三角関数のさまざまな定義

瓜生　等

平成 13 年 2 月 9 日

1　序論

高校で三角関数を学ぶ。このとき、弧の長さの定義無しに習うため、不正確な議論がここで行われていることに注意して欲しい。さて、高校の教科書を見ると、扇型と三角形二つの図形を描いて、その面積を比較し次の不等式を導き出している。$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

このどこに問題があるかというと、視覚的に上の不等式を導き出しているところである。しかも弧の長さの定義無しにこれを行っているのである。これは数学とはいえない。

そして、上の不等式はどこで使われるかというと、三角関数の微分の公式を導くために用いられる。従って、上の不等式を微分を用いて証明することは、なおさらまずいことになる。これを循環論法と言う。

それではこの不正確さを取り除くにはどうしたらよいか。これを以下考えていくことにしよう。

2　曲線の長さの定義

曲線 C を $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$ とパラメータ表示しておく。

このとき、パラメータの分割 Δ を $\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n\}$ $(t_0 = 0, t_n = T)$ とし、次の量を考える。

$$\ell_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})^2}$$

これは曲線の分点を結んだ折れ線の長さになっている。

この Δ の分点の数をいくつか増した分割を Δ' とする。三角不等式（三角形の 2 辺の和は他の一辺より大）を用いることにより、直ちに、$\ell_\Delta \leq \ell_{\Delta'}$ が従う。直線の場合は等号が成立するので、一般的に等号も含める必要がある。

曲線の長さをこの分点を限りなく増したときの最大値と定義するのは妥当であろう。しかし、この最大値が存在するかどうかはわからない。従って、この上限を考え曲線の長さの定義を与えよう。

$$\ell(C) = \sup_{\Delta} \ell_\Delta$$

$\ell(C)$ が有限の時、曲線 C は求長可能といい、長さを $\ell(C)$ で定義する。

$\varphi(t), \psi(t)$ が C^1 級であるときは平均値の定理を用いることにより、$\ell(C)$ は次の積分で表される。

$$\ell(C) = \int_0^T \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t))^2} dt$$

従って、このときは積分が計算可能であれば長さを具体的に求めることができるのである。

3 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ の証明

前節で曲線の厳密な定義をしたので、これを用いて、三角関数の不等式を導き出し、$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ の証明を与えよう。

θ は $e = (1, 0)$ から $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ までの円周上の長さである。$P' = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ とすると、$2\theta \leq ||P' - e||$ が曲線の長さの定義から従う。ここで、加法定理は既知とする。これは回転を考えることにより、証明できる。のちに詳しく考えることにする。そこで、加法定理を用いると、

$$||P' - e|| = \sqrt{2 - 2\cos 2\theta} = \sqrt{4\sin^2\theta} = 2\sin\theta$$

が従い、$0 < \sin\theta < \theta$ を示したことになる。

つぎに、e から P までの円周上の分点を $\Delta = \{P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}, P_n\}$ $(P_0 = e, P_n = P)$ とする。さらに $P_i = (x_i, y_i)$ と座標表示しておく。

$$\ell_\Delta = \sum_{i=1}^n ||P_i - P_{i-1}|| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i - x_{i-1}| + |y_i - y_{i-1}|)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (|x_i - x_{i-1}| + |y_i - y_{i-1}|) &\leq x_0 - x_n + y_n - y_0 \\
&= 1 - \cos\theta + \sin\theta - 0 \\
&\leq 1 - \cos^2\theta + \sin\theta \\
&= \sin^2\theta + \sin\theta \\
&= \sin\theta(1 + \sin\theta)
\end{aligned}$$

従って、$\sup_\Delta \ell_\Delta \leq \sin\theta(1 + \sin\theta)$ であり、曲線の定義から $\theta \leq \sin\theta(1 + \sin\theta)$ を得る。

$\theta > 0$ で　$0 < \sin\theta \leq \theta$ であることにより、はさみうちの原理を用いれば $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$ となり、$\sin\theta$ は $\theta = 0$ において連続である。

つぎに、$0 < \sin\theta \leq \theta$ と $\theta \leq \sin\theta(1 + \sin\theta)$ より

$$1 \leq \frac{\theta}{\sin\theta} < 1 + \sin\theta$$

であるので、はさみうちの原理より $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ である。これと加法定理により、微分の公式 $(\sin\theta)' = \cos\theta$ を正確に示すことができる。

次の一般的な定理を用いても良い。

定理

$f(x) \in C^1$ であり、$P(x, f(x)), Q(x+h, f(x+h))$ に対して、$c(P,Q)$ を点 P と点 Q の間の曲線の長さ、$\ell(P,Q)$ を P と点 Q を結んだ直線の長さとする。このとき、次が成り立つ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{c(P,Q)}{\ell(P,Q)} = 1$$

これは、江戸時代の数学者　関孝和による「弦は限りなく弧に親しむ」を西洋数学の言葉で記述したものである。

定理の証明。

$h > 0$ として証明する。平均値の定理を用いることにより、

$\ell(P,Q) = \sqrt{h^2 + (f(x+h) - f(x))^2} = h\sqrt{1 + f'(x+\theta h)^2}$

また、曲線は今の場合積分で表示できるので、

$c(P,Q) = \displaystyle\int_x^{x+h} \sqrt{1+f'(\xi)^2}d\xi$

$$\frac{c(P,Q)}{\ell(P,Q)} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\sqrt{1+f'(\xi)^2}d\xi \frac{1}{\sqrt{1+f'(x+\theta h)^2}}$$

であるので、微積分の基本定理を用いることにより、

$$\lim_{h\to 0}\frac{c(P,Q)}{\ell(P,Q)} = \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = 1$$

これを用いると、中心角 2θ の弦の長さは $2\sin\theta$ であり、弧の長さは 2θ であるので、$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin\theta}{2\theta} = 1$ これから $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ が従う。

4　円弧の長さの積分による定義

この節では円弧の長さを積分で定義し、これを用いて三角関数を定義しよう。

半径 1 中心が原点の円の方程式は $x^2 + y^2 = 1$ である。上半平面のみ考えることとすれば、$y = \sqrt{1-x^2}$ が上半円を表す方程式である。$-1 \le x \le 1$ とし、点 $(1,0)$ から点 (x,y) までの上半円上の長さ θ は積分

$$\theta = \int_x^1 \sqrt{1+y'^2}dx = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}}$$

で表される。θ は x の関数であるので、$\theta(x)$ と書くことにする。ここで、$\theta(1) = 0$ であるが、$\theta(-1) = \pi$ と定義するのである。これが π の定義である。$\theta(x)$ は $-1 < x < 1$ で微分できて、

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となるので、単調減少である。従って、逆関数を持つことができる。この逆関数をを $\cos\theta$ と定義する。また、このときの y 座標、すなわち、$\sqrt{1-\cos\theta^2}$ を $\sin\theta$ と定める。

定義の仕方から $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ は明らかに成立している。最後に微分の公式を逆関数の微分法を用いて、示しておく。

$$(\cos\theta)'=\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\frac{d\theta}{dx}}=\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=-\sqrt{1-x^2}=-\sin\theta$$

$$(\sin\theta)'=\frac{-\cos\theta(\cos\theta)'}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=-\frac{\cos\theta(-\sin\theta)}{\sin\theta}=\cos\theta$$

5 回転と三角関数

複素数 z に対して、大きさ 1 の複素数 e を乗ずることによって得られる変換

$$R_e : z\to z'=ez$$

を複素数体 C の原点 O を中心とする回転という。

これは我々が実数 θ,α,r を用いて $e=\cos\theta+i\sin\theta$ であり、$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ であるので、$z=r(\cos(\alpha+\theta)+i\sin(\alpha+\theta))$ となることを知っていいるのであらかじめ予想できることである。

しかし、ここでの目標は逆に回転から三角関数が定義できることを示すことである。

このとき明らかに大きさ 1 の複素数 f,e に対して、$R_e\circ R_f=R_{fe}$ が成立していることがわかる。この回転の量がその角と呼ばれる実数で表されるためには $\theta\in R$ に対して、

$$R_{e(\theta)} : z\to z'=e(\theta)z$$

となる $|e(\theta)|=1$ である複素数値関数が存在しなければならない。

また、θ が回転 $R_{e(\theta)}$ の量を表しているならば

$$R_{e(\theta_1+\theta_2)}=R_{e(\theta_1)}\circ R_{e(\theta_2)}$$

が成立していなければならない。$R_e\circ R_f=R_{fe}$ であったことに注意すると

$$e(\theta_1+\theta_2)=e(\theta_1)e(\theta_2)$$

が得られる。これは加法定理と呼ぶにふさわしい等式である。

従って、我々は $|e(\theta)|=1$ で $e(\theta_1+\theta_2)=e(\theta_1)e(\theta_2)$ となる複素数値関数を求めることを以下考えていく。

必要条件を見ていく。まず、$\theta_1=\theta_2=0$ と置くと、$e(0)^2=e(0)$ が得られるが $|e(\theta)|=1$ であることに注意すると $e(0)=1$ が従う。$h\neq 0$ に対して、

$$\frac{e(\theta+h)-e(\theta)}{h}=e(\theta)\frac{e(h)-1}{h}=e(\theta)\frac{e(h)-e(0)}{h}$$

であるので、

$$\lim_{h\to 0}\frac{e(\theta+h)-e(\theta)}{h}=e(\theta)\lim_{h\to 0}\frac{e(h)-e(0)}{h}$$

従って、$e(\theta)$ が原点で微分可能であれば実数全体で微分可能となり、原点で微分可能でなければ実数全体で微分不可能となる。そこで後者はある意味で病的な様相があると考え、ここでは $e(\theta)$ は原点で微分可能であるとして話を進めよう。

このとき、微分方程式 $e'(\theta)=e'(0)e(\theta)$ が得られる。

つぎに $e'(0)$ について考えることにする。$e(0)=1$ より $e(\theta)e(-\theta)=1$ が成立する。また $|e(\theta)|=1$ より $e(\theta)\overline{e(\theta)}=1$ である。故に $e(-\theta)=\overline{e(\theta)}$ が従う。これより $e'(0)+\overline{e'(0)}=0$ が従うので、$e'(0)$ は純虚数であることがわかる。そこで、$e'(0)=iA$ と置くことができるが、まずは $A=1$ の場合を考えていく。

6　微分方程式による三角関数の定義

以下微分方程式

$$e'(\theta)=ie(\theta), e(0)=1$$

を満たす、$e(\theta)$ を求めたい。微分方程式の基礎定理によりこのような $e(\theta)$ はただ一つ存在することがわかっている。

6.1　三角関数の満たす微分方程式

$e(\theta)=u(\theta)+iv(\theta)$ と実部と虚部に分解する。頭では $u(\theta)=\cos\theta$, $v(\theta)=\sin\theta$ と考えている。
$e'(\theta)=ie(\theta), e(0)=1$ の実部虚部を比較すると
$u'(\theta)=-v(\theta), u(0)=1$
$v'(\theta)=u(\theta), v(0)=0$
が得られる。

6.2　ピタゴラスの定理

$\dfrac{d|e(\theta)|^2}{d\theta}=\dfrac{de(\theta)\overline{e(\theta)}}{d\theta}=e'(\theta)\overline{e(\theta)}+e(\theta)\overline{e'(\theta)}$
$=ie(\theta)\overline{e(\theta)}+e(\theta)\overline{ie(\theta)}=ie(\theta)\overline{e(\theta)}-ie(\theta)\overline{e(\theta)}=0$
これより、$|e(\theta)|^2=|e(0)|^2$ さらに $|e(\theta)|=1$ が得られる。従って微分方程式の解は最初の条件の１つである $|e(\theta)|=1$ を満足していることがわかる。これはピタゴラスの定理に他ならない。

6.3　加法定理

a を定数として、
$\dfrac{de(\theta)e(a-\theta)}{d\theta}=e'(\theta)e(a-\theta)-e(\theta)e'(a-\theta)=ie(\theta)e(a-\theta)-ie(\theta)e(a-\theta)=0$
これより、$e(\theta)e(a-\theta)=e(0)e(a)=e(a)$ となり、$a-\theta=\theta'$ とおくと $e(\theta+\theta')=e(\theta)e(\theta')$ が成立する。従って微分方程式の解はもうひとつの条件 $e(\theta+\theta')=e(\theta)e(\theta')$ を満足していることがわかる。さらにこの等式の実部虚部を比較することにより三角関数の加法定理が得られる。

6.4　三角関数の偶奇性

$\dfrac{d\overline{e(-\theta)}}{d\theta}=\overline{-e'(-\theta)}=i\overline{e(-\theta)}$
であり $\overline{e(-0)}=1$ である。これより微分方程式の解の一意性より $\overline{e(-\theta)}=e(\theta)$ が従う。この等式の実部虚部を比較することにより $u(\theta)=u(-\theta)$, $v(\theta)=-v(-\theta)$ が従う。

6.5　円周率 π の定義

$u(\theta)=\cos\theta$ と想定しているので、$u(\theta)$ が初めて 0 になる θ を $a=\frac{\pi}{2}$ と定義するのが良かろう。そのためには $u(\theta)=0$ となる $\theta>0$ の存在が問題となる。いま考えている微分方程式の解は、一般論から無限回微分可能であることが知られている。

$u(0)=1$ であるので 0 の近くの $\theta_0>0$ で $u(\theta_0)>0$ である。$\theta>\theta_0$ として、テイラーの定理を用いると、

$$u(\theta)=u(\theta_0)+u'(\theta_0)(\theta-\theta_0)+\frac{1}{2}u''(\xi)(\theta-\theta_0)^2$$

ここで　ξ は $\theta_0<\xi<\theta$ を満たすものである。さらに $u''(\theta)=-u(\theta), u'(0)=0$ に注意する。

いま $\theta>0$ で $u(\theta)>0$ であるとして矛盾を導く。$u''(\theta)=-u(\theta)$ より $u''(\theta)<0$ であり、これと $u'(0)=0$ より $u'(\theta)<0$ も従う。

これらを考慮すると、テイラーの定理の等式より、

$$u(\theta)<u(\theta_0)+u'(\theta_0)(\theta-\theta_0)$$

が従い、さらに $u'(\theta_0)<0$ に注意すると不等式の右辺は $\theta>\theta_0$ で θ 軸と交わることになり、矛盾である。

これで $u(\theta)=0$ となる $\theta>0$ の存在が保証された。

$u(a)=0$ であり $u(a)^2+v(a)^2=1$ より $v(a)=\pm1$ であるが、$u'(a)\leq 0$ であるので、$v(a)=1$ となる。

6.6　周期性

$e(a)=i$ であるので、加法定理を用いると、$e(2a)=e(a)^2=-1$, $e(3a)=e(a)^3=-i$,
$e(4a)=e(a)^4=1$ となる。これより (θ) の周期は $4a$ であることがわかる。

6.7　$u(\theta)$ と $v(\theta)$ の関係

三角関数の偶奇性の時と同様にして b を実の定数として、

$$\frac{d\overline{e(b-\theta)}}{d\theta}=i\overline{e(b-\theta)}$$

が得らる。今、$b=a$ にとり、$v(\theta)=i\overline{e(a-\theta)}$ とおくと $\dfrac{dv(\theta)}{d\theta}=iv(\theta), v(0)=1$ がえられ、解の一意性より $v(\theta)=e(\theta)$ となる。これより $i\overline{e(a-\theta)}=e(\theta)$ が得られる。

同様にすると、$-\overline{e(2a-\theta)}=e(\theta)$, $-i\overline{e(3a-\theta)}=e(\theta)$ が得られる。

これらの諸等式の実部虚部を比較すると、よく知られた公式が得られ、結局 $0<\theta<a$ のグラフが描くことができれば全て描くことができるのである。

6.8　結論その他

○このようにして回転から始まり関数方程式を導き、微分方程式により三角関数に到達した。初期値が iA であるときは合成関数の微分法より $e(A\theta)$ が求めるものとなり、回転角の速度が A とな

るものが得られるのである。これにより回転の関数方程式は全て解けたことになる。なお三角関数の諸公式を導く際に解の一意性が巧みに用いられてきたことに注意されたい。

7　級数による三角関数の定義

前節で微分方程式 $e'(\theta) = ie(\theta), e(0) = 1$ が得られたので、これを通して級数による三角関数の定義を与えよう。一般に微分方程式を解く方法にピカールの逐次近似法と呼ばれているものがある。これを適用しよう。

$$\begin{aligned} e_0(\theta) &= 1 \\ e_{n+1} &= 1 + i\int_0^\theta e_n(s)ds, (n = 0, 1, 2, \cdots,) \end{aligned}$$

これより、

$$e_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(i\theta)^k}{k!}$$

従って、次のように $e(\theta)$ を定義するのが妥当であろう。

$$e(\theta) = \lim_{n\to\infty} e_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

この級数の絶対収束性は容易に示すことができる。この $e(\theta)$ が最初の微分方程式を満足することは収束べき級数の項別微分定理より従う。ゆえに、微分方程式の解の一意性よりここで定義した $e(\theta)$ と微分方程式によって定義した $e(\theta)$ は同じものであることがわかる。
$e(\theta)$ の実部と虚部に分解すると、

$$e(\theta) = (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots)$$

となるので、前節のことより

$$\begin{aligned} \cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \\ \sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \end{aligned}$$

と定義すれば良いことがわかる。実際これは $\sin\theta, \cos\theta$ の $\theta = 0$ におけるテイラー展開になっていることに注意しよう。

8　差分による三角関数の定義

ここでも微分方程式 $e'(\theta) = ie(\theta), e(0) = 1$ から出発する。これを数値計算で用いられるオイラー法を適用する。
$e'(\theta) = \lim_{h\to 0} \frac{e(\theta + h) - e(\theta)}{h}$
であるので、h が十分小であれば

$\dfrac{e(\theta+h)-e(\theta)}{h}$ はほぼ $ie(\theta)$ と考えられる。
そこで、n を自然数として、$h=\frac{\theta}{n}$ と置き、つぎの漸化式を考える。

$$\frac{e_{k+1}-e_k}{h}=ie_k, k=0,1,2,\cdots,n-1$$

また、$e(0)=1$ より、$e_0=1$ と定めておく。
ゆえに、$e_{k+1}=(1+hi)e_k$ より、$e_n=(1+hi)^n e_0=(1+\dfrac{\theta}{n}i)^n$
である。
従って、

$$e(\theta)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\theta}{n}i)^n$$

と $e(\theta)$ を定義すれば良いことがわかる。
一方、z が複素数の時、

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n=\sum_{n=0}\frac{z^n}{n!}$$

が成立していることが知られている。ゆえに、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{\theta}{n}i)^n$ は収束していることになり、ここで定義した $e(\theta)$ と差分によって定義した $e(\theta)$ は同じものであることもわかるのである。

9 結論その他

高校の三角関数から出発して、いろいろな三角関数の定義を紹介した。厳密に定義するには様々な知識が必要であることも理解していただけたでしょうか。ここでの議論は次の３段により進めてきました。

- 定義がでてくる理由を説明できること。
- 定義が妥当であること。
- いろいろな定義が同一であること。

このように、一つのものを別の側面から眺めることはあながち非生産的なことではない。このことが三角関数がもつ種種の性質を明らかにしていくことにもなっている。そして、その一つの断面からは三角関数がもつ一部の性質がさらに一般な関数に成り立っていることも発見できるのである。
一方、定義の発見という側面からはかなりずるい方針をとっていることも事実である。実は我々は高校までの素朴な三角関数から到達した結果を見据え、「厳密」と言っている定義に気付いているようである。数学における厳密化はこのようないい加減な背景をもっていることが実に多いのである。

また、高校の指数関数の定義にも問題がある。「実数の定義がない」のが大きな原因である。しかし、「素朴な数学」でもかなりのことはわかる。ここで「厳密さ」を少し譲ったとしても、学習者にとって得られるものが多大であるのであれば「教育的」によしとする考え方はあってよい。「問題点の自覚」に気付く内容を収得して始めて「厳密さ」も意味をもつのであるからである。