 b) \\
&= (-q_2)a + (1 + q_2 q_1)b \\
r_3 &= r_1 - q_3 r_2 = a - q_1 b - q_3\{(-q_2)a + (1 + q_2 q_1)b\} \\
&= (1 + q_3 q_2)a + \{-q_1 - q_3(1 + q_2 q_1)\}b \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

と書き直していくと

$$r_n = A \cdot a + B \cdot b$$

なる整数 A, B が存在することが判る．ここで $r_n = \mathrm{GCD}\{a, b\}$ だから，定理が証明された．■

注意 1.9 定理 1.8 の証明をみると，a, b の最大公約数 $\mathrm{GCD}\{A, b\}$ を求めるために用いた Euclid の互除法の計算データから A, B の値を具体的に求めることができる事がわかる．

定理 1.8 から次の定理が導かれる：

定理 1.10 整数 a, b, c $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$ に対して

$$a|bc \quad \text{かつ} \quad \mathrm{GCD}\{a, b\} = 1$$

ならば $a|c$ である．

[証明] $\mathrm{GCD}\{a, b\} = 1$ だから，系**??** より

$$A \cdot a + B \cdot b = 1$$

なる整数 A, B が存在する．両辺に c をかけると

$$A \cdot ac + B \cdot bc = c$$

となるが，明らかに $a|ac$ であり，仮定から $a|bc$ だから $a|c$ となる．■

注意 1.11 条件 $\mathrm{GCD}\{a, b\} = 1$ がなければ，上の定理は成り立たない．例えば

$$a = 6, \qquad b = 15, \qquad c = 8$$

とすると，$bc = 120$ だから $a|bc$ であるが，a は b も c も割り切らない．

課題 1 105 の約数を全て求めよ．

課題 2 1) 385 と 105 の公約数を全て求めよ．

2) $\mathrm{GCD}\{385, 105\}$ を定義に基づいて求めよ．

課題 3 1) 4389 と 1014 の公約数を全て求めよ．

2) $\mathrm{GCD}\{4389, 1014\}$ を定義に基づいて求めよ．

課題 4 $a = 19561222, b = 19560124$ として，最大公約数 $\mathrm{GCD}\{a, b\}$ を Euclid の互除法を用いて求めよ．

課題 5 $a = 19561222, b = 19560124$ として

$$A \cdot a + B \cdot b = \mathrm{GCD}\{a, b\}$$

となる整数 A, B を求めよ．

1.2 素数

定義 1.12 1 より大きな整数 p の正の約数が p と 1 に限るとき，p を素数と呼ぶ．

例 1.13

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23$$

は全て素数である．

素数に関しては，次の性質が基本的に大切である：

定理 1.14 素数 p と整数 a, b に対して，$p|ab$ ならば $p|a$ または $p|b$ である．

[証明] $\mathrm{GCD}\{p, a\} = d$ とおく．d は素数 p の正の約数だから $d = p$ または $d = 1$ である．

$d = p$ ならば d は a の約数だから $p|a$ である．

$d = 1$ ならば $p|ab$ かつ $\mathrm{GCD}\{p, a\} = 1$ だから，定理 1.10 より $p|b$ である．■

系 1.15 素数 p と整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して，p が積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を割り切るならば，p は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ のいずれかを割り切る．

無理数の身近な例として，次の定理を証明しておく：

定理 1.16 素数 p に対して $\sqrt{p}$ は無理数である．

[証明] $\sqrt{p}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}, \qquad \mathrm{GCD}\{a, b\} = 1$$

(a, b は整数) と既約分数の形に書ける．両辺を二乗して b^2 をはらうと

$$b^2 p = a^2 \qquad \therefore\ \ p|a^2$$

となる．定理 1.14 より $p|a$ となるから，$a = p \cdot c$ (c は整数) とおくと

$$b^2 p = p^2 c^2 \qquad \therefore\ \ p \cdot c^2 = b^2$$

となり，$p|b^2$ となる．よって再び定理 1.14 より $p|b$ となる．即ち素数 p は a, b の公約数となるが，これは $\mathrm{GCD}\{a, b\} = 1$ に反する．よって $\sqrt{p}$ は有理数でない．■

課題 6 次の中から素数を全て見つけ出せ：

$$25, \quad 37, \quad 93, \quad 691$$

課題 7 100 以下の素数を全て求めよ．

1.3 素因数分解の一意性

いわゆる「素因数分解」とは,「任意の整数は素数の積としてただ一通りに書ける」というものだが，この言い方は精確ではない．精確には，次の二つの命題を言うのである：

1) 任意の 1 より大きな整数は素数の積として書ける，

2) 1 より大きな整数が素数の積として書けるとしたら，その書き方は積の順序を除いてただ一通りである．

ここで注意するべきことは

1) 第一の命題は，素数の積として何通りに書けるかは問題にしていないこと，

2) 第二の命題は，素数の積として書けるか否かは問題にしていないこと

の二点である．言い換えれば，一言で「素因数分解」と呼んでいるものは，実は互いに無関係な二つの命題からなっているということである．以下で，この二つの命題の証明を与える．

定理 1.17 任意の 1 より大きな整数は素数の積として書ける，

[証明] 1 より大きい整数 n をとる．n に関する数学的帰納法を用いて証明する．

i) $n = 2$ のとき．2 は素数だから，$n = 2$ は素数の積である．

ii) n より小さく 1 より大きな全ての整数は素数の積として書けると仮定する．n が素数ならば n は素数の積として書けている．n が素数でないとすると，n の正の約数 m で $m \neq n$ かつ $m \neq 1$ なるものが存在する．$n = ml$ なる整数 l をとれば

$$1 < m < n, \qquad 1 < l < n$$

である．帰納法の仮定から m, l は素数の積として書ける：

$$m = p_1 p_2 \cdots p_s, \quad l = q_1 q_2 \cdots q_t$$

(p_i, q_j は素数)．よって

$$n = ml = p_1 p_2 \cdots p_s q_1 q_2 \cdots q_t$$

となり，n も素数の積として書ける．■

定理 1.18 1 より大きな整数が素数の積として書けるとしたら，その書き方は積の順序を除いてただ一通りである．即ち，1 より大きな整数 n に対して

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t$$

(p_i, q_j は素数) ならば

1) $s=t$ かつ

2) 素数の番号を適当に付け直せば

$$p_1=q_1,\ \ p_2=q_2,\ \cdots,p_s=q_s$$

とできる．

[証明] まず

$$p_1\times p_2\cdots p_s=q_1q_2\cdots qt$$

だから，素数 p_1 は整数の積 $q_1q_2\cdots q_t$ を割り切る．よって系 1.15 より，p_1 は $q_1,q_2,\cdots,q_t$ のいずれかを割り切る．番号を付け直して p_1 は q_1 を割り切るとしてよい．すると p_1 は素数 q_1 の正の約数だから $p_1=1$ または $p_1=q_1$ である．一方 p_1 は素数だから $p_1\neq 1$．従って $p_1=q_1$ となり

$$p_2p_3\cdots p_s=q_2q_3\cdots q_t$$

となる．以下同様に繰り返すことができる．もしも $s<t$ とすると

$$1=q_{s+1}\cdots q_t$$

となり矛盾するから $s\geqq t$ である．同様に $s>t$ とすると矛盾するから $s\leqq t$ である．よって $s=t$ で，番号を付け直せば

$$p_2=q_2,\ p_3=q_3,\cdots,p_s=q_s$$

となる．■

定理 1.19 素数は無数に存在する．

[証明] 素数が有限個しか存在しないと仮定して，その全体を

$$p_1,\ \ p_2,\ \cdots,p_N$$

とする．整数

$$a=p_1p_2\cdots p_N+1$$

は 1 より大きな整数だから，定理 1.17 より素数の積となる．即ち a を割り切る素数 p が存在する．p は $p_1,p_2,\cdots,p_N$ のいずれかに等しいから，p は積 $p_1p_2\cdots p_N$ を割り切る．p は a も割り切るから，p は 1 の約数となるが，これは不可能である．よって背理法により素数は有限個ではない．■

素因数分解の一意性の応用として，次の定理を示そう：

定理 1.20 正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が有理数となる必要十分条件は m が平方数[2]なることである．

[証明] $\sqrt{m}$ が有理数であるとすると

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b}, \qquad \mathrm{GCD}\{a, b\} = 1$$

なる正の整数 a, b がとれる．従って $m \cdot b^2 = a^2$ である．m の素因数 p に対して，$p|a^2$ だから，定理 1.14 より $p|a$ である．即ち p は a の素因数だから，a^2 を素因数分解したときに p は偶数冪で現れる．一方 $\mathrm{GCD}\{a, b\} = 1$ だから，p は b の素因数となならない．従って素因数分解の一意性から m を素因数分解したとき p は偶数冪で現れる．よって m は平方数である．逆は明らか．■

課題 8 次のようにして素数の列 $\{p_n\}$ を作る：

1) $p_1 = 2$ とおく．

2) $p_1, p_2, \cdots, p_n$ が出来たら，整数

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

の最小の素因数を p_{n+1} とする．

p_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ の値を求めよ．

課題 9 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数であることを示せ．

2 実数を有理数で近似すること

2.1 有理数を有理数で近似する

以下では，有理数 $\dfrac{p}{q}$ と書いたら，$p, q \in \mathbb{Z}$ かつ $q > 0$ であるとする．

有理数 $\alpha = \dfrac{a}{b}$ をとる．有理数 $\dfrac{p}{q} \neq \alpha$ に対して

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - pb|}{qb}$$

であるが，$\alpha \neq \dfrac{p}{q}$ だから，$aq - pb \neq 0$ である．明らかに $aq - pb$ は整数だから $|aq - pb| \geq 1$ となる．よって

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{q}$$

となる．よって次の定理が示された：

[2]即ち $m = n^2$ となる整数 n が存在する．

定理 2.1 有理数 $\alpha \in \mathbb{Q}$ に対して，ある定数 $c(\alpha) > 0$ が定まり，任意の有理数 $\dfrac{p}{q} \neq \alpha$ に対して

$$q \cdot \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq c(\alpha)$$

となる．

注意 2.2 定理 2.1 で，有理数 $\alpha = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ に対して $c(\alpha) = \dfrac{1}{b}$ とおけばよいことが，定理の証明からわかる．

課題 10 有理数 $\alpha = \dfrac{1463}{338}$ に対して

$$c(\alpha) = \frac{1}{338} = 0,0029\cdots$$

である．有理数 $\dfrac{p}{q} \neq \alpha$ で $q \cdot \left| \alpha - \dfrac{p}{q} \right|$ が $c(\alpha)$ に出来るだけ近いものを探せ．

2.2 自然対数の底が無理数であること

ここで特殊な実数として自然対数の底に注目する．即ち

定理 2.3 $e = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は収束して

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

である．e を自然対数に底あるいは **Napier(ネピエ)** の数と呼ぶ．

まず次の補題を証明しておく：

補題 2.4 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ は収束して $2 < \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 3$ である．

[証明] $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ とおく．数列 $\{S_n\}$ は明らかに単調増大数列である:

$$S_0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_n < S_{n+1} < \cdots.$$

一方，$k \geq 2$ に対して

$$k! = k(k-1)\cdots 2 > 2^{k-1} \qquad \therefore \quad \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

だから，$n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &< 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

となる．即ち，数列 $\{S_n\}$ は単調増大かつ上に有界だから，$\lim_{n\to\infty} S_n$ は収束する．∎

この補題を用いて，定理 2.3 は次のように証明される．

まず

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおいて，右辺に二項定理を用いると

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

となる．上の式で n を $n+1$ に替えると，和の各項は大きくなり，しかも和の項数が増えるのだから $a_n < a_{n+1}$ である．

一方，(2.1) で

$$1-\frac{1}{n}, \quad 1-\frac{2}{n}, \cdots, 1-\frac{k-1}{n}$$

は全て 1 より小さいから，これらを 1 で置き換えると，補題 2.4 から

$$a_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < 3 \tag{2.2}$$

となる．即ち，数列 $\{a_n\}$ は単調増大かつ上に有界となるから，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は収束する．更に (2.2) より

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

となる．さて，自然数 m, n を $n \geq m$ にとると，(**??**) から

$$a_n \geq 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

である．ここで $n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

となり，更に $m \to \infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{2.3}$$

を得る．よって定理 2.3 が示された．

命題 2.5 任意の実数 $a > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ である．

[証明] $N \geq a$ なる整数 N をとると，任意の $n > N$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{N} \cdot \frac{a}{N+1} \cdots \frac{a}{n} \\ &\leq \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{N} \cdot \left(\frac{a}{N+1}\right)^{n-N}\end{aligned}$$

となる．$0 < \dfrac{a}{N+1} < 1$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{N+1}\right)^{n-N} = 0$．従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ となる．■

上の命題は，$n!$ が $n \to \infty$ のときに，急速に増大することを示している．従って定理 2.3 示した等式

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

の部分和をとって e の近似値を効率的に求めることができる．精密には

命題 2.6 次の不等式が成り立つ：

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| < \frac{2}{(n+1)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

[証明] 定理 2.3 より

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}&\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} \cdots \\ =&\frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots\right\} \\ <&\frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right\} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{(n+1)!}\end{aligned}$$

となる．■

この命題と定理 2.1 を用いて，次の定理が示される：

定理 2.7 自然対数の底 e は無理数である．

[証明] e が有理数とすると，定理 2.1 より，正の定数 $c(e)$ が定まって，任意の有理数 $\dfrac{p}{q} \neq e$ に対して

$$q \cdot \left| e - \frac{p}{q} \right| \geq c(e) \tag{2.4}$$

となる．ここで

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{p_n}{q_n} \qquad (q_n = n!)$$

とおくと，命題 2.6 より

$$q_n \cdot \left| e - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{2q_n}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

となる．よって (2.4) より

$$0 < c(e) \leq q_n \cdot \left| e - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{2}{n+1}$$

となるが，これは $n \to \infty$ のときに矛盾する．よって e は有理数ではない．■

注意 2.8 自然対数の底 e が無理数であることは，通常，指数関数 e^x の MacLaurin 展開を用いて証明する．以下にその証明を示しておく：
[証明] e が有理数であると仮定して $e = \dfrac{p}{q}$ とおく．指数関数 e^x に MacLaurin の定理を用いて，任意の x と n に対して

$$e^x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

となる $0 < \theta < 1$ が存在する．$x = 1, n = q$ として

$$e = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(q+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

となる．両辺に $q!$ を掛けて

$$p(q-1)! = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \frac{e^{\theta}}{q+1}$$

だから $\dfrac{e^{\theta}}{q+1}$ は整数である．一方，$2 < e < 3, q \geq 1$ だから

$$0 < \frac{e^{\theta}}{q+1} < \frac{e}{q+1} < \frac{3}{2}$$

だから $\dfrac{e^{\theta}}{q+1} = 1$ よって $e^{\theta} = q+1$ は整数である．ここで

$$1 < e^{\theta} < e < 3$$

だから $e^{\theta} = 2$，よって $q = 1$ となる．よって $e = p$ は整数となるが，$2 < e < 3$ だから，これは矛盾である．よって e は有理数ではない．■

課題 11 命題 2.6 の不等式を用いて，自然対数の底 e の近似値を小数点以下 6 桁まで正確に求めよ．

2.3 無理数を有理数で近似する

実数 x に対して，x 以下の最大の整数を $[x]$ と表し[3]，$\{x\} = x - [x]$ とおく．即ち

$$x = [x] + \{x\}, \qquad [x] : \text{整数}, \quad 0 \leq \{x\} < 1$$

である．

定理 2.9 任意の実数 α と任意の整数 $Q > 1$ に対して

$$q \cdot \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Q} \ \text{かつ} \ 0 < q \leq Q$$

なる有理数 $\dfrac{p}{q}$ が存在する．

[証明] 区間 $[0,1) = \{0 \leq x < 1\}$ にある $Q+1$ 個の数

$$0, \ \{\alpha\}, \ \{2\alpha\}, \cdots, \{(Q-1)\alpha\}, \ \{Q\alpha\} \tag{2.5}$$

を考える．区間 $[0,1)$ を Q 等分すると，Q 個の区間

$$\left[0, \frac{1}{Q}\right), \ \left[\frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}\right), \cdots, \left[\frac{Q-2}{Q}, \frac{Q-1}{Q}\right), \ \left[\frac{Q-1}{Q}, 1\right)$$

に $Q+1$ の数 (2.5) が分配される．従って，少なくとも二つは同じ小区間に属する．即ち

$$|\{l\alpha\} - \{k\alpha\}| < \frac{1}{Q}$$

なる $0 < k < l \leq Q$，または

$$\{l\alpha\} < \frac{1}{Q}$$

なる $0 < l \leq Q$ が存在する．第一の場合には

$$q = l - k, \quad p = [l\alpha] - [k\alpha]$$

とおくと

$$q \cdot \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = |(l-k)\alpha - ([l\alpha] - [k\alpha])| = |\{l\alpha\} - \{k\alpha\}| < \frac{1}{Q}$$

となる．第二の場合には

$$q = l, \quad p = [l\alpha]$$

[3] $[x]$ を **Gauss** の記号と呼ぶ．

とおくと

$$q \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = |l\alpha - [l\alpha]| = \{l\alpha\} < \frac{1}{Q}$$

となる．■

定理 2.10 無理数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$q^2 \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$$

なる有理数 $\dfrac{p}{q}$ が無限個存在する．

[**証明**] その様な有理数が有限個しかないと仮定して，その全体を

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots, \frac{p_N}{q_N} \tag{2.6}$$

とする．$\rho = \mathrm{Min}_{1 \leq i \leq N} |q_i\alpha - p_i|$ とおいて $Q > \dfrac{1}{\rho}$ なる整数 Q をとる．定理 2.9 より

$$q \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Q} \quad \text{かつ} \quad 0 < q \leq Q$$

なる有理数 $\dfrac{p}{q}$ が存在する．このとき

$$q^2 \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{q}{Q} \leq 1$$

となるから，$\dfrac{p}{q}$ は (2.6) の内の一つとなるが

$$|q\alpha - p| = q \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Q} < \rho$$

となり，ρ の定義に反する．■

課題 12 $q^2 \left|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}\right| < 1$ なる有理数 $\dfrac{p}{q}$ を 5 個見つけよ．

課題 13 $q^2 \left|\sqrt{3} - \dfrac{p}{q}\right| < 1$ なる有理数 $\dfrac{p}{q}$ を 5 個つけよ．

課題 14 課題 11 の結果を用いて，自然対数の底 e に関して

$$q^2 \left|e - \frac{p}{q}\right| < 1$$

なる有理数 $\dfrac{p}{q}$ を 4 個見つけよ．

3 連分数

3.1 連分数の定義と基本的な性質

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

の形の分数を**連分数**と呼び，簡潔に

(3.7) $$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}$$

と表す．以下では特に $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 1$ の場合

(3.8) $$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

を詳しく調べる．と書く．

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_0}{1}, \\ a_0 + \frac{1}{a_1} &= \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \\ a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} &= a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} \\ &= \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} \end{aligned}$$

である．一般に連分数 (3.8) に対して，漸化式

(3.9) $$\begin{array}{lll} p_{-1} = 1, & p_0 = a_0, & p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_{-1} = 0, & q_0 = 1, & q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{array} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

により $\{p_n\}, \{q_n\}$ を定義すると

(3.10) $$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

となる．

[証明] $n = 0, 1$ のときには $p_0 = a_0, q_0 = 1$,

$$p_1 = a_0 a_1 + 1 = a_1 p_0 + p_{-1}, \qquad q_1 = a_1 = a_1 q_0 + q_{-1}$$

だから漸化式は成り立つ．$n \geq 1$ のときに成り立つと仮定すると

$$a_0 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

だから

$$\begin{aligned}
&a_0 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \\
=&a_0 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b_n} \qquad \left(b_n = \frac{a_n a_{n+1} + 1}{a_{n+1}}\right) \\
=&\frac{b_n p_{n-1} + p_{n-2}}{b_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\
=&\frac{(a_n a_{n+1} + 1)\, p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{(a_n a_{n+1} + 1)\, q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} \\
=&\frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}
\end{aligned}$$

となり，$n+1$ のときにも成り立つ．■

更に次の命題が成り立つ：

命題 3.1 (3.10) について

1) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

2) $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

[証明] 1) 漸化式 (3.9) より

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a_n p_{n-1} + p_{n-2} & p_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} & q_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= a_n \cdot \det \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-1} \\ q_{n-1} & q_{n-1} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots \\
&= (-1)^n \det \begin{bmatrix} p_0 & p_{-1} \\ q_0 & q_{-1} \end{bmatrix} = (-1)^n \det \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

2) 漸化式 (3.9) と 1) より

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} p_n & p_{n-2} \\ q_n & q_{n-2} \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a_n p_{n-1} + p_{n-2} & p_{n-2} \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} & q_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= a_n \cdot \det \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} p_{n-2} & p_{n-2} \\ q_{n-2} & q_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= a_n \cdot (-1)^n
\end{aligned}$$

となる．■

連分数 (3.8) で，a_0 が整数かつ a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots, n)$ が全て正の整数であるとき，連分数 (3.8) を**整連分数**と呼ぶ．このとき p_n, q_n は整数となり，漸化式 (3.9) より $q_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ である．また命題 3.1 の 1) より $\mathrm{GCD}\{p_n, q_n\} = 1$ である．即ち

$$a_0 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

は整連分数 (3.8) の既約分数表示を与える．更に命題 3.1 より

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}, \qquad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}} \tag{3.11}$$

$(n = 2, 3, 4, \cdots)$ となるから

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \tag{3.12}$$

となる．

命題 3.2 任意の整数 a_0 と任意の正整数 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ は収束する．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots$$

を**無限連分数**と呼ぶ.

[証明] (3.12) より，数列 $\left\{\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right\}$ は単調増大かつ上に有界，数列 $\left\{\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right\}$ は単調減少かつ下に有界だから，それぞれ

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}}, \qquad \beta = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$$

は収束する．ここで (3.11) の第一の等式から

$$\left| \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \right| = \frac{1}{q_{2n} q_{2n-1}}$$

であるが，漸化式 (3.9) より $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ だから

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \right| = 0$$

となる．よって $\alpha = \beta$ となり，$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ は収束する．■

例 3.3 無限整連分数

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots$$

は収束する．その値を α とすると

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \qquad \therefore \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

となる．明らかに $\alpha > 0$ だから $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．よって

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots$$

となる．

課題 15 $\det \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = xw - yz$ に関して，次の性質を示せ：

1) $\det \begin{bmatrix} x+x' & y \\ z+z' & w \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x' & y \\ z' & w \end{bmatrix}$,

2) $\det \begin{bmatrix} ax & y \\ az & w \end{bmatrix} = a \cdot \det \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$,

3) $\det \begin{bmatrix} y & x \\ w & z \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.

課題 16 連分数 (3.7) に対して，漸化式

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, & p_0 &= a_0, & p_k &= a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2}, \\ q_{-1} &= 0, & q_0 &= 1, & q_k &= a_k q_{k-1} + b_k q_{k-2} \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots). \tag{3.13}$$

により $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ を定義すると

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

となることを示せ．

3.2 有理数の整連分数展開

有理数 α を既約分数に表して

$$\alpha = \frac{a}{b}, \qquad a, b : \text{整数}, \quad b > 0, \text{ かつ } \mathrm{GCD}\{a, b\} = 1$$

とおく．a, b に Euclid の互除法を用いて

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1, \qquad 0 < r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2, \qquad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \qquad 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 &= q_4 r_3 + r_4, \qquad 0 < r_4 < r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, \qquad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n \qquad r_n = \mathrm{GCD}\{a, b\} = 1
\end{aligned}$$

とする．このとき

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{b/r_1}, \\
\frac{b}{r_1} &= q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{r_1/r_2}, \\
\frac{r_1}{r_2} &= q_3 + \frac{r_3}{r_2} = q_3 + \frac{1}{r_2/r_3}, \\
&\cdots\cdots \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_n + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_n + \frac{1}{q_{n+1}}
\end{aligned}$$

となる．これをまとめると，有理数 $\alpha = \dfrac{a}{b}$ の連分数展開

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_{n+1}}$$

が得られる．よって次の定理が示された：

定理 3.4 1) 任意の有限整連分数は有理数を表す.

2) 任意の有理数は有限整連分数で表される.

よって

系 3.5 任意の無限整連分数は無理数を表す.

課題 17 1) 有理数 $\alpha = \dfrac{1463}{338}$ の連分数展開を求めよ.

2) 上で求めた連分数の部分分数 $\dfrac{p_0}{q_0}, \dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}$ を求めて

$$q_n \cdot \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \qquad (n = 0, 1, 2) \qquad と \qquad c(\alpha) = \frac{1}{338} = 0.0029\cdots$$

を比較せよ.

3.3 無理数の整連分数展開

実数 α は無理数であるとする．一般に実数 x 以下の最大の整数を $[x]$ で表して $\{x\} = x - [x]$ とおくと

$$x = [x] + \{x\}, \qquad [x] : \text{整数}, \quad 0 \leq \{x\} < 1$$

となる．そこで

$$\begin{aligned}
\alpha &= [\alpha] + \{\alpha\} = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1}, \qquad \alpha_1 = \{\alpha\}^{-1}, \\
\alpha_1 &= [\alpha_1] + \{\alpha_1\} = [\alpha_1] + \frac{1}{\alpha_2}, \qquad \alpha_2 = \{\alpha_1\}^{-1}, \\
\alpha_2 &= [\alpha_2] + \{\alpha_2\} = [\alpha_2] + \frac{1}{\alpha_3}, \qquad \alpha_3 = \{\alpha_2\}^{-1}, \\
&\cdots\cdots \\
\alpha_n &= [\alpha_n] + \{\alpha_n\} = [\alpha_n] + \frac{1}{\alpha_{n+1}}, \qquad \alpha_{n+1} = \{\alpha_n\}^{-1}, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

となる．ここで α は無理数と仮定したから

$$0 < \{\alpha_n\} < 1 \qquad \therefore \quad \alpha_{n+1} = \{\alpha_n\}^{-1} > 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となり，$[\alpha_n]$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は正の整数である．ここで上の式を書き直すと

$$\begin{aligned}
\alpha =&[\alpha] + \frac{1}{\alpha_1} \\
=&[\alpha] + \cfrac{1}{[\alpha_1] + \frac{1}{\alpha_2}} \\
=&[\alpha] + \cfrac{1}{[\alpha_1] + \frac{1}{[\alpha_2] + \frac{1}{\alpha_3}}} \\
=&[\alpha] + \frac{1}{[\alpha_1]} + \frac{1}{[\alpha_2]} + \frac{1}{\alpha_3}
\end{aligned}$$

となり，同様に続けると

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{[\alpha_1]} + \frac{1}{[\alpha_2]} + \frac{1}{[\alpha_3]} + \cdots + \frac{1}{[\alpha_n]} + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \tag{3.14}$$

となる．ここから無限整連分数

$$[\alpha] + \frac{1}{[\alpha_1]} + \frac{1}{[\alpha_2]} + \frac{1}{[\alpha_3]} + \cdots + \frac{1}{[\alpha_n]} + \cdots$$

が得られて，命題 3.2 より，収束する．このとき

定理 3.6 任意の無理数 α に対して

$$[\alpha] + \frac{1}{[\alpha_1]} + \frac{1}{[\alpha_2]} + \cdots + \frac{1}{[\alpha_n]} = \frac{p_n}{q_n} \qquad \mathrm{GCD}\{p_n, q_n\} = 1$$

とおくと

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \tag{3.15}$$

となる．特に

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{[\alpha_1]+}\frac{1}{[\alpha_2]+}\frac{1}{[\alpha_3]+}\cdots+\frac{1}{[\alpha_n]+}\cdots$$

である．

[証明] $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$[\alpha] + \frac{1}{[\alpha_1]+}\frac{1}{[\alpha_2]+}\frac{1}{[\alpha_3]+}\cdots+\frac{1}{[\alpha_n]} = \frac{p_n}{q_n}$$

とおくと[4]

$$\begin{aligned}\alpha &= [\alpha] + \frac{1}{[\alpha_1]+}\frac{1}{[\alpha_2]+}\frac{1}{[\alpha_3]+}\cdots+\frac{1}{[\alpha_n]+}\frac{1}{[\alpha_{n+1}]+}\frac{1}{\alpha_{n+2}} \\ &= \frac{\alpha_{n+2}p_{n+1}+p_n}{\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n}\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\alpha - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+2}p_{n+1}+p_n}{\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{(\alpha_{n+2}p_{n+1}+p_n)q_n - p_n(\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n)}{(\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n)q_n} \\ &= \frac{\alpha_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1})}{(\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n)q_n} \\ &= \frac{(-1)^n\alpha_{n+2}}{(\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n)q_n} \\ &= \frac{(-1)^n}{q_n(q_{n+1}+q_n/\alpha_{n+2})}\end{aligned}$$

となる．よって

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n/\alpha_{n+2})} < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

となる．ここで $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = 0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = \alpha$$

となる．■

[4] このとき p_n, q_n は漸化式 (3.13) により与えられる．

上の定理から，無理数 α の無限整連分数展開

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{[\alpha_1]} + \frac{1}{[\alpha_2]} + \frac{1}{[\alpha_3]} + \cdots + \frac{1}{[\alpha_n]} + \cdots$$

に対して，部分整連分数を既約分数として

$$[\alpha] + \frac{1}{[\alpha_1]} + \frac{1}{[\alpha_2]} + \frac{1}{[\alpha_3]} + \cdots + \frac{1}{[\alpha_n]} = \frac{p_n}{q_n} \qquad \mathrm{GCD}\{p_n, q_n\} = 1$$

と書いたとき，既約分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ を無理数 α の**第 n 近似分数**と呼ぶ．

次の定理は定理 2.10 との関係で興味深い：

定理 3.7 無理数 α の第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ に対して

$$q_n^2 \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である．

[証明] 定理 3.6 の評価式 (3.15) で，$q_n < q_{n+1}$ だから

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

となる．■

例 3.8 無理数 $\alpha = \sqrt{2} = 1.414\cdots$ に

$$[\alpha] = 1, \qquad \{\alpha\} = \sqrt{2} - 1,$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 \qquad \therefore\ [\alpha_1] = 2, \qquad \{\alpha_1\} = \sqrt{2} - 1, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

よって $\sqrt{2}$ の無限連分数展開は

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

となる．

課題 18 例 3.8 で与えた $\sqrt{2}$ の無限連分数展開から，$\sqrt{2}$ の近似分数 $\dfrac{p_1}{q_1}$, $\dfrac{p_2}{q_2}$, $\dfrac{p_3}{q_3}$, $\dfrac{p_4}{q_4}$, $\dfrac{p_5}{q_5}$ を求めよ．

課題 19 1) $\sqrt{3}$ の無限連分数展開を求めよ．

2) $\sqrt{3}$ の近似分数 $\dfrac{p_1}{q_1}$, $\dfrac{p_2}{q_2}$, $\dfrac{p_3}{q_3}$, $\dfrac{p_4}{q_4}$, $\dfrac{p_5}{q_5}$ を求めよ．

課題 20 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の連分数展開を，出来るだけ長く求めよ．

3.4　無理数の最良近似分数

無理数 α の整連分数展開

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{+ a_{n-1} +} \frac{1}{a_n +} \frac{1}{a_{n+1} +} \cdots$$

から α の第 n 近似分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{+ a_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

が定まった．ここで

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} +} \frac{1}{a_{n+2} +} \frac{1}{a_{n+3} +} \cdots \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおくと

$$\begin{aligned}\alpha =& a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{+ a_{n-1} +} \frac{1}{\alpha_n} \\ =& \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\alpha - \frac{p_n}{q_n} =& \frac{\alpha_{n+2} p_{n+1} + p_n}{\alpha_{n+2} q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} \\ =& \frac{(\alpha_{n+2} p_{n+1} + p_n) q_n - (\alpha_{n+2} q_{n+1} + q_n) p_n}{(\alpha_{n+2} q_{n+1} + q_n) q_n} \\ =& \frac{\alpha_{n+2}(p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n)}{(\alpha_{n+2} q_{n+1} + q_n) q_n} \\ =& \frac{(-1)^n \alpha_{n+2}}{(\alpha_{n+2} q_{n+1} + q_n) q_n} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)\end{aligned}$$

となる[5]．即ち

(3.16)
$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(q_{n+1} + q_n/\alpha_{n+2})} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

となる．よって

(3.17)
$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n/\alpha_{n+2})} < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

となる．$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ だから，上の式は無理数 α の連分数展開から得られる第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ が，無理数 α のかなり良い近似を与える有理数であることを示している．

次の定理は，連分数から生じる近似分数が最良の近似値を与える有理数であることを示す：

[5] (3.13) より $p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n = (-1)^n$ である．

定理 3.9 無理数 α の第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ に対して，

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n} \quad \text{かつ} \quad 0<q<q_{n+1}$$

なる任意の有理数 $\dfrac{p}{q}$ ついて

$$|q\alpha - p| > |q_n\alpha - p_n|$$

である．

[証明] $\underline{q \neq q_n \text{ の場合.}}$ 連立方程式

$$\begin{cases} p_n c + p_{n+1} d &= p, \\ q_n c + q_{n+1} d &= q \end{cases}$$

を解くと，命題 3.1 の 1) より

$$\begin{aligned} c &= \frac{p_{n+1}q - q_{n+1}p}{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}} = (-1)^n \left(p_{n+1}q - q_{n+1}p\right), \\ d &= \frac{q_n p - p_n q}{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}} = (-1)^n \left(q_n p - p_n q\right) \end{aligned}$$

だから，c,d は共に整数である．$\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_n}{q_n}$ だから $d \neq 0$ である．$c=0$ とすると $q_{n+1}d = q$ となるが $0<q<q_{n+1}$ だから

$$0 < q_{n+1}d < q_{n+1} \qquad \therefore \quad 0<d<1$$

となり矛盾する．よって $c \neq 0$ である．更に c,d が同符号だとすると

$$q_n>0, \quad q_{n+1}>0 \quad \text{かつ} \quad q_n c + p_n d = q > 0$$

だから $c>0$ かつ $d>0$ である．よって $c \geq 1, d \geq 1$ だから

$$\therefore \quad q = q_n c + q_{n+1} d \geq q_n + q_{n+1} > q_{n+1}$$

となり，仮定 $0<q<q_{n+1}$ に反する．よって c,d は異符号である．一方 (3.16) より

$$q_n\alpha - p_n = \frac{(-1)^n}{q_{n+1} + q_n/\alpha_{n+2}} \qquad (n=1,2,3\cdots)$$

だから，$q_n\alpha - p_n$ と $q_{n+1}\alpha - p_{n+1}$ は異符号である．よって $c\left(q_n\alpha - p_n\right)$ と $d\left(q_{n+1}\alpha - p_{n+1}\right)$ は同符号となり

$$\begin{aligned} |q\alpha - p| &= \left|\left(q_n c + q_{n+1} d\right)\alpha - \left(p_n c + p_{n+1} d\right)\right| \\ &= \left|c\left(q_n\alpha - p_n\right) + d\left(q_{n+1}\alpha - p_{n+1}\right)\right| \\ &= \left|c\left(q_n\alpha - p_n\right)\right| + \left|d\left(q_{n+1}\alpha - p_{n+1}\right)\right| \\ &> |c| \cdot |q_n\alpha - p_n| \geq |q_n\alpha - p_n| \end{aligned}$$

となる．

<u>$q = q_n$ の場合．</u> $p \neq p_n$ である．不等式 (3.15) で $1 \leq q_n < q_{n+1}$ だから $q_{n+1} \geq 2$，従って

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \qquad \therefore\ 2|q_n\alpha - p_n| < 1$$

となる．よって

$$1 \leq |p_n - p| = |(q\alpha - p) - (q_n\alpha - p_n)| \leq |q\alpha - p| + |q_n\alpha - p_n|\,.$$

と $|p_n - p| \geq 1$ より

$$|q\alpha - p| - |q_n\alpha - p_n| \geq |p_n - p| - 2\,|q_n\alpha - p_n| > 0,$$

従って $|q\alpha - p| > |q_n\alpha - p_n|$ となる．■

系 3.10 無理数 α の第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n} \text{ かつ } 0 < q \leq q_n$$

なる任意の有理数 $\dfrac{p}{q}$ について

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

である．

[証明] $0 < q \leq q_n$ だから，定理 3.9 より

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|q\alpha - p|}{q} > \frac{|q_n\alpha - p_n|}{q} \geq \frac{|q_n\alpha - p_n|}{q_n} = \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

となる．■

定理 3.7 の部分的な逆が次の定理のように成り立つ：

定理 3.11 無理数 α に対して

$$q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2} \text{ かつ } \mathrm{GCD}\{p, q\} = 1$$

なる有理数 $\dfrac{p}{q}$ に対して，$q_n \leq q < q_{n+1}$ なる α の近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ をとると $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_n}{q_n}$ である．

[証明] $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_n}{q_n}$ と仮定すると $p_n q - q_n p \neq 0$ だから

$$\begin{aligned} 1 \leq |p_n q - q_n p| &= |q_n (q\alpha - p) - q (q_n \alpha - p_n)| \\ &\leq q_n |q\alpha - p| + q |q_n \alpha - p_n| \\ &< \frac{q_n}{2q} + q |q_n \alpha - p_n| \end{aligned}$$

となる．$q_n \leq q$ より $\dfrac{q_n}{2q} \leq \dfrac{1}{2}$ だから

$$|q_n \alpha - p_n| > \frac{1}{q}\left(1 - \frac{q_n}{2q}\right) \geq \frac{1}{2q} > |q\alpha - p|$$

となる．これは定理 3.9 に反する．よって $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_n}{q_n}$ である．■

注意 3.12 (3.17) より，無理数 α の第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ に対して

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

である．ここで $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} > a_{n+1} q_n$ だから

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2} \qquad \therefore \quad q_n^2 \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}}$$

となる．a_{n+1} は正の整数だから $a_{n+1} \geq 1$ であるが，$a_{n+1} > 1$ ならば

$$q_n^2 \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2}$$

となる．

例 3.13 $\sqrt{2}$ の無限整連分数展開は

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} \, \frac{1}{+ 2} \, \frac{1}{+ 2} + \cdots$$

だから，$a_n = 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ である．よって $\sqrt{2}$ の第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ に対して

$$q_n^2 \left|\sqrt{2} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である．

課題 21 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の連分数展開

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1} \, \frac{1}{+ 1} \, \frac{1}{+ 1} + \cdots$$

の第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ に対して

1) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}\right), \quad q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

であることを示せ.

2) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$q_n^2 \cdot \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left| 1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} \right| \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \cdots)$$

であることを示せ.

3) $q_n^2 \cdot \left| \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p_n}{q_n} \right| < \dfrac{1}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ となることを示せ.

3.5 自然対数の底の連分数展開

自然対数の底 e の連分数展開を求めるために，幾つか準備をする．まず t の多項式 $f_n(t)$ $(n = -1, 0, 1, 2, \cdots)$ を

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{m!} \cdot t^m (t-1)^m & : n = 3m-2 \quad (m = 1, 2, 3, \cdots), \\ \dfrac{1}{m!} \cdot t^m (t-1)^{m+1} & : n = 3m-1 \quad (m = 0, 1, 2, \cdots), \\ \dfrac{1}{m!} \cdot t^{m+1} (t-1)^m & : n = 3m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

により定義して

$$p_n = \int_0^\infty e^{-t} f_n(t+1) dt, \quad q_n = \int_0^\infty e^{-t} f_n(t) dt \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

とおくと，次の補題が成り立つ：

補題 3.14 1) $p_{-1} = 1$, $p_0 = 2$, $q_{-1} = 0$, $q_{-1} = 1$.

2) $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して漸化式

$$p_{3m-2} = p_{3m-3} + p_{3m-4}, \qquad q_{3m-2} = q_{3m-3} + q_{3m-4},$$

$$p_{3m-1} = 2m \cdot p_{3m-2} + p_{3m-3}, \qquad q_{3m-1} = 2m \cdot q_{3m-2} + q_{3m-3},$$

$$p_{3m} = p_{3m-1} + p_{3m-2}, \qquad q_{3m} = q_{3m-1} + q_{3m-2}$$

が成り立つ.

[証明] 1) t の多項式 $f(t)$ に対して，部分積分により

$$\int_0^\infty e^{-t}f(t)dt = \left[-e^{-t}f(t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}f'(t)dt$$
$$= f(0) + \int_0^\infty e^{-t}f'(t)dt = \sum_{k=0}^\infty f^{(k)}(0)$$

である．$f_{-1}(t) = t-1$, $f_{-1}(t+1) = t$ 及び $f_0(t) = t$, $f_0(t+1) = t+1$ だから

$$p_{-1} = 1, \quad q_{-1} = 0, \qquad p_0 = 2, \quad q_0 = 1$$

となる．

2) $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$\frac{1}{m!}\frac{d}{dt}\left\{e^{-t}t^m(t-1)^m\right\}$$
$$= \frac{e^{-t}}{m!}\left\{-t^m(t-1)^m + mt^{m-1}(t-1)^m + mt^m(t-1)^{m-1}\right\}$$
$$= -e^{-t}f_{3m-2}(t) + e^{-t}f_{3m-3}(t) + e^{-t}f_{3m-4}(t)$$

だから

$$\frac{1}{m!}\frac{d}{dt}\left\{e^{-t}(t+1)^m t^m\right\}$$
$$= -e^{-t}f_{3m-2}(t+1) + e^{-t}f_{3m-3}(t+1) + e^{-t}f_{3m-4}(t+1)$$

となる．よって

$$p_{3m-3} + p_{3m-4} - p_{3m-2} = \left[\frac{e^{-t}}{m!}(t+1)^m t^m\right]_0^\infty = 0,$$
$$q_{3m-3} + q_{3m-4} - q_{3m-2} = \left[\frac{e^{-t}}{m!}t^m(t-1)^m\right]_0^\infty = 0$$

となる．また

$$\frac{1}{m!}\frac{d}{dt}\left\{e^{-t}t^{m+1}(t-1)^m\right\}$$
$$= \frac{e^{-t}}{m!}\left\{-t^{m+1}(t-1)^m + (m+1)t^m(t-1)^m + mt^{m+1}(t-1)^{m-1}\right\}$$
$$= \frac{e^{-t}}{m!}\left\{-t^{m+1}(t-1)^m + t^m(t-1)^m + 2mt^m(t-1)^m + mt^m(t-1)^{m-1}\right\}$$
$$= \frac{e^{-t}}{m!}\left\{-t^m(t-1)^{m+1} + 2mt^m(t-1)^m + mt^m(t-1)^{m-1}\right\}$$
$$= -e^{-t}f_{3m-1}(t) + 2m\cdot e^{-t}f_{3m-2}(t) + e^{-t}f_{3m-3}(t)$$

だから

$$\frac{1}{m!}\frac{d}{dt}\left\{e^{-t}(t+1)^{m+1}t^m\right\}$$
$$= -e^{-t}f_{3m-1}(t+1) + 2m\cdot e^{-t}f_{3m-2}(t+1) + e^{-t}f_{3m-3}(t+1)$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
2m\cdot p_{3m-2}+p_{3m-3}-p_{3m-1}&=\left[\frac{e^{-t}}{m!}(t+1)^{m+1}t^m\right]_0^\infty=0,\\
2m\cdot q_{3m-2}+q_{3m-3}-q_{3m-1}&=\left[\frac{e^{-t}}{m!}t^{m+1}(t-1)^m\right]_0^\infty=0
\end{aligned}
$$

となる．また

$$
\begin{aligned}
f_{3m-1}(t)+f_{3m-2}(t)&=\frac{1}{m!}\left\{t^m(t-1)^{m+1}+t^m(t-1)^m\right\}\\
&=\frac{1}{m!}t^{m+1}(t-1)^m=f_{3m}(t)
\end{aligned}
$$

だから $f_{3m-1}(t+1)+f_{3m-2}(t+1)=f_{3m}(t+1)$ となるから

$$
p_{3m}=p_{3m-1}+p_{3m-2},\qquad q_{3m}=q_{3m-1}+q_{3m-2}
$$

となる．■

定理 3.15

$$
e=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{8+}\frac{1}{1+}\cdots,
$$

即ち

$$
e=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots
$$

(3.18) $\quad a_0=2,\ \ a_{3m-2}=1,\ \ a_{3m-1}=2m,\ \ a_{3m}=1\quad(m=1,2,3\cdots)$

である．

[証明] 補題 3.14 の記号を用いて

$$
u_n=\int_0^1 e^{-t}f_n(t)dt\qquad(n=-1,0,1,2,\cdots)
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
q_n&=\int_0^\infty e^{-t}f_n(t)dt\\
&=\int_0^1 e^{-t}f_n(t)dt+\int_0^\infty e^{-t}f_n(t)dt\\
&=u_n+\int_0^\infty e^{t+1}f_n(t+1)dt=u_n+e^{-1}p_n,
\end{aligned}
$$

即ち

$$
q_ne-p_n=e\cdot u_n\qquad\therefore\ \ e-\frac{p_n}{q_n}=e\cdot\frac{u_n}{q_n}
$$

となる．$0 \leq t \leq 1$ のとき

$$|f_n(t)| \leq |t(t-1)| \leq \frac{1}{4}$$

だから

$$\begin{aligned} |u_n| \leq \int_0^1 e^{-t}\,|f_n(t)|\,dt &\leq \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[-e^{-t}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot (1 - e^{-1}) < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

だから

$$\left| e - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{e}{4} \cdot \frac{1}{q_n}.$$

よって $\lim_{n \to \infty} q_n = \infty$ より

$$\lim_{n \to \infty} \left| e - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0 \qquad \therefore \quad \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = e$$

である．一方 $\{a_n\}$ を (3.18) に従って定義すれば，補題 3.14 より

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

となる．よって求める e の連分数展開を得る．■

課題 22 自然対数の底 e の連分数展開から，e の近似分数 $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}$ を計算せよ．

課題 23 円周率 π の連分数展開を，出来るだけ長く求めよ．

3.6 $q^2 \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right|$ はどのくらい小さくなれるか？

素数 l に対して $\sqrt{l}$ は無理数である．整数係数の多項式

$$f(x) = x^2 - l$$

に対して $f(\sqrt{l}) = 0$ である．ここで

$$f(x + \sqrt{l}) = (x + \sqrt{l})^2 - l = x^2 + 2\sqrt{l}x$$

だから

$$f(x) = (x - \sqrt{l})^2 + 2\sqrt{l}(x - \sqrt{l})$$

である．そこで任意の有理数 $\dfrac{p}{q}$ に対して

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right) &= \left(\frac{p}{q}-\sqrt{l}\right)^2 + 2\sqrt{l}\left(\frac{p}{q}-\sqrt{l}\right) \\ &= \left(\frac{p}{q}-\sqrt{l}\right)\left\{\left(\frac{p}{q}-\sqrt{l}\right)+2\sqrt{l}\right\} \end{aligned}$$

となる．二つの場合を分けて考える：

i) $\left|\dfrac{p}{q}-\sqrt{l}\right| < 1$ のとき．

$$\begin{aligned} \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| &\le \left|\frac{p}{q}-\sqrt{l}\right|\left\{\left|\frac{p}{q}-\sqrt{l}\right|+2\sqrt{l}\right\} \\ &< \left|\frac{p}{q}-\sqrt{l}\right|(1+2\sqrt{l}) \end{aligned}$$

である．一方，$\dfrac{p}{q} \neq \sqrt{l}$ より $p^2 - lq^2 \neq 0$ だから

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|p^2-lq^2|}{q^2} \ge \frac{1}{q^2}.$$

よって

$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{l}\right|(1+2\sqrt{l}) > \frac{1}{q^2},$$

即ち

$$q^2 \cdot \left|\sqrt{l}-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{1+2\sqrt{l}}$$

となる．

ii) $\left|\dfrac{p}{q}-\sqrt{l}\right| \ge 1$ のとき．$q \ge 1$ だから

$$q^2 \cdot \left|\sqrt{l}-\frac{p}{q}\right| \ge q^2 \ge 1 > \frac{1}{1+2\sqrt{l}}$$

となる．よって

$$c(\sqrt{l}) = \frac{1}{1+2\sqrt{l}}$$

とおけば，次の定理が示された：

定理 3.16 素数 l に対して，正の定数 $c(\sqrt{l})$ が定まり，任意の有理数 $\dfrac{p}{q}$ に対して

$$q^2 \cdot \left|\sqrt{l}-\frac{p}{q}\right| > c(\sqrt{l})$$

となる．

例 3.17 定理 3.16 を $l=2$ の場合を見てみよう．このとき

$$c(\sqrt{2}) = \frac{1}{1+2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{7} = 0.2612\cdots$$

だから，任意の有理数 $\dfrac{p}{q}$ に対して

$$q^2\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| > 0.2612$$

である．一方，$\sqrt{2}$ の連分数展開

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+\cdots}$$

から得られる $\sqrt{2}$ の第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ に対しては，例 3.13 より

$$q_n{}^2\left|\sqrt{2}-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2}$$

である．

課題 24 次の問いに答えよ：

1) $c(\sqrt{3})$ を計算せよ．

2) $\sqrt{3}$ の連分数展開から得られる $\sqrt{3}$ の第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ に対して

$$q_n{}^2\left|\sqrt{3}-\frac{p_n}{q_n}\right|$$

の値と 1) で計算した $c(\sqrt{3})$ の値を比較してみよ．

4 代数的数と超越数

定義 4.1 実数 α に対して

1) 0 でない有理数係数の多項式 $f(x)$ があって $f(\alpha)=0$ となるとき，α を**代数的数** と呼ぶ．

2) 全ての有理数係数多項式 $f(x)\neq 0$ に対して $f(\alpha)\neq 0$ であるとき，α を**超越数**と呼ぶ．

4.1 代数的数の最小多項式

定義 4.2 代数的数 α に対して，α を根とする 0 でない有理数係数多項式で，次数が最小かつ最高次の係数が 1 のものを，α の**最小多項式**と呼ぶ.

定理 4.3 代数的数 α の最小多項式は唯一存在する．その次数を α の**次数**と呼ぶ.

[証明] $f(x), g(x)$ を α の最小多項式とする．$g(x)$ を $f(x)$ で割って，商を $q(x)$，余りを $r(x)$ とする，即ち有理数係数多項式 $q(x), r(x)$ に対して

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad r(x) = 0 \text{ または } \deg r(x) < \deg f(x)$$

である．ここで $r(x) \neq 0$ とすると，$\deg r(x) < \deg f(x)$ かつ

$$r(\alpha) = g(\alpha) - q(\alpha)f(\alpha) = 0$$

だから，$r(x)$ は α を根とする 0 でない有理数係数多項式で，かつ次数は $f(x)$ の次数より小さい．これは $f(x)$ が α の最小多項式であることに反する．よって $r(x) = 0$ である．よって $g(x) = q(x)f(x)$ となるが，$f(x), g(x)$ の次数は同じだから，$q(x) = c$ は 0 でない定数である．更に $f(x), g(x)$ の最高次の係数は 1 だから $c = 1$．よって $g(x) = f(x)$ となる．■

例 4.4 素数 p に対して $\alpha = \sqrt{p}$ は無理数であった（定理 1.16 参照）．よって α は有理数係数 1 次多項式の根になることはない．実際，有理数係数 1 次多項式 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ に対して $f(\alpha) = 0$ となるならば，$\alpha = -\dfrac{b}{a}$ は有理数となる．ここで $f(x) = x^2 - p$ は有理数係数多項式で $f(\alpha) = 0$ となるから，$f(x) = x^2 - p$ が $\alpha = \sqrt{p}$ の最小多項式となる．よって $\alpha = \sqrt{p}$ の次数は 2 である.

注意 4.5 次数 1 の代数的数とは有理数のことである.

定理 4.6 代数的数 α の最小多項式を $p(x)$ とする．有理数係数多項式 $f(x)$ に対して $f(\alpha) = 0$ ならば $p(x)$ は $f(x)$ を割り切る.

[証明] $f(x)$ を $p(x)$ で割った商を $q(x)$，余りを $r(x)$ とすると

$$f(x) = q(x)p(x) + r(x) \tag{4.19}$$

で $r(x) = 0$ または $\deg r(x) < \deg p(x)$ である．$r(x) = 0$ を示したいので，背理法を用いて $r(x) \neq 0$ と仮定する．(4.19) に $x = \alpha$ を代入すると

$$r(\alpha) = f(\alpha) - q(\alpha)p(\alpha) = 0$$

かつ $\deg r(x) < \deg p(x)$ となり，最小多項式 $p(x)$ の定義に反する．よって $r(x) = 0$，従って $f(x) = q(x)p(x)$ となり，$f(x)$ は $p(x)$ で割り切れる．■

課題 25 異なる素数 p, q に対して

$$\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}, \quad \beta = \sqrt{p} - \sqrt{q}, \quad \gamma = -\sqrt{p} + \sqrt{q}, \quad \delta = -\sqrt{p} - \sqrt{q}$$

とおいて

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$$

とおく．次の問いに答えよ：

1) $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ は無理数であることを示せ．

2) $f(x)$ の係数は全て整数であることを示せ．

3) $f(x)$ は $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ の最小多項式であることを示せ（ヒント：$\sqrt{p} + \sqrt{q}$ の最小多項式を $p(x)$ とすると，定理 4.6 より $p(x)$ は $f(x)$ を割り切るから，$x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, $x - \delta$ の幾つかをかけたものである）．

4.2 代数的実数を有理数で近似すること ; Liouville(リウビル) の定理

定理 2.1，定理 3.16 の一般化として，次の定理を示す：

定理 4.7 (Liouville) n 次の代数的数 α に対して，正の定数 $c(\alpha)$ が定まり，任意の有理数 $\frac{p}{q} \neq \alpha$ に対して

$$q^n \cdot \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq c(\alpha)$$

となる．

[証明] 1) $\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq 1$ のとき．

$$q^n \cdot \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq q^n \geq 1 \tag{4.20}$$

となる．

2) $\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < 1$ のとき．

α の最小多項式の各係数を分母をはらえば，n 次の整数係数多項式 $f(x)$ があって $f(\alpha) = 0$ となり，$n - 1$ 次以下の整数係数多項式 $g(x)$ に対しては $g(\alpha) \neq 0$ となる．x の関数 $f(x)$ に Taylor の定理を用いると，$f^{(0)}(x) = f(x)$ だから $f^{(0)}(\alpha) = 0$ であることに注意して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \cdot (x - \alpha)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \cdot (x - \alpha)^k \\ &= (x - \alpha) \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \cdot (x - \alpha)^{k-1} \end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| &= \left|\frac{p}{q}-\alpha\right| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \cdot \left(\frac{p}{q}-\alpha\right)^{k-1}\right| \\ &\leq \left|\frac{p}{q}-\alpha\right| \cdot \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\right| \cdot \left|\frac{p}{q}-\alpha\right|^{k-1} \\ &\leq \left|\frac{p}{q}-\alpha\right| \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|f^{(k)}(\alpha)\right|}{k!}\end{aligned}$$

となる．一方，$f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ である．実際，$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ とすると，$f(x)$ は $qx-p$ で割り切れるから

$$f(x) = (qx-p)g(x)$$

なる有理数係数多項式 $g(x)$ がある．$\alpha \neq \frac{p}{q}$ だから $g(\alpha)=0$ であるが，$g(x)$ は $n-1$ 次多項式だから，これは $f(x)$ が α の最小多項式であることに反する．一方，$f(x)$ は整数係数多項式だから $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ は整数となる．よって

$$\left|q^n f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq 1$$

となる．よって

$$q^n \cdot \left|\frac{p}{q}-\alpha\right| \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|f^{(k)}(\alpha)\right|}{k!} \geq q^n \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq 1 \tag{4.21}$$

となる．

(4.21), (4.20) より

$$c(\alpha) = \mathrm{Min}\left\{1, \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\left|f^{(k)}(\alpha)\right|}{k!}\right)^{-1}\right\}$$

とおくと

$$q^n \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq c(\alpha)$$

となる．■

例 4.8 素数 p に対して $\sqrt{p}$ の最小多項式は $f(x) = x^2 - p$ である (例 4.4 参照)．よって $\sqrt{p}$ は 2 次の代数的数で

$$\left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\left|f^{(k)}(\alpha)\right|}{k!}\right)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{p}+1} < 1$$

だから $c(\sqrt{p})=\dfrac{1}{2\sqrt{p}+1}$ である．例えば

$$\begin{aligned} c(\sqrt{2}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt{2}-1}{7} = 0.2612\cdots, \\ c(\sqrt{3}) &= \frac{1}{2\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}-1}{11} = 0.2240\cdots \end{aligned}$$

である．

課題 26 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおいて，次の問いに答えよ：

1) $f(x)=x^4-10x^2+1$ は α の最小多項式であることを示せ．
（ヒント：課題 25 参照）

2) 定理 4.7 の証明を調べて，$c(\alpha)$ を計算せよ．

3) 課題 20 で求めた $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の連分数展開の部分分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ に対して

$$q_n^4\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right| \quad と \quad c(\alpha)$$

を比較してみよ．

4.3 超越数の例：Liouville の数

整数 $d=2,3,4,\cdots$ に対して

$$\omega_d=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{d^{k!}} \tag{4.22}$$

は収束する．
[証明] $k=0,1,2,\cdots$ に対して

$$k!\geq k \qquad \therefore \frac{1}{d^{k!}}\leq\frac{1}{d^k}$$

となる．よって

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{d^{k!}}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{d^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{d}}=\frac{d}{d-1}<\infty.$$

よって収束する．■

定理 4.9 ω_d $(d=2,3,4,\cdots)$ は超越数である．

[証明] $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{d^{k!}}=\frac{p_n}{q_n}\qquad (q_n=d^{n!})$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}\left|\omega_d-\frac{p_n}{q_n}\right| &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{d^{k!}}\\ &< \sum_{k=(n+1)!}^{\infty}\frac{1}{d^k}=\frac{1}{d^{(n+1)!}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{d}\right)^k\\ &= \frac{1}{d^{(n+1)!}}\frac{1}{1-\frac{1}{d}}=\frac{d}{d-1}\cdot\frac{1}{d^{(n+1)!}}\end{aligned}$$

となる．ここで ω_d が代数的数であるとして，その次数を m とすると，定理 4.7 より，正の定数 $c(\omega_d)$ が定まり

$$q_n^m\left|\omega_d-\frac{p_n}{q_n}\right|\geq c(\omega_d)$$

となる．よって

$$c(\omega_d)\leq\frac{d}{d-1}\cdot\frac{q_n^m}{d^{(n+1)!}}=\frac{d}{d-1}\cdot\frac{1}{d^{(n+1)!-m\cdot n!}}=\frac{d}{d-1}\cdot\frac{1}{d^{n!(n+1-m)}}$$

となるが，これは $n\to\infty$ のとき成り立たない．よって ω_d は代数的数ではない．■

連分数を用いて超越数を作ってみよう．一般に無限整連分数

$$\alpha=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots$$

の第 n 近似分数

$$a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{p_n}{q_n}$$

に対して，注意 3.12 より

$$q_n^2\left|\alpha-\frac{p_n}{q_N}\right|<\frac{1}{a_{n+1}}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

である．ところで $q_{n-1}>q_{n-2}$ に注意すると，漸化式 (3.9) より

$$\begin{aligned}q_n=&a_nq_{n-1}+q_{n-2}<(a_n+1)\cdot q_{n-1}\\ <&(a_n+1)(a_{n-1}+1)\cdots(a_1+1)\cdot q_0=\prod_{k=1}^{n}(a_k+1)\end{aligned}$$

となる．そこで，

定理 4.10 d を任意の正整数として，整数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\cdots}$ を

$$a_1 = d, \qquad a_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} (a_k + 1)^k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義すると，無限整連分数

$$\Omega_d = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$$

により定義される実数 Ω_d $(d = 1, 2, 3, \cdots)$ は超越数である．

[証明] Ω_d が N 次の代数的数であると仮定すると，定理 4.7 より，正の定数 $c(\Omega_d)$ が定まって，任意の有理数 $\dfrac{p}{q}$ に対して

$$q^N \cdot \left| \Omega_d - \frac{p}{q} \right| \geq c(\Omega_d) \tag{4.23}$$

となる．一方 Ω_d の連分数展開から得られる Ω_d の第 n 近似分数

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

に対して

$$q_n^2 \left| \Omega_d - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}}$$

だから $q_n < \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k + 1)$ に注意して

$$\begin{aligned} q_n^N \left| \Omega_d - \frac{p_n}{q_n} \right| &< \frac{q_n^{N-2}}{a_{n+1}} \\ &< \frac{1}{a_{n+1}} \left\{ \prod_{k=1}^{n} (a_k + 1) \right\}^{N-2} = \prod_{k=1}^{n} (a_k + 1)^{N-2-k} \end{aligned}$$

となる．よって

$$\lim_{n \to \infty} q_n^N \left| \Omega_d - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0$$

となるが，これは (4.23) と両立しない．よって Ω_d は代数的数ではない．■

4.4 自然対数の底が超越数であること

準備として

命題 4.11 整数係数多項式 $g(x)$ の k 回微分 $g^{(k)}(x)$ の係数は全て $k!$ で割り切れる．

[証明] $g(x)=x^n$ の場合に考えればよい．

$$g^{(k)}(x)=\begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot x^{n-k} & : k \geq n, \\ 0 & : k > n \end{cases}$$

となるが

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k} : \text{二項係数}$$

は整数だから，$g^{(k)}(x)$ の係数は $k!$ で割り切れる．■

これを用いて

定理 4.12 自然対数の底 e は超越数である．

[証明] e が代数的であると仮定して，整数係数多項式

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (a_0 \neq 0, a_n \neq 0)$$

に対して $g(e)=0$ であるとする．素数 p を $p>n$ かつ $p>\mathrm{Max}\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ にとって

$$f(x)=x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-n)^p$$

とおくと，$d=\deg f(x)=(n+1)p-1$ である．ここで部分積分により

$$\begin{aligned} F(t)&=e^t\int_0^t e^{-x}f(x)dx=e^t\left\{\left[-e^{-x}f(x)\right]_0^t+\int_0^t e^{-x}f'(x)dx\right\} \\ &=e^tf(0)-f(t)+e^t\int_0^t e^{-x}f(x)dx \\ &=\sum_{j=0}^{d}\left(e^tf^{(j)}(0)-f^{(j)}(t)\right) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} J&=\sum_{k=0}^{n}a_kF(k) \\ &=\sum_{k=0}^{n}a_ke^k\sum_{j=0}^{d}f^{(j)}(0)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{d}a_kf^{(j)}(k) \\ &=-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{d}a_kf^{(j)}(k) \end{aligned}$$

とおく．まず $0\leq j\leq d, 0\leq k\leq n$ に対して $f^{(j)}(k)$ は整数である．更に

1) $0\leq j\leq p-2$ ならば，$0\leq k\leq n$ に対して $f^{(j)}(k)=0$ である，

2) $p \leq j \leq d$ ならば，命題 4.11 より，$f^{(j)}(x)$ の係数は全て $p!$ で割り切れるから，$0 \leq k \leq n$ に対して $f^{(j)}(k)$ は $p!$ の倍数である，

3) $j = p-1$ のとき，$0 < k \leq n$ に対しは $f^{(p-1)}(k) = 0$ である，

4) $j = p-1, k = 0$ のとき，

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^n(n!)^p$$

は $(p-1)!$ の倍数であるが，$p > n$ だから，p の倍数ではない．

以上により，$|J|$ は $(p-1)!$ の倍数であり，p では割り切れないから $J \neq 0$ であるから

$$|J| \geq (p-1)! \tag{4.24}$$

となる．一方 $0 \leq k \leq n$ に対して

$$|F(k)| \leq e^k \int_0^k e^{-x}|f(x)|dx \leq e^n \int_0^n |f(x)|dx \leq e^n n^{p-1} n^{np}$$

だから

$$|J| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||F(k)| \leq C \cdot n^{(n+1)p} \quad (C = e^n n^{-1} \sum_{k=0}^{n} |a_k| > 0) \tag{4.25}$$

となる．よって (4.24), (4.25) より

$$(p-1)! \leq C \cdot n^{(n+1)p} \qquad \therefore \frac{n^{(n+1)p}}{(p-1)!} \geq \frac{1}{C}$$

となるが，これは $p \to \infty$ のとき不可能である．よって e は代数的ではない．
■